جامعة حمص

الكلية التطبيقية

السنة الأولى - تدفئة وتكييف

مقرر الرياضيات ١/

الجزء الثاني

د. فرحان ديب

المحاضرة الثانية سنة أولى بكالوريوس

النهايات

نقول أن للدالة $y=f(x)$ المعرفة في المجموعة X نهاية A في النقطة $x=x_0$ إذا كان لأجل أي عدد موجب $\varepsilon>0$ يوجد عدد $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ بحيث أنه من أجل جميع قيم $x\in X$ المحققة للمتراجحة $|x-x_0|<\delta$ تتحقق المتراجحة $|f(x)-A|<\varepsilon$ حيث أن العدد δ متعلق بـ ε أي:

$$\forall\varepsilon>0;\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ ;\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

مثال: $f(x)=y=x^4+2$ نهاية هذا التابع عندما $x\to\pm1$ هي

$$\lim_{x\to\pm1} f(x)=\lim_{x\to\pm1}(x^4+2)=3$$

خواص النهايات

1) إذا كانت $f(x)=c \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim c=c$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[af(x)\pm bg(x)\right]=a\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+b\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[af(x)\cdot g(x)\right]=a\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{af(x)}{bg(x)}=\dfrac{a}{b}\,\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

5) $\lim\limits_{x\to x_0}\log_a f(x)=\log_a\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

6) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$

7) $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$

8) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim g(x)}$

مثال

$$f(x) = 4x+5$$
$$g(x) = 6x-7$$

$$\lim_{x\to 1}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to 1}(4x+5) \pm \lim_{x\to 1}(6x-7) = 9 \pm (-1) = \begin{cases} 8 \\ 10 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}[f(x)\, g(x)] = \lim_{x\to 1}[(4x+5)(6x-7)] = 9\cdot(-1) = -9$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1} g(x)} = \frac{9}{-1} = -9$$

<u>قاعدة أوبيتال لإزالة عدم التعيين من الشكل</u> $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>أمثلة</u> أوجد نهايات الدوال التالية بطريقتين

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos 0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

<u>الطريقة الأولى</u> نطبق أوبيتال مباشرة

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1} = \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

<u>الطريقة الثانية</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$= \lim \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot \sin\frac{x}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 1\times 0 = 0$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

الطريقة الأولى : نطبق لوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{\cos 0}{2}=\frac{1}{2}$$

الطريقة الثانية

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=(1)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+2}{x^2-3x+2}=\frac{2^3-5\times2+2}{2^2-3\times2+2}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

الطريقة الأولى نطبق لوبيتال نجد

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5}{2x-3}=\frac{3\cdot2^2-5}{2\times2-3}=\frac{12-5}{4-3}=\frac{7}{1}=7$$

الطريقة الثانية : نحلل البسط والمقام نجد

$$\left.\begin{aligned}x^3-5x+2&=(x-2)(x^2+2x-1)\\ x^2-3x+2&=(x-2)(x-1)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x-1)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-1}{x-1}=\frac{2^2+2\times2-1}{2-1}=\frac{4+4-1}{1}=7$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x=1^\infty$$ عدم تعيين $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x=$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}}{1+\frac{1}{x+1}} = \frac{e}{1} = e$$

5) $$I = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left[\sqrt{2(x^2+1)}+1\right]}{x^3-1} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$\Leftarrow$ $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ تحلل المقام نجد

$$I = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\left[\sqrt{2(x^2+1)}+1\right]}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2(x^2+1)}+1}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{2(1^2+1)}+1}{1^2+1+1} = \frac{3}{3} = 1$$

6) $$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - x + 5) = \infty - \infty$$ عدم تعيين تراطيا

$$\sqrt{x} - x + 5 = x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{5}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} (\sqrt{x} - x + 5) = \lim_{x \to \infty} x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{5}{x}\right)$$

$$= +\infty(0 - 1 + 0) = -\infty$$

7, $$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+5} - x) = \infty - \infty$$ عدم تعيين تراطبيا لذا

$$\sqrt{x^2+5} - x = \frac{(\sqrt{x^2+5} - x)(\sqrt{x^2+5} + x)}{\sqrt{x^2+5} + x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+5} - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2+5} + x} = \frac{5}{\infty + \infty} = \frac{5}{\infty} = 0$$

8) $$I = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نطبق لوبيتال نجد

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2e^{0}=2$$

9) $$I=\lim_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}$$ عدم تعيين

نطبق لوبيتال نجد

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{\infty}=0$$

10) $$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نطبق لوبيتال نجد

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

11) $$I=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{x}=\frac{\infty}{\infty}$$ عدم تعيين

نطبق لوبيتال نجد

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{1}=e^{\infty}=\infty$$

12) $$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{e^{0}-1}=\infty-\infty$$ عدم تعيين

نزيله بتوحيد المقامات نجد

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1-x}{x(e^{x}-1)}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين نطبق لوبيتال نجد

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{e^{x}-1+xe^{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{x}+xe^{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{2e^{x}+xe^{x}}=\lim\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$$

المشتقات وتطبيقاتها

تعريف مشتقة دالة:

لتكن $f(X)$ دالة معرفة في النقطة $X_0 \in R$ وفي جوارها فإذا أعطينا للمتحول X تغيراً ΔX فإن الدالة $y = f(X)$ ستتغير بمقدار $\Delta y = f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)$ فإذا وجدت نهاية محدودة للنسبة بين تغير الدالة $y = f(X)$ وتغير المتحول المستقل X وذلك عندما يسعى تغير المتحول المستقل إلى الصفر، فإن هذه النهاية تسمى مشتقة الدالة $y = f(X)$ في النقطة $X_0 \in R$، ونرمز لهذه المشتقة بالرمز $f'(X_0)$ أو $y'(X_0)$ أو $\frac{dy}{dX}(X_0)$ أي أن:

$$f'(X_0) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)}{\Delta X}$$

فإذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة عند النقطة $X_0 \in R$، عندها نقول أن الدالة $y = f(X)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $X_0 \in R$

مثال: استناداً إلى تعريف المشتقة أوجد مشتقة كل من الدالتين الآتيتين:

$$1)\ y = f(X) = X^2 \quad , \quad 2)\ y = f(X) = \frac{1}{X}$$

الحل: 1- إذا أعطينا المتحول X تغيراً ΔX فإن الدالة $f(X) = X^2$ تأخذ تزايداً مقداره Δy ونحسب المشتقة كالآتي:

$$\Delta y = f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) = (X_0 + \Delta X)^2 - (X_0)^2 = X_0^2 + 2X_0 \Delta X + (\Delta X)^2 - X_0^2$$

$$= 2X_0 \Delta X + (\Delta X)^2 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta X} = \frac{2X_0 \Delta X + (\Delta X)^2}{\Delta X} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{2X_0 \cdot \Delta X + (\Delta X)^2}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} (2X_0 + \Delta X) = 2X_0 \Rightarrow$$

$$f'(X_0) = 2X_0$$

2- $y = f(X) = \frac{1}{X}$ فإذا أعطينا المتحول X تغيراً مقداره ΔX فإن الدالة $y = \frac{1}{X}$ تأخذ تزايداً مقداره Δy ونحسب المشتقة كالتالي

$$\Delta y = f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) = \frac{1}{X_0 + \Delta X} - \frac{1}{X_0} = \frac{-\Delta X}{(X_0 + \Delta X) X_0} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta X} = \frac{-1}{(X_0 + \Delta X) X_0} \Rightarrow \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{-1}{(X_0 + \Delta X) X_0} = \frac{-1}{X_0^2} = f'(X_0)$$

تعريف الدالة القابلة للاشتقاق:

تكون الدالة $f(X)$ قابلة للاشتقاق في النقطة X_0 إذا ملكت في هذه النقطة مشتقة محدودة وتكون قابلة للاشتقاق في المجال $]a, b[$ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المجال

