طلاب السنة الأولى ميكانيك كهرباء / رياضيات 1

الفصل الأول

المصفوفات والمحددات – حل جملة معادلات خطية

سندرسُ في هذا الفصل، المصفوفات وبعض العمليّات على المصفوفات والمحددات، وأهمّ خواص المحددات، واستخدام المحددات في حل جملة معادلات خطية. متوخّين بذلكَ السّهولة.

1-1 المصفوفات والعمليات عليها

1-1-1 تعريف:

المصفوفة من الشكل $m\times n$ ، هي جدولٌ محاط بقوسين متوسطين من العناصر المرتبة والمتوضّعة بداخله، مؤلّف من m سطر وn عمود، على النّحو:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}1)$$

يُرمز اختصاراً للمصفوفة (1-1) بـــ $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، ويُرمز عادةً للمصفوفات بأحرفٍ كبيرة $A, B, C, \ldots$

تحوي المصفوفة (1-1)، m سطراً وn عموداً، وبالتالي عددُ عناصرها يساوي $m\times n$. يسمّى هذا العدد سعة المصفوفة، أو مرتبة المصفوفة.

إنّ كلّ عنصر a_{ij} ، من عناصر المصفوفة (1-1)، يقع على تقاطع السطر i والعمود j، ولهذا رمزنا لكل عنصر من عناصر المصفوفة بـــ a_{ij} ، حيثُ الدليل الأول i يشير إلى رقم السطر، بينما الثاني j ، فيشيرُ إلى رقم العمود، وعلى سبيل المثال فإنّ العنصر a_{23} يقع في السطر الثاني والعمودُ الثالث.

إنّ السطر i ، في المصفوفة $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، هو $\left[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right]; 1\le i\le m$ ، بينما العمود في المصفوفة ذاتها، هو:

1

نُسمّي مجموعة عناصر المصفوفة المربعة $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$، حيث: $i=j\,;\,i,j=1,2,\ldots,n$ عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A.

وبحالة خاصة: إذا كان: $m\neq n, n\neq 1$، وكان: $m=1$، عندها تسمّى المصفوفة المستطيلة مصفوفة سطر (أو متجه سطري)، ونرمز لها بـ $A=\left[a_{ij}\right]_{1\times n}$، أمّا إذا كان $m\neq 1\,,\,n=1$ ، عندها نسمي المصفوفة المستطيلة مصفوفة عمود (أو متجه العمود)، ونكتب: $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times 1}$.

1-2-2 المصفوفة المتناظرة والمتناظرة تخالفياً:

لتكن $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ مصفوفة مربعة من المرتبة n. نسمي A مصفوفة متناظرة إذا كان:

$$a_{ij}=a_{ji}\quad;\quad\forall\, i,j$$

واضح أن منقول المصفوفة المتناظرة، هو المصفوفة ذاتها؛ أي:

$$A \text{ متناظرة } \Leftrightarrow A^{T}=A \Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}\;;\;\forall i \qquad (2\text{-}1)$$

نسمي المصفوفة A مصفوفة متناظرة تخالفياً، إذا كان:

$$a_{ij}=-a_{ij}\quad;\quad\forall\, i,j$$

واضحٌ أنّ عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة المتناظرة تخالفياً تساوي الصفر، وأنّ مَنْقول المصفوفة المتناظرة تخالفياً، يساوي نظير المصفوفة.

$$A \text{ متناظرة تخالفياً } \Leftrightarrow A^{T}=-A \Leftrightarrow a_{ij}=-a_{ij}\;;\;\forall i,j=1,..,n \qquad (3\text{-}1)$$

• مثال: إنّ المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

متناظرة، والمصفوفة:

$$B=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ -3 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}.$$

متناظرة تخالفياً.

3

1-2-5 المصفوفة السلمية:

هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي متساوية: أي:

$$a_{ij}=\begin{cases}0 & ; \quad i\neq j \\ a_{ii}=\lambda\neq 0 & ; \quad i=j\end{cases} \qquad (4\text{-}1)$$

• مثال: إنّ المصفوفة:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{n,n}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda\neq 0$$

مصفوفة سُلّمية.

