المحاضرة الثانية على الثالثة +

* ملاحظات :

1- في المصفوفة المتناظرة عكسياً تكون عناصر القطر الرئيسي أصفاراً

2- في جداء المصفوفات إذا كان

$$A.B = B.A$$

فإننا نسمي المصفوفتان متبادلتان

مثال:

- أثبت أنّ المصفوفتان التاليتان متبادلتان حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3-4 & 2-8 \\ 6+0 & -4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3-4 & -6+0 \\ -2+8 & -4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

بما أنّ $A.B = B.A$ فالمصفوفتان A و B متبادلتان

* تمارين :

1- لتكن المصفوفات التالية

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب أوجد كلاً من :

$$-A \ , \ A-B \ , \ A+B-C$$

الحل:

$$-A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-B = A+(-B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A+B-C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين 2 : إذا كان:

$$[a \ \ b \ \ c] + [c \ \ a \ \ b] = [3 \ \ 2 \ \ -1]$$

أوجد قيم a و b و c

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③

الحل :

$$[a+c \quad b+a \quad c+b] = [3 \quad 2 \quad -1]$$

وعليه فإنّ :

$$a+C=3 \quad \cdots ①$$
$$b+a=2 \quad \cdots ②$$
$$c+b=-1 \quad \cdots ③$$

بالحل المشترك

من ①

$$\boxed{a=3-C} \quad \cdots ④$$

من ③

$$\boxed{b=-1-C} \quad \cdots ⑤$$

نعوض ④ ، ⑤ في ② :

$$-1-C+3-C=2$$
$$-2C+2=2 \Rightarrow -2C=0$$
$$\Rightarrow \boxed{C=0}$$

نعوض في ④ $\Leftarrow$ $\boxed{a=3}$

نعوض في ⑤ $\Leftarrow$ $\boxed{b=-1}$

تمرين ③ : أوجد المصفوفة $A=[a_{ij}]_{4\times4}$ حيث :

$$\begin{cases} a_{ij}=2 & \forall \quad i=j \\ a_{ij}=i+2j-1 & ; \quad i\neq j \end{cases}$$

④

الحل :

$$a_{11}=2 \ , \ a_{12}=1+2(2)-1=1+4-1=4$$
$$a_{13}=1+2(3)-1=6 \ , \ a_{14}=1+2(4)-1=8$$
$$a_{21}=2+2(1)-1=3 \ , \ a_{22}=2$$
$$a_{23}=2+2(3)-1=7 \ , \ a_{24}=2+2(4)-1=9$$
$$a_{31}=3+2(1)-1=4 \ , \ a_{32}=3+2(2)-1=6$$
$$a_{33}=2 \ , \ a_{34}=3+2(4)-1=10$$
$$a_{41}=4+2(1)-1=5 \ , \ a_{42}=4+2(2)-1=7$$
$$a_{43}=4+2(3)-1=9 \ , \ a_{44}=2$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤

تمرين 4: أوجد ناتج جداء المصفوفتين A , B واذكر نوع المصفوفة الناتجة حيث:

$$A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5 & 9 & -10\\ -3 & 3 & 6\\ 7 & -21 & 28\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A.B=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 9 & -10\\ -3 & 3 & 6\\ 7 & -21 & 28\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}25+3+14 & 45-3-42 & -50-6+56\\ 15-15+0 & 27+15+0 & -30+30+0\\ 5-12+7 & 9+12-21 & -10+24+28\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}42 & 0 & 0\\ 0 & 42 & 0\\ 0 & 0 & 42\end{bmatrix}$$

والمصفوفة الناتجة سلّمية

تمرين 5: إذا كان:

$$3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$$

أوجد x, y, z, w

الحل:

$$\begin{bmatrix}3x & 3y\\ 3z & 3w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+4 & 6+x+y\\ -1+z+w & 2w+3\end{bmatrix}$$

⑥

وبالتالي فإنّ:

$$3x=x+4 \quad \cdots ①$$

$$3y=6+x+y \quad \cdots ②$$

$$3z=-1+z+w \quad \cdots ③$$

$$3w=2w+3 \quad \cdots ④$$

من ①

$$3x-x=4 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

من ②

$$3y-y=6+2 \Rightarrow 2y=8 \Rightarrow \boxed{y=4}$$

من ④

$$3w-2w=3 \Rightarrow \boxed{w=3}$$

من ③

$$3z-z=-1+3 \Rightarrow 2z=2 \Rightarrow \boxed{z=1}$$

---

* **أثر مصفوفة مربعة:** $Tr(A)$

نعرّف أثر المصفوفة A بأنّه مجموع عناصر القطر الرئيسي ونرمز له بـ $\boxed{Tr(A)}$

مثال: أوجد أثر المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 7\\ 3 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$Tr(B)=-1+1+8=8$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خواص أثر مصفوفة:

1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
2. $Tr(k.A) = k.Tr(A)\ ;\ k \in \mathbb{R}$
3. $Tr(A.B) = Tr(B.A)$

مثال: لتكن المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب

1- أوجد $A+B$, $A.B$, $Tr(A)$, $Tr(B)$, $Tr(A+B)$

2- إذا كانت X مصفوفة مجاهيل بالشكل

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

فأوجد حل المعادلة: $A + X = B$

الحل:

①

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & 0+4 \\ -1-1 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Tr(A) = 3+1 = 4$$

$$Tr(B) = 1+2 = 3$$

$$Tr(A+B) = 4+3 = 7$$

-2

$$A + X = B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+x_{11} & 2+x_{12} \\ -1+x_{21} & 1+x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$3 + x_{11} = 1 \Rightarrow x_{11} = 1-3 \Rightarrow \boxed{x_{11} = -2}$

$2 + x_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{x_{12} = -2}$

$-1 + x_{21} = -1 \Rightarrow x_{21} = -1+1 \Rightarrow \boxed{x_{21} = 0}$

$1 + x_{22} = 2 \Rightarrow x_{22} = 2-1 \Rightarrow \boxed{x_{22} = 1}$

وبالتالي فإن

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين: عين المصفوفة B من المرتبة 2×2 والتي تحقق المعادلة الآتية

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإنّ

$$\begin{bmatrix} 6b_{11}+5b_{21} & 6b_{12}+5b_{22} \\ 5b_{11}+6b_{21} & 5b_{12}+6b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإنّه حسب تساوي مصفوفتين

$$6b_{11} + 5b_{21} = 11 \quad \cdots ①$$

$$6b_{12} + 5b_{22} = 0 \quad \cdots ②$$

$$5b_{11} + 6b_{21} = 0 \quad \cdots ③$$

$$5b_{12} + 6b_{22} = 11 \quad \cdots ④$$

من ② نجد

$$\boxed{b_{22} = -\frac{6}{5} b_{12}}$$

نعوض في ④

$$5b_{12} + 6\left(-\frac{6}{5} b_{12}\right) = 11$$

$$25 b_{12} - 36 b_{12} = 55$$

$$-11 b_{12} = 55 \Rightarrow \boxed{b_{12} = -5}$$

$$\Rightarrow b_{22} = -\frac{6}{5}(-5) \Rightarrow \boxed{b_{22} = 6}$$

من ③

$$\boxed{b_{11} = -\frac{6}{5} b_{21}}$$

نعوض في ①

$$6\left(-\frac{6}{5} b_{21}\right) + 5b_{21} = 11$$

$$-36 b_{21} + 25 b_{21} = 55$$

$$-11 b_{21} = 55 \Rightarrow \boxed{b_{21} = -5}$$

$$\Rightarrow b_{11} = -\frac{6}{5}(-5) \Rightarrow \boxed{b_{11} = 6}$$

وبالتالي فالمصفوفة B هي

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

تمرين 2: حل المعادلة التالية

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(11)

الحل:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x-3y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2x - 3y = 1 \quad \cdots ①$$

$$x + y = 3 \quad \cdots ②$$

من ②

$$\boxed{x = 3 - y} \quad \cdots ③$$

نعوض في ①

$$2(3-y) - 3y = 1$$

$$\Rightarrow 6 - 2y - 3y = 1$$

$$\Rightarrow -5y = -5 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

نعوض في ③

$$x = 3 - 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

تمرين: مثل كلاً من المصفوفات التالية على شكل مجموع مصفوفتين إحداهما متناظرة والأخرى متناظرة عكسياً

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(12)

الحل:

$$A = S + k$$

متناظرة $$S = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

متناظرة عكسياً $$k = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن المصفوفة A تكتب بالشكل

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

↓ متناظرة

↓ متناظرة عكسياً

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(13)

$$B = S + k$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 9/2 & 3 \\ 9/2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & -2 \\ -5/2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن المصفوفة B تكتب بالشكل

