$$x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3$$
$$= -4 - 2(x_3 - 4) + 3x_3$$
$$= x_3 + 4$$

إذاً حل الجملة الخطية المعطاة هو:

$$x_1 = x_3 + 4$$
$$x_2 = x_3 - 4$$
$$x_3 = t$$

حيث t عدد حقيقي كيفي . هذا يعني أن الجملة المعطاة تملك عدداً غير منتــه مــن الحلول ، إذ كلما أعطينا قيمة لــ x_3 نحصل على حل جديد للجملة الخطية المعطاة.

يمكن أن نجد من الأمثلة السابقة أن جملة المعادلات الخطية:

تملك حلاً وحيداً .

1- لا يوجد لها حل .

2- تملك عدداً غير منته من الحلول .

لو دققنا النظر في طرائق الحذف بالأمثلة الثلاث السابقة، لوجدنا أنها تتضمن ثــلاث عمليات يمكن تطبيقها على الجملة الخطية لنحصل منها على جملة خطية جديدة مكافئة لها. إن هذه العمليات الأولية هي :

1- المبادلة بين معادلتين في الجملة الخطية . .

2- ضرب إحدى معادلات الجملة بعدد مغاير للصفر .

3- استبدال إحدى معادلات الجملة ولتكن المعادلة رقم i بمعادلة ناتجة من إضافة معادلة ما من الجملة ولتكن المعادلة رقم j إلى المعادلة رقم i ، وذلك بعد ضربها بعدد ثابت c حيث $i \neq j$. هذا يعني استبدال المعادلة رقم i والتي هي :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

بالمعادلة:

$$(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + (a_{i2} + ca_{j2})x_2 + \dots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + cb_j$$

الحل :

لحذف x_1 ، نضيف المعادلة الأولى إلى المعادلة الثانية بعد ضربها بـ -3 فنحصل على المعادلة: $-10x_2=-20$ ، والتي ينتج منها أن: $x_2=2$.

بالتعويض في المعادلة الأولى من الجملة الخطية المعطاة نحصل على $x_1=4$، ومنه فإن حل الجملة المعطاة هو : $x_1=4\ ,\ x_2=2$.

2)-

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3&=2\\ 4x_1+2x_2+2x_3&=8\\ x_1-\ x_2\ +x_3&=4 \end{aligned}$$

الحل : نبادل بين المعادلتين الأولى والثالثة من الجملة المعطاة، ثم نقوم لحذف x_1 بإضافة المعادلة الأولى من الجملة الناتجة إلى المعادلة الثانية بعد ضربها بـ -4، وإضافة المعادلة الأولى إلى الثالثة بعد ضربها بـ -3، فنحصل على الجملة الآتية :

$$\begin{aligned} 6x_2-2x_3&=-8\\ 5x_2-2x_3&=-10 \end{aligned}$$

لحذف x_3 من الجملة السابقة، نضيف المعادلة الأولى إلى الثانية بعد ضربها بـ -1 فنجد $-x_2=-2$ ، ومنه $x_2=2$. بتعويض x_2 في إحدى معادلتي الجملة السابقة ولتكن الأولى، فنحصل على $6(2)-2x_3=-8$، ومنه $x_3=10$. نعوض قيمة كل من x_2 و x_3 في المعادلة الأولى من الجملة الناتجة بعد إجراء مبادلة بين المعادلة الأولى والمعادلة الثالثة، أي في المعادلة: $x_1-x_2+x_3=4$ ، فنجد :

$x_1-2+10=4$ ومنه $x_1=-4$ ،

أي أن حل الجملة المعطاة هو $x_1=-4\ ,\ x_2=2\ ,\ x_3=10$.

3)-

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+6x_3&=-12\\ 2x_1-3x_2-4x_3&=15\\ 3x_1+4x_2+5x_3&=-8 \end{aligned}$$

الجواب هو :

$$x_1=2\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=-2$$

4)-

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 12$$
$$3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 4$$

الحل : لحذف x_1 ، نضيف المعادلة الأولى إلى المعادلة الثانية وذلك بعد ضربها بـــ 3-

فنحصل على المعادلة $-4x_2+x_3=-32$ ، أي :

$$x2 = \frac{1}{4}x_3 + 8$$

بالتعويض في المعادلة الأولى من الجملة المعطاة ، نجد أن $x_1=-20$ ، ومنه فإن حـــل الجملة المعطاة هو :

$$x_1 = -20\ ,\ x_2 = \left(\frac{1}{4}\right)x_3 + 8 \quad , \quad x_3 = t$$

حيث t عدد حقيقي كيفي.