1-2-6 المصفوفة الواحدية:

هي مصفوفة سلمية فيها $\lambda=1$، ويُرمز للمصفوفة الواحدية من المرتبة n بـ I_n ونكتب $I_n=\left[\delta_{ij}\right]_{(n)}$، حيث يسمّى الرمز δ_{ij} بـ (دلتا كرونيكر) وتعرف بالشكل:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ; \quad i=j \\ 0 & ; \quad i\neq j\end{cases} \qquad (5\text{-}1)$$

1-2-7 المصفوفة الصفرية:

نقول عن المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$، إنها مصفوفة صفرية، إذا كان:

$$a_{ij}=0 \; ; \; \forall\, i=1,\dots,m \; ; \; j=1,\dots,n$$

ويرمز للمصفوفة الصفرية من الشكل m.n بـ $O_{(m,n)}$، أو بـ O إذا لم يكن هناك أي التباس.

5

$$\left(A^{t}\right)^{T}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 5 & 0 & -3\end{bmatrix}=A$$

3-3-1 نتائج:

1- إنّ منقول مصفوفة العمود هو مصفوفة سطر، ومنقول مصفوفة السطر هو مصفوفة عمود.

2- إنّ منقول المصفوفة المتناظرة A يساوي المصفوفة ذاتها، أي أنّ: $A^{T}=A$.
كما أن منقول المصفوفة المتناظرة تخالفياً B ، هو المصفوفة B ذاتها مسبوقة بإشارة (-)، أي أن: $B^{T}=-B$.

3- إنّ منقول المصفوفة المثلثية العليا، هو مصفوفة مثلثية سفلى، والعكس بالعكس.

4- إنّ منقول المصفوفة المثلثية القطرية، هو مصفوفة قطرية تساوي المصفوفة الأساسية.

5- منقول المصفوفة الواحدية، هو المصفوفة الواحدية ذاتها، كذلك منقول المصفوفة الصفرية هو مصفوفة صفرية أيضاً.

• أمثلة:

$$A=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -3\end{bmatrix}\qquad \Rightarrow A^{T}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}\qquad \Rightarrow B^{T}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}=B$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & 2 & -3\\ -2 & 0 & 4\\ 3 & -4 & 0\end{bmatrix}\qquad \Rightarrow C^{T}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -4\\ -3 & -4 & 0\end{bmatrix}=-C$$

$$D=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \Rightarrow D^{T}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

7

$$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n} \qquad (9\text{-}1)$$

نشير هنا إلى أنه، لا يمكن جمع مصفوفتين إلا إذا كان لهما الشكل نفسه.

• **مثال:**

لتكن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

عندئذٍ:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -3+3 & 1+2 \\ 3+1 & -1+2 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

استناداً إلى التعريف السابق وإلى خواص الأعداد الحقيقية، يمكن التأكّد ببساطة من صحة الخواص الآتية:

• **خواص عملية جمع المصفوفات:**

بفرض C, B, A ثلاث مصفوفات من الشكل $m \times n$، عندئذٍ:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ A + B = B + A \\
&(2)\ \ A + (B + C) = (A + B) + C \\
&(3)\ \ \forall\ A\ ;\ \exists\ O_{m\times n}\ ;\ \ A + O_{m\times n} = A \\
&(4)\ \ \forall\ A\ ;\ \exists\ -A\ ;\ \ A + (-A) = O_{m\times n}
\end{aligned} \qquad (10\text{-}1)$$

حيث $O_{m\times n}$ المصفوفة الصفرية من الشكل $m \times n$.

2-4-1 جداء مصفوفة بعدد وخواص جداء مصفوفة بعدد:

لتكن $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة من الشكل $m \times n$، وليكن α عدداً حقيقياً.

