المحددات Determinants

2-1. تعريف المحدد

ليكن لدينا المصفوفة المربعة A_n، نعرف محدد المصفوفة A بأنه العدد الحقيقي الناتج عن عمليات حسابية على عناصر المصفوفة ونرمز للمحدد بأحد الأشكال الآتية:

$$\det(A)$$
$$|A|$$
$$\Delta_A$$

وتكون مرتبة المصفوفة هي مرتبة المحدد.

2-2. طرق حساب المحددات

2-2-1. حساب محدد من المرتبة 2×2

لتكن المصفوفة A_2 المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

نعرف المحدد للمصفوفة A بالشكل:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

أي المحدد ناتج من ناتج طرح جداء عناصر القطر الثانوي من جداء عناصر القطر الرئيسي.

مثال(1): أوجد محدد المصفوفة A المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 2 \times 4 = 7$$

2-2-2. طريقة لابلاس لحساب محدد من المرتبة $n \times n$

أولا: حساب محدد مصفوفة من المرتبة 3×3

ليكن لدنيا المصفوفة $A_{3\times3}$ والمعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

لحساب محدد المصفوفة A نتبع الخطوات التالية:

1. نضع إشارات متناوبة فوق عناصر المصفوفة بدءً من الزاوية اليسارية العلوية العنصر a_{11} بإشارة +

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \overbrace{a_{11}}^{+} & \overbrace{a_{12}}^{-} & \overbrace{a_{13}}^{+} \\ \overbrace{a_{21}}^{-} & \overbrace{a_{22}}^{+} & \overbrace{a_{23}}^{-} \\ \overbrace{a_{31}}^{+} & \overbrace{a_{32}}^{-} & \overbrace{a_{33}}^{+} \end{vmatrix}$$

2. نختار أحد الأسطر أو أحد الأعمدة من المحدد.
3. نضرب كل إشارة بالعنصر المقابل لها من السطر (العمود) الذي تم اختياره ثم نضرب الناتج بالمحدد من المرتبة 2×2 الناتج عن حذف السطر والعمود الموجود فيه ذلك العنصر.
4. نحسب المحددات من المرتبة 2×2
5. نجمع النتائج لنحصل على محدد A.

مثال(2): احسب محدد المصفوفة $A_{3\times3}$ المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \overbrace{3}^{+} & \overbrace{-2}^{-} & \overbrace{-1}^{+} \\ \overbrace{5}^{-} & \overbrace{0}^{+} & \overbrace{1}^{-} \\ \overbrace{1}^{+} & \overbrace{2}^{-} & \overbrace{2}^{+} \end{vmatrix}$$

نختار السطر الأول (مثلاً) لفك المحدد وحسابه فيكون:

$$\det(A) = +3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3(0-2) + 2(10-1) - (10-0) = -6 + 18 - 10 = 2$$
$$\Rightarrow \det(A) = 2$$

سوف نعيد نشر المحدد باستخدام العمود الثاني

$$\det(A) = +2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(10-1) + 0(6+1) - 2(3+5) = 18 + 0 - 16 = 2$$
$$\Rightarrow \det(A) = 2$$

ثانياً: حساب محدد مصفوفة من المرتبة $\mathbf{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

لحساب محدد المصفوفة A نتبع الخطوات التالية:

1. نضع إشارات متناوبة فوق عناصر المصفوفة بدءً من الزاوية اليسارية العلوية العنصر a_{11} بإشارة + :

$$\det(A) = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11}}^{+} & \cdots & \overbrace{a_{1n}}^{\cdots} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overbrace{a_{n1}}^{\cdots} & \cdots & \overbrace{a_{nn}}^{\cdots} \end{bmatrix}$$

1. نختار أحد الأسطر أو أحد الأعمدة من المحدد.
2. نضرب كل إشارة بالعنصر المقابل لها من السطر (العمود) الذي تم اختياره ثم نضرب الناتج بالمحدد من المرتبة $(n-1) \times (n-1)$ الناتج عن حذف السطر والعمود الموجود فيه ذلك العنصر.
3. نحسب المحددات من المرتبة $(n-1) \times (n-1)$ بنفس الخطوات السابقة
4. ونستمر في حساب المحددات ثم نجمع النتائج لنحصل على محدد A.