5)-

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 12$$
$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6$$

الحل : لحذف x_1 نضرب المعادلة الأولى من الجملة المعطاة بـــ 2- ونضيفها للمعادلة الثانية، فنحصل على $0=-18$، وبالتالي فالجملة غير مشتركة أي لا تملك حلاً .

6)- لتكن الجملة الخطية الآتية :

$$2x_1 - x_2 = 5$$
$$4x_1 - 2x_2 = t$$

(أ) حدد قيمة لـــ t بحيث تكون الجملة الخطية مشتركة .

(ب) حدد قيمة لـــ t بحيث تكون الجملة الخطية غير مشتركة .

(ج) ما عدد القيم المختلفة لـــ t التي بالإمكان اختيارها في الطلب (ب) ؟

الجواب :

(أ) $t=10$.

(ب) $t=3$.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

بالمصفوفة الموسّعة للجملة الخطية. تلعب مصفوفة المعاملات والمصفوفة الموسعة للجملة الخطية دوراً هاماً في طرائق إيجاد حلول جمل المعادلات الخطية .

بما أن A مصفوفة من النوع $m\times n$ و X مصفوفة من النوع $n\times 1$ فإن مصفوفة الجداء AX تكون من النوع $m\times 1$.

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

إنّ مركبات مصفوفة الجداء AX هي فقط الطرف الأيسر من المعادلات في الجملـــة الخطيـــة (41-1). يمكن كتابة الجملة الخطية (41-1) بالشكل المصفوفي كما يلي :

$$AX=B \tag{42-1}$$

- مثال (1) : لتكن لدينا الجملة الخطية الآتية :

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-4x_3+x_4&=5 \\ -2x_1 \qquad +x_3 \qquad &=7 \\ 3x_1+2x_2 \qquad -4x_4&=3 \end{aligned}$$

بالإمكان كتابة هذه الجملة بالشكل المصفوفي الآتي :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة المعاملات لهذه الجملة هي :

الحل :

$$x_1\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-4\\5\end{bmatrix}$$

5-8-1 ملاحظة:

إذا كانت A مصفوفة من المرتبة n ، فإن جملة المعادلات الخطية $AX = B$ تكون جملة مكونة من n معادلة بـــ n مجهول. إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن A^{-1} موجود. بضرب طرفي المعادلة $AX = B$ بمعكوس A ، نحصل علـــى $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ أو $I_n X = X = A^{-1}B$.

علاوة على ذلك، فإنّ $X = A^{-1}B$ ، هو حل لجملة المعـــادلات الخطيـــة المعطـــاة. وبالتالي نستنتج أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة ، فإننا نحصل على حـــل وحيـــد لجملة المعادلات الخطية $AX = B$ وذلك لأجل كل مصفوفة B من النـــوع $n\times1$. العكس صحيح أيضاً .

- مثال :

لتكن: $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ ، عندئذ $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

إذا كان $B=\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}$ ، فإنّ حل الجملة الخطية $AX = B$ ، هو:

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\9\end{bmatrix}$$

من جهة أخرى، إذا كانت: $B=\begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$ ، فإن: $X=A^{-1}\begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$.

نقدم في هذه الفقرة طريقتين لحل جملة المعادلات الخطية (1-41) وذلـــك باســـتخدام مفهوم المصفوفة الموسعة $[A \vdots B]$، هما :

40

$$x_n = d_n$$
$$x_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1n}x_n$$
$$\vdots$$
$$x_2 = d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \ldots - c_{2n}x_n$$
$$x_1 = d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - \ldots - c_{1n}x_n$$

- **مثال** : لتكن الجملة الخطية:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 \quad\quad - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

والتي مصفوفتها الموسعة هي :

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

نحول هذه المصفوفة إلى مصفوفة متدرجة سطرياً ، فنحصل على المصفوفة الموسعة الآتية :

$$[C \vdots D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

ومن ثم فإن الجملة المعطاة تكافئ الجملة الآتية :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

باستخدام طريقة الحذف والتعويض التراجعي بدءاً من المعادلة الثالثة، نجد :

$$x_3 = 3$$
$$x_2 = 2 - 1x_3 = 2 - 3 = -1$$
$$x_1 = 9 - 2x_2 - 3x_3 = 9 + 2 - 9 = 2$$

وعليه، فإنّ الحل الوحيد للجملة هو: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

42

وبالاستمرار في الحذف والتعويض باتجاه الأعلى نحصل على المجاهيل الباقيــة الموافقــة للعنصر المتقدم في كل سطر .

عند إيجاد حل الجملة الخطية نجد أن بعض المجاهيل تأخذ قيماً حقيقية كيفية نــدعوها المجاهيل الحرة ونحسب من خلالها قيم المجاهيل المتبقية. وبما أن المجاهيل الحرة يمكــن أن تأخذ عدداً غير منته من القيم فإن جملة المعادلات الخطية $CX = D$ في هــذه الحالــة تملك عدداً غير منته من الحلول .

- **مثال** : لتكن،

$$[C \vdots D] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

عندئذٍ :

$$\begin{aligned} x_4 &= 9 - 2x_5 \\ x_3 &= 7 - 2x_4 - 3x_5 = 7 - 2(9 - 2x_5) - 3x_5 = -11 + x_5 \\ x_2 &= 7 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 + 5x_5 \\ x_1 &= 6 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -1 - 10x_5 \\ x_5 &= \text{عدد حقيقي كيفي} \end{aligned}$$

ومن ثم، فإنّ جميع الحلول تأخذ الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 10t \\ x_2 &= 2 + 5t \\ x_3 &= -11 + t \\ x_4 &= 9 - 2t \\ x_5 &= t \;;\; t \text{ عدد حقيقي كيفي} \end{aligned}$$

وعليه فإن للجملة الخطية المعطاة عدداً غير منته من الحلول .

- **مثال** : إذا كانت،

44

فإنّ:

$$x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5$$

$$x_1 = \frac{2}{3} - x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_5$$

حيث x_2, x_3, x_5 مجاهيل حرة، تأخذ قيماً حقيقية اختيارية ونوجد المجهولين الآخرين x_1, x_4 بدلالتهم، لذلك بوضع $x_2 = r$ و $x_3 = s$ و $x_5 = t$ حيث r, s, t قيماً حقيقية كيفية، نجد أن :

$$x_1 = \frac{2}{3} - r - 2s + \frac{5}{2}t \ , \ x_2 = r \ , \ x_3 = s \ , \ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \ , \ x_5 = t$$

- **مثال** (3) : طبق طريقة غاوس ثم طريقة غاوس – جوردان لحل جملة المعادلات الخطية الآتية :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

الحل : (أ) طريقة غاوس :

نشكل المصفوفة الموسعة لهذه الجملة، والتي تأخذ الشكل الآتي:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

ومنه :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[-3r_1 + r_3]{-2r_1 + r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{-\frac{1}{5}r_3} \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{7r_2 + r_3} \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right]$$

46

6-8-1 مبرهنة:

لتكن،

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

جملة من المعادلات الخطية مكونة من n معادلة بـــ n مجهـــول، ولـــتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة المعاملات ، عندئذ يمكن أن نكتـــب جملـــة المعـــادلات المعطـــاة بالشـــكل

$AX = B$ ، حيث $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

إذا كان $|A| \neq 0$ ، فإن هذه الجملة تملك حلاً وحيداً ، يعطى بالعلاقات الآتية :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

حيث : A_i هي مصفوفة تنتج من المصفوفة A باستبدال العمـــود i في المصـــفوفة A بالعمود B .

البرهان :

إذا كان: $|A| \neq 0$ ، فإنّه حسب المبرهنة (4-9-1)، تكون المصفوفة A غير شاذة. بالاستفادة من النتيجة (4-1) من الفصل الثاني نجد أن:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}(\operatorname{adj} A)B$$

الحل : إن جملة المعادلات المذكورة تكافئ المعادلة المصفوفية: $AX = B$ ، حيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \ , \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وبحساب محدد A نجد أن $|A| = -2$ ، ومن ثم فإن:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2 \ ,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3 \ ,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4 \ .$$

- **ملاحظة (1) :**

لا يمكن تطبيق قاعدة كرامر إلا إذا كانت مصفوفة المعاملات A مربعة من المرتبة n وغير شاذة .

إذا كانت مصفوفة المعاملات A شاذة فقد يكون لجملة المعادلات الخطية حلاً أو ليس لها حلول .

(د) طريقة مقلوب مصفوفة:

وجدنا سابقاً أن جملة المعادلات الخطية تكتب بالشكل المصفوفي الذي عبرنا عنه بالعلاقة (1-42)، وهو: $A \times X = B$. فإذا ضربنا طرفي هذه العلاقة بمقلوب المصفوفة A (إن وجد)، نجد أن:

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Rightarrow I_n \times X = A^{-1} \times B$$