إنّ جداء المصفوفة A بالعدد α، هو مصفوفة $B = [b_{ij}]$ من نفس الشكل $m \times n$، يرمز له بـــ αA، وعناصرها معرفة على النحو: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

أي أن، عناصر المصفوفة αA تنتج عن ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة المعطاة بالمقدار α.

$$\alpha [a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n} \qquad (11\text{-}1)$$

9

أي أن، حاصل طرح المصفوفة B من المصفوفة A ، هو مصفوفة ناتجة عن حاصل جمع المصفوفة A مع معكوس المصفوفة B ، وعناصرها هي حاصل طرح العناصر المتقابلة في المصفوفتين.

$$C = A + (-B) = A - B \Leftrightarrow \left[c_{ij}\right]_{m \times n} = \left[a_{ij} - b_{ij}\right] \qquad (14\text{-}1)$$

ينتج من تعريف المصفوفة المتناظرة تخالفياً ، أن الفرق بين أي مصفوفة مربعة ومنقولها هو مصفوفة متناظرة تخالفياً.

• مثال:

لتكن لدينا المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

والمطلوب، أوجد المصفوفات:

$$A+B \; ; \; A-B \; , \; A^T + B^T \; , \; (A+B)^T \; , \; (A-B)^T \; , \; 2A - 3B$$

- الحل: لدينا،

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 \\ -1+1 & 1-4 \\ 4+3 & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^T + B^T = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} = (A+B)^T$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-B)^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} = A^T - B^T$$

11

- الحل:

نلاحظ أنّ الجداء $A \times B$ معرّفاً، لأنّ عدد الأعمدة في المصفوفة A يساوي عدد الأسطر المصفوفة في B ويساوي 2.

في حين أنّ الجداء $B \times A$ غير معرّف، لأنّ عدد الأعمدة في المصفوفة B يساوي 2 وعدد الأسطر في المصفوفة A يساوي 3.

لدينا:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times2)+(2\times0) & (1\times1)+(2\times1) \\ (3\times2)+(0\times0) & (3\times1)+(0\times1) \\ (1\times2)+(0\times0) & (1\times1)+(0\times1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

• **مثال (2):**

لتكن لدينا المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: أثبت أنّ الجداءين $A \times B$، والجداء $B \times A$ معرّفان. هل A،B متبادلتان؟

نلاحظ أنّ: $A \times B \ , \ B \times A$ معرّفان، وذلك لأنّ كلّ من A،B مصفوفة مربعة من المرتبة الثانية.

لدينا:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنّ $A \times B \neq B \times A$ ، أي أن: B , A غير متبادلتين.

ونقول هنا إنّ، عملية جداء المصفوفات عملية غير تبديلية في الحالة العامة.

بينما المصفوفتان:

13

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

والمطلوب: احسب A^2 ، ثم احسب A^m (m عدد صحيح موجب).

– الحل: لدينا:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

إذا كان m عدد صحيح زوجي، فإنّ: $A^m=A^{2k}=\left(A^2\right)^k=I_2$.

أمّا إذا كان m عدد صحيح فردي، فإنّ: $A^m=A^{2k+1}=A^{2k}\times A=I_2\times A=A$.

6-1 المحددات (المعينات)

لقد وجدنا عند دراسة المصفوفات أن تصنيفها يرتبط بسعتها وبطبيعة عناصرها، وسنقوم بتعريف مفهوم جديد يرتبط ارتباطاً وثيقاً بالمصفوفات، ويلعب دوراً هاماً بتصنيفها، وهذا ما سنُسميّه المحدّد. سنتعرّف أيضاً على خواص المحددات التي لها دورها في إيجاد حل جملة المعادلات الخطية.

1-6-1 مفهوم المحدد من المرتبة n:

نعرّف المحدد من المرتبة n بأنّه، مربع مؤلف من $n\times n$ عنصراً، مرتبة في n سطراً وn عموداً ومحاطة بمستقيمين شاقوليين، ونرمز له عادةً بـــ Δ_n، ونكتب ذلك كما يلي:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \qquad (19\text{-}1)$$

ويرتبط مفهوم المعين ارتباطاً وثيقاً بمفهوم المصفوفة المربعة من المرتبة n، حيث أنّه يُقابل كلّ مصفوفة مربعة من المرتبة n ،مثل $A=\left[a_{ij}\right]_{(n\times n)}$ ، معين Δ من المرتبة n ، يعطى بالعلاقة (1-19).

ونقول إنّ، Δ هو محدد المصفوفة A ، ويرمز له في هذه الحالة بـــ $|A|$ ، أو $\det A$.

15

الطريقة الأولى: طريقة ساريوس:

للحصول على منشور المحدد (12-1) وفق طريقة ساريوس، نضيف إلى يمين هذا المحدد العمودين الأول والثاني على الترتيب، فنحصل على جدول مرتب من العناصر موزعة على ثلاثة أسطر وخمسة أعمدة. نأخذ جداء عناصر القطر الرئيسي ونضيفه إلى مجموع جداءي عناصر كل من الموازيين للقطر الرئيسي، فنحصل على ثلاثة حدود مسبوقة بإشارة (+)، ثم نأخذ جداء عناصر القطر الثانوي ونضيفه إلى مجموع جداءي عناصر كلّ من الموازيين للقطر الثانوي، فنحصل على ثلاثة حدود أخرى تُسبقها بإشارة(−).

إنّ المجموع الجبري لهذه الحدود الستة هو منشور المحدد ذي المرتبة الثالثة. انظر المخطط الملحق:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

أي أنّ:

$$|A| = \left[\left(a_{11}a_{22}a_{33}\right)+\left(a_{12}a_{23}a_{31}\right)+\left(a_{13}a_{21}a_{32}\right)\right] - \\ -\left[\left(a_{13}a_{22}a_{31}\right)+\left(a_{11}a_{23}a_{32}\right)+\left(a_{12}a_{21}a_{33}\right)\right] \qquad (22\text{-}1)$$

الطريقة الثانية: طريقة لابلاس:

إنّ نشر المحدد من المرتبة الثالثة بطريقة لابلاس، يتمّ بدلالة نشر ثلاثة محددات من المرتبة الثانية، كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (23\text{-}1)$$

$$a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ونقول من هذه الحالة، إن المحدد منشور بدلالة عناصر السطر الأول، ونلاحظ أن كل حد من هذا المنشور هو عبارة عن حاصل جداء كل عنصر من عناصر السطر الأول

17

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij} \qquad (24\text{-}1)$$

• مثال:

لتكن: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ ، إنّ صغير العنصر $a_{12} = 4$ ، هو:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

ومتممه الجبري هو : $A_{12} = (-1)^{1+2}(-3) = -(-3) = +3$

استناداً إلى تعريف الصغير والمتمم الجبري، نكتب منشور محدد من المرتبة n . من خلال المبرهنة الآتية التي نقبلها دون برهان.

5-6-1 مبرهنة (مفكوك المحدد من المرتبة n):

إنّ معين المصفوفة المربعة $A = \left[a_{ij}\right]_{(n\times n)}$ ، يساوي مجموع جداءات عناصر أحد أسطر (أعمدة) المصفوفة بالمتممات الجبرية لهذه العناصر، أي أنّ:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \qquad (25\text{-}1)$$

إنّ العلاقة السابقة هي منشور المحدد $|A|$ وفق عناصر السطر ذي الرقم i ، كذلك:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (25\text{-}1)^*$$

وهذا هو منشور المحدد $|A|$ وفق عناصر العمود ذي الرقم j .

نلاحظ أنه، أياً من المتممات الجبرية الواردة في العلاقة (25-1) أو العلاقة *(25-1) هو محدد من المرتبة (n-1)، أي أنّنا حصلنا على منشور المحدد من المرتبة n على n محدداً من المرتبة (n-1).

• مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

من هنا نستنتج أنّ محدد المصفوفة الواحدية يساوي الواحد.