3-2-2. طريقة ساروس لحساب محدد من المرتبة 3×3

تستخدم هذه الطريقة فقط عندما يكون المحدد من المرتبة 3×3 حصراً، ليكن لدينا المصفوفة المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

لحساب المحدد بطريقة ساروس نضيف العمودين الأول والثاني إلى اليمين من العمود الثالث كما بالشكل:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

نأخذ مجموع حاصل جداء عناصر القطر الرئيسي والاقطار الموازية له كما يلي :

$$D_1 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

ثم نأخذ مجموع حاصل جداء عناصر القطر الثانوي والاقطار الموازية له كما يلي :

$$D_2 = a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}$$

فيكون حساب المحدد بطرح D_2 من D_1 كما يلي:

$$\det(A) = D_1 - D_2$$

مثال(3): احسب محدد المصفوفة A المعرفة بالشكل التالي:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 5 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1 & \vdots & 3 & -2\\ 5 & 0 & 1 & \vdots & 5 & 0\\ 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$D_1=(3)(0)(2)+(-2)(1)(1)+(-1)(5)(2)=0-2-10=-12$$
$$D_2=(-1)(0)(1)+(3)(1)(2)+(-2)(5)(2)=0+6-20=-14$$
$$\det(A)=D_1-D_2=-12-(-14)=2$$

2-2-4. صغير عنصر في مصفوفة مربعة

ليكن لدينا المصفوفة المربعة A من المرتبة $n\times n$، نعرف صغير العنصر a_{ij} في المصفوفة A بأنه **المحدد** الناتج عن حذف السطر i والعمود j في المصفوفة A ونرمز لصغير a_{ij} بالرمز Δ_{ij}.

ملاحظة:

عدد الصغائر في مصفوفة يساوي عدد عناصرها (كل عنصر له صغير خاص به).

مثال(4): أوجد الصغائر Δ_{11} و Δ_{12} و Δ_{21} و Δ_{22} من المصفوفة A المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 5 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$\Delta_{11}=0-2=-2$
$\Delta_{12}=10-1=9$
$\Delta_{21}=-4+2=-2$
$\Delta_{22}=6+1=7$

مثال(5): أوجد صغائر المصفوفة A المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$\Delta_{11}=2$
$\Delta_{12}=1$
$\Delta_{21}=-1$
$\Delta_{22}=3$

وبالتالي مصفوفة الصغائر هي:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

2-2-5. المتمم الجبري لعنصر في مصفوفة

ليكن لدينا المصفوفة المربعة A من المرتبة $n \times n$، نعرف المتمم الجبري للعنصر a_{ij} في المصفوفة A بالشكل التالي:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\Delta_{ij}$$

حيث Δ_{ij} هو صغير العنصر a_{ij}.

2-2-6. حساب محدد من المرتبة $n \times n$ بطريقة المتممات الجبرية

لحساب محدد بطريقة المتممات الجبرية للمصفوفة A المربعة من المرتبة $n \times n$ نختار السطر k من المصفوفة (أي سطر نريد) ونحسب المحدد وفق العبارة التالية:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}$$

ويمكن ايضاً حساب المحدد باختيار العمود k من المصفوفة (أي عمود نريد) ونحسب المحدد وفق العبارة التالية:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}$$

حيث A_{ij} هو المتمم الجبري لعنصر a_{ij}.

مثال(6): احسب محدد المصفوفة A المعرفة وفق ما يلي بطريقة المتممات الجبرية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

لنأخذ السطر الأول ونحسب المحدد وفق العلاقة :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\Delta_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\Delta_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det(A) = (1)(-7) + (2)(10) + (3)(1) = 16$$

2-2-7. خواص المحددات

[1] لا تتغير قيمة المحدد إذا بادلنا الأسطر بالأعمدة أي أن محدد المنقول يساوي محدد المصفوفة الاصلية

$$det(A) = det(A^T)$$

[2] تنعكس إشارة المحدد إذا بادلنا سطرين أو عمودين متتاليين في فيه.

مثال(7):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13$$
$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13$$

[3] تنعدم قيمة المحدد إذا تتطابق سطرين أو عمودين فيه.

مثال(8):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2(-15-2) - 3(-10-3) + (4-9) = -34 + 39 - 5 = 0$$

[4] تنعدم قيمة المحدد إذا كان أحد الاسطر (الأعمدة) ناتج عن سطر (عمود) آخر بضربه بعدد.

مثال(9):

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1)(-17) - 1(-13) + (-5) = 17 + 13 - 5 = 25$$

[5] تتضاعف قيمة المحدد بمقدار λ إذا ضربنا أحد أسطر (أعمدة) بالمقدار λ

مثال(10):

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1)(-34) - (-20-6) + (8-18) = 34 + 26 - 10$$
$$= 50$$

[6] تنعدم قيمة المحدد إذا كان أحد (أسطر) أعمدته أصفار.

مثال(10):

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

[7] لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا سطر (عمود) إلى سطر (عمود) آخر بعد ضربه بعدد.

[8] محدد المصفوفة المثلثية (العليا أو الدنيا) أو المصفوفة القطرية يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي.

