تمرين(2): أوجد جداء المصفوفتان A,B واذكر نوع المصفوفة الناتجة

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}5 & 9 & -10\\ -3 & 3 & 6\\ 7 & -21 & 28\end{pmatrix}$$

تمرين(3): أذا كان

$$3\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{pmatrix}$$

أوجد x,y,z,w

1-14. قوى مصفوفة

إذا كان لدينا المصفوفة A_n **المربعة** فإننا نسمي الجداء $A.A$ بمربع المصفوفة A ونرمز له A^2 كما نسمي الجداء $A.A.A$ مكعب المصفوفة A ونرمز له A^3 وشكل عام:

$$\underbrace{A.A.A\dots A}_{n\text{ مرة}}=A^n$$

- اصطلاح $A_n^0=I_n$.

مثال(32): ليكن لدينا المصفوفة A من المرتبة 3 والمعرفة بالشكل:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

أوجد A^2 و A^3

الحل:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2.A\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 & 6\\ 2 & 2 & 4\\ 6 & 8 & 8\end{pmatrix}$$

1-15. المصفوفة الخاملة (الجامدة)

نقول أن المصفوفة A خاملة أو جامدة إذا حققت الشرط $A^2=A$

مثال(33): أثبت أن المصفوفة I_3 المعرفة بالشكل التالي هي مصفوفة خاملة:

الحل:

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1-16. مصفوفة المنعدمة القوى

نقول عن المصفوفة المربعة A_n أنها منعدمة القوى إذا وجد عدد طبيعي $\alpha>0$ بحيث $A^\alpha=O_n$

أي كان بالإمكان إيجاد عدد α بحيث نرفع المصفوفة للقوة α فيكون الناتج مصفوفة الصفرية من نفس المرتبة. **ندعو أصغر عدد طبيعي يحقق الشرط العدد برتبة انعدام المصفوفة A**

مثال(34):

أوجد رتبة انعدام المصفوفة A_3 المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

الحل:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_{3\times3}$$

وبالتالي رتبة انعدام المصفوفة هي $\alpha=3$.

17-1. المصفوفة الدورية

نقول أن المصفوفة المربعة A_n دورية إذا وجد عدد طبيعي $\alpha>0$ يحقق $A^\alpha=I_n$ حيث I_n هي المصفوفة الواحدية من نفس المرتبة. **ندعو أصغر عدد طبيعي يحقق الشرط السابق بدور المصفوفة A.**

مثال(35):

أوجد دور المصفوفة A_n المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

الحل:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$
$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$
$$A^4=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

وبالتالي المصفوفة دورية ودورها $\alpha=4$.

1-18. كثيرة حدود مصفوفة

ليكن لدينا المصفوفة المربعة A_n ولتكن $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة m والمعرفة بالصيغة القانونية الآتية:

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث:

$$a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$$

المعاملات العددية لكثيرة الحدود.

ندعو المصفوفة الناتجة عن التركيب الآتي:

$$P(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + a_{m-2}A^{m-2} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

بكثيرة حدود المصفوفة A_n.

وكما نلاحظ أن $P(A)$ هي مصفوفة من نفس مرتبة المصفوفة A_n.

مثال(36):

لتكن لدينا المصفوفة A_2 المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ولتكن كثيرة الحدود $P(x)$ المعرفة بالشكل:

$$P(x) = 3x^2 - 2x + 4$$

والمطلوب أوجد كثيرة حدود المصفوفة A_2

الحل:

كثيرة الحدود المطلوبة تأخذ الشكل:

$$P(A) = 3A^2 - 2A + 4I_2$$

لحسبا كثيرة الحدود يجب حساب المصفوفة A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$P(A) = 3\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = 3\begin{pmatrix} 39 & -9 \\ -12 & 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -15 \\ -20 & 56 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 41 & -15 \\ -20 & 56 \end{pmatrix}$$

1-19. تعريف

نقول أن المصفوفة A_n جذراً (حلاً) لكثيرة الحدود $P(x)$ إذا كان:

$$P(A) = O_{n\times n}$$

مثال(37):

ليكن لدينا المصفوفة A_2 المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ولتكن كثيرة الحدود $P(x)$ المعرفة بالشكل:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$$

والمطلوب بين فيما إذا كانت A_2 جذراً لكثيرة الحدود $P(x)$ أم لا .

الحل:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي كثيرة الحدود:

$$P(A) = A^3 - 3A^2 - 2A + 4I_2$$
$$P(x) = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P(x) = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 & -6 \\ -9 & -21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$$

وبالتالي A_2 ليست جذراً لكثيرة الحدود $P(x)$.

1-20. التحويلات الأولية على المصفوفة

هي عبارة عن عمليات نجريها على المصفوفة لتبسيط وتسهيل التعامل معها وهذه التحويلات تعطي مصفوفة مكافئة للمصفوفة الأصلية، يوجد ثلاث أنواع من التحويلات:

1. التحويل الأول: ضرب أحد أسطر (أعمدة) المصفوفة بمقدار سلمي لا يساوي الصفر ونعبر عن التحويل بالشكل:

$$\lambda R_i \to R_i$$
$$\lambda C_j \to C_j$$

حيث R_i السطر رقم i و C_j العمود رقم j و λ عدد حقيقي.

مثال(38): إذا كان لدينا المصفوفة A المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 15 \\ -1 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

وسوف نجري التحويلين التاليين على التتالي:

$$2R_2 \to R_2$$
$$-3C_3 \to C_3$$

أي ضرب السطر الثاني بالعدد 2 ثم ضرب العمود الثالث بالعدد 3- نجد:

$$\check{A}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 6 & 8 & 30\\ -1 & -7 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\bar{A}}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 6 & 8 & -90\\ -1 & -7 & 3\end{pmatrix}$$

2. التحويل الثاني: إضافة أحد أسطر (أعمدة) المصفوفة إلى سطر (عمود) آخر بعد ضربة بمقدار سلمي لا يساوي الصفر ونعبر عن التحويل بالشكل:

$$R_i+\lambda R_k \rightarrow R_i$$
$$C_j+\lambda C_k \rightarrow C_j$$

مثال(39): إذا كان لدينا المصفوفة A المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

وسوف نجري التحويلين التاليين على التتالي:

$$R_1+2R_2 \rightarrow R_1$$
$$C_2-3C_3 \rightarrow C_2$$

أي ضرب السطر الثاني بـ 2 ثم إضافته للسطر الأول ثم ضرب العمود الثالث بـ 3- ثم إضافته للعمود الثاني نجد:

$$\check{A}=\begin{pmatrix}12 & 9 & 2\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\bar{A}}=\begin{pmatrix}12 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

3. التحويل الثالث: المبادلة بين موضعي سطرين (عمودين) في المصفوفة ونعبر عن التحويل بالشكل:

$$R_i \leftrightarrow R_k$$
$$C_j \leftrightarrow C_k$$

مثال(40): إذا كان لدينا المصفوفة A المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

وسوف نجري التحويلين التاليين على التتالي:

$$R_2 \leftrightarrow R_1$$
$$C_1 \leftrightarrow C_3$$

أي مبادلة السطر الثاني بالسطر الأول ثم مبادلة العمود الأول بالعمود الثالث، نجد:

$$\check{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 6 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\bar{A}}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 6\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ملاحظة: عند إجراء التحويلات على المصفوفة يُفضل إجراء إما على الأسطر فقط أو على الأعمدة فقط.