- الخاصة الرابعة:

إذا تماثل (تساوى) سطران في المصفوفة المربعة A ،كان محددها معدوماً، أي:

$$|A| = 0$$

- الخاصة الخامسة:

إذا تناسب سطران في المصفوفة المربعة A ، كان معينها معدوماً، أي:

$$|A| = 0$$

- الخاصة السادسة:

إذا بادلنا في المصفوفة المربعة A ، بين موضعي سطرين، مع المحافظة على وضع باقي الأسطر، تتغيّر إشارة المعيّن فقط.

- الخاصة السابعة:

إذا ضربنا جميع عناصر الأسطر في المصفوفة المربعة، بمقدار ثابت λ، فإنّ محدد المصفوفة الناتجة، يساوي محدد المصفوفة A مضروباً بهذا المقدار الثابت λ.

- الخاصة الثامنة:

إذا أضفنا إلى عناصر أحد الأسطر في مصفوفة مربعة، العناصر المقابلة في سطر آخر بعد ضربها بثابت ما c، فإنّ قيمة محدّد هذه المصفوفة لا تتغيّر.

- الخاصة التاسعة:

إذا كان كل عنصر من عناصر السطر الذي رقمه (k)، في مصفوفة مربعة A ، من المرتبة n مجموع P حداً، أي إذا كان:

$$a_{kj} = a_{k_1j} + a_{k_2j} + \dots + a_{k_pj} \qquad (25\text{-}1)$$

فإنّ محدد هذه المصفوفة، يكتب على شكل مجموع P محدداً لمصفوفة مربعة، $A_1, A_2, \dots, A_P$ ، حيث عناصر السطر الذي رقمه (k) في A_1 هي الحدود الأولى في العلاقة (25-1)، وعناصر السطر الذي رقمه (k) في A_2 هي الحدود الثانية في نفس

21

$$\Delta=\begin{vmatrix}3+(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\end{vmatrix}$$
$$=\left[3+(n-1)\right]\times 2^{n-1}$$
$$=(2+n)\times 2^{n-1}$$

واستناداً إلى الخاصة الثامنة، يمكننا جعل جميع عناصر أحد الأسطر (الأعمدة) في محدد ما أصفاراً عدا عنصراً منها، عندئذٍ منشور هذا المحدد يساوي حاصل جداء هذا العنصر بالمتمم الجبري له، استناداً إلى المبرهنة (1-6-5):

• مثال:

احسب قيمة المحدد:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 5 & -3 & -2\\ -2 & -3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2 & 2\\ -1 & -6 & 4 & 3\end{vmatrix}$$

– الحل:

نُضيف السطر الثاني إلى السطر الأول، والسطر الثالث إلى الرابع، وأخيراً نضرب السطر الثالث بـــ 2 ونجمعه إلى الثاني ، فنجد:

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 2 & -1 & -7\\ 0 & 3 & -2 & -1\\ 1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 2 & 5\end{vmatrix}$$

ننشر المحدد $|A|$ وفق عناصر العمود الأول، فنجد:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -7\\ 3 & -2 & -1\\ -3 & 2 & 5\end{vmatrix}$$

23

1-7-3 المصفوفة المساعدة لمصفوفة مربعة:

لتكن: $A=\left[a_{ij}\right]_{(n\times n)}$ مصفوفة مربعة من المرتبة n. المصفوفة المساعدة للمصفوفة A هي مصفوفة مربعة من نفس المرتبة n ، يرمز لها بـــ $\Gamma(A)$ ، وتعرّف كما يلي:

$$\Gamma(A)=\left[A_{ij}\right]^{T}=\left[A_{ji}\right] \qquad (1\text{-}29)$$

أي أنّ المصفوفة المساعدة $\Gamma(A)$ للمصفوفة A ، هي منقول المصفوفة المؤلفة من المتممات الجبرية لعناصر المصفوفة A. ونكتب:

$$\Gamma(A)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots\ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}30)$$

• مثال:

أوجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

– الحل: لدينا،

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1 \quad ; \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1 \quad ; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2 \quad ; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3 \quad ; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=5$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$$

نعوض في العلاقة (1-30) ، فنجد:

والمصفوفة المساعدة (فقد حُسبت في مثال سابق)، وهي:

$$\Gamma(A)=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ -3 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

نعوّض في العلاقة (1-33) ، نجد أنّ:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ -3 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

1-7-5 خواص مقلوب مصفوفة:

1- مقلوب جداء عدة مصفوفات مربعة نظامية من نفس المرتبة يساوي جداء مقلوباتها بترتيب معاكس:

$$(A\times B\times C)^{-1}=C^{-1}\times B^{-1}\times A^{-1}$$

2- مقلوب منقول مصفوفة مربعة نظامية A، يساوي منقول مقلوبها:

$$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$$

3- مقلوب مقلوب المصفوفة A يساوي المصفوفة ذاتها:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$$

4- مقلوب المصفوفة I_n هو المصفوفة I_n:

$$\left(I_n\right)^{-1}=I_n$$

5- مقلوب المصفوفة:

$$\begin{bmatrix}a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1/a_1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/a_n\end{vmatrix}$$

27

إن حل الجملة الخطية (35-1) هي جملة الأعداد $s_1 , s_2 , \dots , s_n$ التي تتحقق من أجلها أية معادلة في الجملة (35-1) وذلك بعد التعويض فيها كما يلي :

$$x_1 = s_1 \ , \ x_2 = s_2 \ , \ \dots \ , \ x_n = s_n$$

2-8-1 تعريف:

تسمى جملة المعادلات الخطية (35-1) **جملة غير مشتركة** إذا كانت لا تملك حلاً، وتسمى **جملة مشتركة** إذا كانت تملك حلاً واحداً على الأقل.

3-8-1 تعريف:

نقول عن الجملة الخطية (35-1)، إنها **جملة متجانسة**، إذا كان:

$$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$$

يسمى الحل: $x_1' , x_2 , \dots , x_n = 0$ للجملة المتجانسة، **الحل الصفري أو الحل التافه**، وإذا لم تكن جميع قيم $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ أصفاراً، فإنّ الحل يسمى حلاً غير تافه.

لتكن:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \dots + c_{rn}x_n &= d_r \end{aligned} \qquad (36\text{-}1)$$

جملة خطية ثانية مكونة من r معادلة خطية بـ n مجهول .

نقول عن الجملتين الخطيتين (35-1) و (36-1) إنهما **متكافئتان**، إذا كانت لهما مجموعة الحلول نفسها .

- **مثال (1):** تملك الجملة الخطية:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -7 \\ 2x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

حلاً وحيداً ، هو $x_1 = 2 \ , \ x_2 = 3$.

هو الحل الوحيد للجملة الخطية المعطاة .

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = 2$$

• مثال (3) : لتكن الجملة الخطية :

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -7 \\ 3x_1 - 9x_2 &= 7 \end{aligned}$$

لحذف x_1 من المعادلة الثانية، نضرب المعادلة الأولى بـ -3، ونضيفها للمعادلة الثانية، فنحصل على المعادلة المستحيلة $0 = 28$. ومن ثمّ فإنّ الجملة السابقة لا تملك حلاً، وبالتالي فهي جملة غير مشتركة .

• مثال (4) : لتكن الجملة الخطية :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned} \tag{37-1}$$

لحذف x_1 ، نضرب المعادلة الأولى من الجملة السابقة بـ -2 ، ونضيفها للمعادلة الثانية. كما نضرب المعادلة الأولى بـ -3 ونضيفها للمعادلة الثالثة، فنحصل على الجملة الخطية الآتية :

$$\begin{aligned} -7x_2 - 4x_3 &= 2 \\ -5x_2 - 10x_3 &= -20 \end{aligned}$$

إن هذه الجملة مكونة من معادلتين ومجهولين x_2 , x_3 . نضرب المعادلة الثانية في هذه الجملة بـ $\left(-\frac{1}{5}\right)$ فنحصل على الجملة :

$$\begin{aligned} -7x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

والتي بالإمكان كتابتها بعد المبادلة بين معادلتي الجملة بالشكل :

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -7x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned} \tag{38-1}$$