مثال(11):

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 30$$

[9] محدد الجداء يساوي جداء المحددات

$$det(A_1 A_2 \dots A_m) = det(A_1).det(A_2)\dots det(A_m)$$

2-3. مقلوب مصفوفة

تعريف(1): نقول أن المصفوفة المربعة A من المرتبة $n \times n$ تملك مقلوب ((مصفوفة نظامية)) إذا كان محدد المصفوفة غير معدوم أي $det(A) \neq 0$.

تعريف(2): نقول أن المصفوفة A من المرتبة $n \times n$ لا تملك مقلوب ((مصفوفة شاذة)) إذا كان محددها معدوم أي $det(A) = 0$.

تعريف(3): نرمز لمقلوب المصفوفة النظامية بالرمز A^{-1} ويحقق العلاقة:

$$A_n^{-1} A_n = A_n A_n^{-1} = I_n$$

2-3-1. إيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة 2×2

ليكن لدينا المصفوفة A المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

1. التأكد من أن المصفوفة نظامية (تملك مقلوب) $det(A) \neq 0$
2. نبادل عناصر القطر الرئيسي
3. نعكس إشارات عناصر القطر الثانوي
4. نضرب المصفوفة الناتجة بمقلوب المحدد.

فيكون المقلوب بالشكل:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

مثال(12): أوجد مقلوب المصفوفة A المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. نوجد المحدد لتأكد من أن المصفوفة نظامية:

$$det(A) = (2)(0) - (3)(1) = -3 \neq 0$$

المصفوفة نظامية تملك مقلوب:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

للتحقق من صحة المقلوب نلاحظ أن:

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

2-3-2. مقلوب مصفوفة من المرتبة $n \times n$

لإيجاد مقلوب مصفوفة A من المرتبة $n \times n$ نتبع الخطوات التالية:

1. نوجد محدد المصفوفة A ونتحقق من وجود المقلوب (المصفوفة نظامية) عندما $det(A) \neq 0$
2. نوجد المصفوفة **المساعدة** للمصفوفة A والتي نرمز لها بـ $adj(A)$ أو $\Gamma(A)$ ويتم إيجادها وفق الخطوات التالية:

❖ نوجد المتممات الجبرية لجميع عناصر المصفوفة A ونشكل منها **مصفوفة المتممات الجبرية** ونرمز لها α.

❖ نأخذ منقول مصفوفة المتممات الجبرية الناتجة فنحصل على المصفوفة المساعدة أي أن :

$$\Gamma(A) = \alpha^T$$

3. وبالتالي نوجد المقلوب وفق العلاقة التالية:

$$A^{-1} = \frac{\Gamma(A)}{det(A)}$$

مثال(13): أوجد مقلوب المصفوفة A المعرفة بالشكل التالي:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

1. نوجد محدد المصفوفة A والتأكد أن المصفوفة نظامية:

$$det(A) = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} = -5$$

2. نوجد مصفوفة المتممات الجبرية α:

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 0$$
$$A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -1$$
$$A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 5$$
$$A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -7$$
$$A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 5$$
$$A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix} = -10$$
$$A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix} = 5$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

3. نوجد المصفوفة المساعدة $\Gamma(A)$

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ -1 & -7 & -10 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

4. نوجد المقلوب:

$$A^{-1} = \frac{\Gamma(A)}{det(A)} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ -1 & -7 & -10 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & -1 \end{pmatrix}$$

2-3-3. خواص مقلوب مصفوفة

1. مقلوب أي مصفوفة مربعة وحيد إن وجد.
2. مقلوب المقلوب لمصفوفة هو المصفوفة نفسها $(A^{-1})^{-1} = A$
3. مقلوب الجداء لمصفوفتين نظاميتين هو جداء المقلوب بترتيب معاكس $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. مقلوب المنقول لمصفوفة نظامية يسوي منقول المقلوب لهذه المصفوفة $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. مقلوب مصفوفة متناظرة هو مصفوفة متناظرة أيضاً.
6. محدد مقلوب مصفوفة يساوي مقلوب محدد المصفوفة $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
7. مقلوب المصفوفة القطرية هو مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيس ناتجة عن قلب عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة الأساسية:

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

$$A^{-1} = diag(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}})$$

8. إذا تساوى المقلوب مع المنقول $A^T = A^{-1}$ في مصفوفة مربعة نظامية كانت المصفوفة متعامدة.

مثال(14): أثبت أن المصفوفة A المعرفة بالشكل التالي متعامدة:

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة نظامية لأن:

$$\det(A) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

وكما نلاحظ أن المصفوفة متعامدة لأن:

$$A^T = A^{-1}$$

2-3-4. طريقة جوردان لإيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة $n \times n$

ليكن لدينا المصفوفة المربعة A من المرتبة $n \times n$ لإيجاد مقلوب المصفوفة A بطريقة جوردان نوسع المصفوفة A بالمصفوفة الواحدية من نفس المرتبة توسيعاً أفقياً $[A_n|I_n]$ ثم نجري التحويلات الأولية على **الأسطر فقط** بحيث نحول A في القسم الأيسر من المصفوفة الموسعة إلى واحدية لنحصل على مقلوب المصفوفة في القسم الأيمن تلقائياً أي : $[I_n|A_n^{-1}]$

ملاحظة:

يمكن إيجاد المقلوب بتوسيع المصفوفة A عمودياً بالواحدية من نفس المرتبة $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ إجراء التحويلات على **الأعمدة فقط** لتحويل المصفوفة A (القسم العلوي) إلى واحدية فنحصل في القسم السفلي على المقلوب تلقائياً أي: $\begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix}$.

ملاحظة:

عند توسيع المصفوفة A بالواحدية (حسب جوردان) وظهر أثناء التحويل سطراً صفرياً أو عمود صفرياً أو نتج سطرين (عمودين متطابقين) أو سطر (عمود) ناتج عن سطر (عمود) آخر بضربه بعدد نتوقف عن التحويل لأن المحدد معدوم (**المصفوفة شاذة**) والمصفوفة لا تملك مقلوب.

ملاحظة:

يفضل التأكد من أن المصفوفة نظامية قبل استخدام طريقة جوردان، لعدم الوقوع بالأخطاء.

مثال(15): أوجد مقلوب المصفوفة A المعرفة بالشكل التالي بطريقة جوردان:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل: نوسع المصفوفة A توسيع أفقي بالمصفوفة الواحدية كما يلي:

$$[A|I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نجري التحويلات على الأسطر فقط لتحويل القسم الأيسر إلى واحدية:

$$\begin{cases} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \end{cases} \qquad [A|I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نستكمل التحويلات بالشكل:

$$\begin{cases} R_1 - 3R_2 \to R_1 \\ R_1 - 3R_3 \to R_1 \end{cases} \qquad [A|I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

وبالتالي المصفوفة تملك مقلوب وهو:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2-4. المصفوفة المتدرجة (المدرجة)

نقول أن المصفوفة $A_{m\times n}$ مدرجة بالنسبة لأسطرها إذا حقق الشروط الآتية:

1. الأسطر الصفرية إن وجدت تقع تحت الأسطر غير الصفرية.
2. أول سطر غير معدوم في الأسطر غير الصفرية من اليسار إلى اليمين يجب أن يساوي الواحد ((وندعوه العنصر الرائد))
3. كل عنصر رائد يقع على يمين العنصر الرائد في السطر الذي يسبقه.

مثال(16): المصفوفة $A_{5\times 4}$ المعرفة بالشكل التالي هي مصفوفة مدرجة:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{5\times 4}$$

مثال(17): المصفوفة $A_{4\times 5}$ المعرفة بالشكل التالي هي مصفوفة مدرجة:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 6 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

ملاحظة: يمكن الحصول من أي مصفوفة على مصفوفة مكافئة مدرجة بإجراء التحويلات الأولية الازمة على أسطرها.

2-5. رتبة المصفوفة *Rank*

نعرف رتبة المصفوفة $A_{m\times n}$ غير الصفرية بأنها مرتبة أكبر محدد غير معتوم يمكن الحصول عليه من المصفوفة أي أنه:

- يوجد محدد من المرتبة $\lambda \times \lambda$ غير معدوم بحيث $\lambda \leq min(m,n)$.
- جميع المحددات من المرتبة $(\lambda+1)\times(\lambda+1)$ أو أعلى معدومة.

وبالتالي فإن رتبة A هي λ ونرمز للرتبة $rank(A) = \lambda$ أو $r(A) = \lambda$.

ملاحظات:

1. رتبة أي مصفوفة A نظامية مربعة من المرتبة $n \times n$ هي $rank(A) = n$.
2. رتبة المصفوفة تسوي رتبة منقولها $rank(A) = rank(A^T)$
3. لا تتغير رتبة المصفوفة عند إجراء تحويلات أولية على أسطرها.

4. لتسهيل الحصول على رتبة لمصفوفة يمكن تحويل المصفوفة إلى **مدرجة** ومن ثم نبحث عن أكبر محدد غير معدوم فيها.

مثال(18): أوجد رتبة المصفوفة A المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2\\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

نحول المصفوفة إلى مدرجة بإجراء التحويلات اللازمة على الأسطر فنجد:

$$A\sim\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & \boxed{1} & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

كما نلاحظ أكبر محدد غير معدوم من المرتبة 3 × 3 وبالتالي: $rank(A)=3$