(14)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 9/2 & 3 \\ 9/2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & -2 \\ -5/2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

متناظرة — متناظرة عكسياً

* **قوى المصفوفة:** لتكن A مصفوفة مربعة نسمي الجداء

$A.A = A^2$ مجموع المصفوفة A

$A.A.A = A^3$ مكعب المصفوفة A

وبصورة عامة فإن

$$\underbrace{A.A.A.\ldots.A}_{n \text{ مرة}} = A^n$$

* **ملاحظة:**

$A^0 = I$

حيث I هي المصفوفة الواحدية

* **تمرين:** إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فأثبت أن

$$A^2 - 4A - 5I_3 = O_3$$

الحل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$A^2=\begin{bmatrix}1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2\\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2\\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد :

$$A^2-4A-5I=\begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$-5\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -8 & -8\\ -8 & -4 & -8\\ -8 & -8 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9-4-5 & 8-8+0 & 8-8+0\\ 8-8+0 & 9-4-5 & 8-8+0\\ 8-8+0 & 8-8+0 & 9-4-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=O_3$$

* المصفوفة الخاملة «الجامدة» : نقول عن المصفوفة المربعة A أنها خاملة إذا حققت

$$A^2=A$$

---

* المصفوفة المنعدمة القوى : نقول عن المصفوفة المربعة A أنها منعدمة القوى إذا حققت

$$A^n=O$$ ← المصفوفة الصفرية

حيث $n>0$ وندعو n رتبة الإنعدام

مثال: لتكن المصفوفة :

$$B=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

أوجد رتبة انعدام المصفوفة B ؟

الحل :

$$B^2=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+3-4 & -3-9+12 & -4-12+16\\ -1-3+4 & 3+9-12 & 4+12-16\\ 1+3-4 & -3-9+12 & -4-12+16\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن المصفوفة B منعدمة القوى ورتبة انعدامها

$$n=2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* **المصفوفة الدورية** : نقول عن المصفوفة المربعة A أنّها دورية إذا تحقق

$$A^P = I$$ ← المصفوفة الواحدية

وندعو P بدور المصفوفة A.

مثال: أثبت أنّ المصفوفة A دورية وعين دورها

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

وبالتالي فالمصفوفة A دورية

ودورها $\boxed{P = 4}$

* **كثيرة حدود مصفوفة** :

لتكن المصفوفة المربعة A من المرتبة n ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود اختيارية من الدرجة m حيث

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ المعاملات العددية

نسمي التركيب

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

بكثيرة حدود المصفوفة A

- نقول عن المصفوفة المربعة A التي تحقق $\boxed{f(A) = O_n}$ بأنّها جذر لكثيرة الحدود $f(x)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

وكان $P(x)=2x^3-4x+5$

عندئذٍ أوجد A^2 ، A^3 ثم عين قيمة $P(A)$

الحل:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 30\\ 60 & 67\end{bmatrix}$$

$$P(A)=2A^3-4A+5I$$

$$=2\begin{bmatrix}-7 & 30\\ 60 & 67\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-14 & 60\\ 120 & 134\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -8\\ -16 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-13 & 52\\ 104 & 151\end{bmatrix}$$

تمارين وظيفة:

تمرين 1: إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

عندئذٍ أوجد المصفوفة B التي تحقق أنّ $A.B=I_2$

تمرين 2: إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 7 & 5\end{bmatrix}$

عندئذٍ عين قيم الأعداد x و y التي يتحقق من أجلها أنّ

$$A^2+xI_2=yA$$

تمرين 3: إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

عندئذٍ أوجد كلاً من المصفوفتين $A.B$ و $B.A$

تمرين 4: عين المصفوفة A التي تحقق المعادلة التالية

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}\cdot A=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & -8 & -10\\ 1 & -2 & -5\\ 9 & 22 & 15\end{bmatrix}}_{C}$$

تمرين 5: اكتب المصفوفة C على شكل مجموع مصفوفتين إحداهما متناظرة والأخرى متناظرة معكوسياً

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* التحويلات الأولية على المصفوفة :

1- التحويل الأول :

- ضرب أحد أسطر المصفوفة بعدد سلمي مغاير للصفر

$$bR_i \longrightarrow R_i$$

ضرب أحد أعمدة المصفوفة بعدد سلمي مغاير للصفر

$$bC_j \longrightarrow C_j$$

2- التحويل الثاني :