وسنورد جدولاً نبين فيه قوانين الاشتقاق لبعض الدوال الشهيرة التي نستخدمها

مسلسل	الدالة	مشتقة الدالة
1	$y = c$	$y' = 0$
2	$y = X$	$y' = 1$
3	$y = u(X)$	$y' = u'$
4	$y = A\,u$ (A ثابت)	$y' = A\,u'$
5	$y = X^n$	$y' = n X^{n-1}$
6	$y = u^n$	$y' = n u^{n-1} \cdot u'$
7	$y = u_1 + u_2 + \dots + u_n$	$y' = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n$
8	$y = u \cdot v$	$y' = u' v + v' \cdot u$
9	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
10	$y = \sin X$	$y' = \cos X$
11	$y = \sin u$	$y' = u' \cdot \cos u$
12	$y = \cos X$	$y' = -\sin X$
13	$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \sin u$
14	$y = \tan X$	$y' = \frac{1}{\cos^2 X} = 1 + \tan^2 X$
15	$y = \ln X$	$y' = \frac{1}{X}$
16	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
17	$y = e^X$	$y' = e^X$
18	$y = e^{u(X)}$	$y' = u' \cdot e^{u(X)}$

مسلسل	الدالة	مشتقة الدالة
19	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
20	$y = \sqrt{u(x)}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
21	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
22	$y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'$

مشتقات التوابع العكسية

23	$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
24	$y = \sin^{-1} u = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
25	$y = \cos^{-1} x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
26	$y = \cos^{-1} u$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
27	$y = \tan^{-1} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
28	$y = \tan^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
29	$y = \text{cotan}\, x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$
30	$y = \text{cotan}\, u$	$y' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$

- أمثلة على المشتقات

أوجد مشتقة التوابع التالية :

1) $y = -3 \Rightarrow y' = 0$

2) $y = e^2 \Rightarrow y' = 0$

3) $y = e \ln 3 \Rightarrow y' = 0$

4) $y = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow y' = 0$

5) $y = \sin 3x \Rightarrow y' = 3 \cdot \cos 3x$

6) $y = e^{x^2+2} \Rightarrow y' = 2\cancel{x} \cdot e^{x^2+2}$

7) $y = x^2 \cdot e^x \Rightarrow y' = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (2+x)$

8) $y = \arctan \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

9) $y = \arcsin\left(\frac{3x}{4}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{\left(\frac{3x}{4}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{4}\right)^2}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{16}}} = \dfrac{3}{\sqrt{16-9x^2}}$

10) $y = \ln x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

11) $y = 2^{x^2+2} \Rightarrow y' = 2^{x^2+2} \cdot 2x \cdot \ln 2$

12) $y = (2-x^2)\cos x + 2x \sin x \Rightarrow y' = -2x\cos x + (2-x^2)(-\sin x)$
$+ 2\sin x + 2x\cos x = -2x\cos x - 2\sin x + x^2 \sin x + 2\sin x + 2x\cos x$
$\Rightarrow y' = x^2 \sin x$

13) $y = 5x + \tan^3 x \Rightarrow y' = 5 + 3\tan^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{5\cos^2 x + 3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

14) $y = \ln(x^3+2x+1) \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x+1}$

15) $y = \sin(x^2+3) \Rightarrow y' = 2x \cdot \cos(x^2+3)$

16) $y = 3^{x^2+x+4} \Rightarrow y' = (2x+1) \cdot 3^{x^2+x+4} \cdot \ln 3$

17) $y = x^x$ نأخذ لوغاريتم الطرفين $\Rightarrow$ $\ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$
نشتق الطرفين نجد:
$\dfrac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = (1+\ln x)y = x^x(1+\ln x)$

18) $y = \sin(\ln x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)$

19) $y = \ln(\ln x^2) \Rightarrow y' = \dfrac{\frac{2x}{x^2}}{\ln x^2} = \dfrac{2x}{x^2 \ln x^2} = \dfrac{2}{x \ln x^2}$