- إضافة أحد أسطر المصفوفة إلى سطر آخر بعد ضربه بعدد سلمي مغاير للصفر

$$R_i + bR_k \longrightarrow R_i$$

- إضافة أحد أعمدة المصفوفة إلى عمود آخر بعد ضربه بعدد سلمي مغاير للصفر

$$C_j + bC_d \longrightarrow C_j$$

3- التحويل الثالث :

- المبادلة بين سطرين

$$R_i \longleftrightarrow R_k$$

- المبادلة بين عمودين

$$C_j \longleftrightarrow C_d$$

* **ملاحظة** : تفيد التحويلات الأولية على المصفوفة بتحويلها إلى مصفوفة مثلثية عُليا حيث يجب أن يكون $\boxed{a_{11}=1}$ ← العنصر الرائد

مثال : حول المصفوفة A المعطاة إلى مصفوفة مثلثية عُليا

$$A=\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$R_1+R_2\longrightarrow R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$-2R_1+R_3\longrightarrow R_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{5}R_2\longrightarrow R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 9/5 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2+R_3\longrightarrow R_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 9/5 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* المحددات *

- المحدد للمصفوفة المربعة: نعرّف محدد المصفوفة المربعة $A_{n\times n}$ بأنّه عدد حقيقي ناتج عن عمليات حسابية محددة على عناصر تلك المصفوفة ورمزه

$$\det(A) \ , \ |A| \ , \ \Delta$$

* حساب محدد مصفوفة مربعة من الرتبة 2x2:

لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\times a_{22} - a_{12}\times a_{21}$$

- أي محدد المصفوفة A هو ناتج طرح حداء عناصر القطر الثانوي من حداء عناصر القطر الرئيسي

مثال:

احسب محدد المصفوفة A المعطاة

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-3)(-1)-(2)(4)$$

$$= 3-8=-5$$

* حساب محدد مصفوفة مربعة من الرتبة 3x3: لدينا طريقتين:

1- طريقة لابلاس:

لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

- لحساب محدد A بطريقة لابلاس كالتالي:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

مثال:

- احسب محدد المصفوفة A المعطاة بطريقة لابلاس:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & +5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* الحل:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad (+ \; - \; +)$$

$$= -1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1\left[(4)(-2) - (-1)(3)\right] - 2\left[(3)(-2) - (-1)(2)\right]$$

$$+ 5\left[(3)(3) - (4)(2)\right]$$

$$= -(-8+3) - 2(-6+2) + 5(9-8)$$

$$= 5 + 8 + 5 = 18$$

2- طريقة ساروس:

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- لحساب محدد المصفوفة بطريقة ساروس كالتالي:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- الخطوات:

1- نكرر أول عمودين على يمين المحدد

2- نوجد مجموع جداء عناصر الأقطار الرئيسية

3- نوجد مجموع جداء عناصر الأقطار الثانوية

4- نطرح مجموع جداء عناصر الأقطار الثانوية من مجموع جداء عناصر الأقطار الرئيسية

مثال: احسب قيمة محدد المصفوفة A بطريقة ساروس

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[(-1)(4)(-2) + (2)(-1)(2) + (5)(3)(3)\right]$$

$$- \left[(5)(4)(2) + (-1)(-1)(3) + (2)(3)(-2)\right]$$

$$= \left[8 - 4 + 45\right] - \left[40 + 3 - 12\right]$$

$$= 49 - 31 = 18$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* صغير مصفوفة:

لتكن المصفوفة A مربعة من المرتبة $n \times n$
نعرّف صغير العنصر a_{ij} بالمصفوفة A بأنّه محدد المصفوفة الناتجة عن حذف السطر i والعمود j من المصفوفة A ونرمز له بـ Δ_{ij}

* ملاحظة: عدد صغار المصفوفة = عدد عناصر المصفوفة

* المتمم الجبري:

لتكن المصفوفة المربعة A من المرتبة $n \times n$
نعرّف المتمم الجبري للعنصر a_{ij} في المصفوفة A بالشكل:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$$

* حساب محدد مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$:

يحسب بالعلاقة:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

يستخدم لحساب محدد مصفوفة من المرتبة 4×4 وما فوق

حيث a_{ij} العنصر في السطر رقم i والعمود رقم j

A_{ij} هو المتمم الجبري لذلك العنصر

* أهم *

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner