بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

بعض التوزيعات الاحتمالية المنقطعة:

1. **توزيع برنولي:** نسمي كل تجربة لها نتيجتان تجربة برنولية (ثنائية). نسمي إحدى النتيجتين نجاحا ، ونسمي النتيجة الأخرى فشلا ، فإذا كان P يمثل احتمال النجاح عندها نسمي P وسيط التجربة البرنولية، و q=1−P احتمال الفشل.

إذا رمزنا بـ x لعدد مرات النجاح في تجربة برنولية وسيطها P ، تكون مجموعة قيم X هي $R_X = \{0,1\}$ ويكون احتمال النجاح $P = P(X = 1)$

واحتمال الفشل $q = P(X = 0) = 1 - P$ ، $q = 1 - P$

أي إن لـ X التوزيع الاحتمالي :

X	0	1
$P(X = x) = f(x)$	q	P

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي X توزيعاً برنولياً بالوسيط P إذا كان لـ X دالة الاحتمال:

$$f(x) = P^x q^{1-x} \ , \ x = 0,1 \ , q = 1 - P \ , \ 0 < P < 1$$

أي إن لـ X جدول التوزيع الاحتمالي :

X	0	1
$f(x)$	q	P

التوقع الرياضي والتباين :

$$E(X) = \sum_x x.f(x) = \sum_{x=0}^{1} x P^x q^{1-x} = 0 + P = P$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) = 0^2(q) + 1^2(P) = P$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = P - P^2 = P(1 - P) = pq$$

$$\sigma_X = \sqrt{pq}$$

2. **التوزيع الثنائي(الحداني):**

إذا كررنا تجربة برنولية وسيطها P (احتمال النجاح) n مرة ، وكانت هذه التكرارات مستقلة. إذا رمزنا بـ X لعدد مرّات النجاح عند تكرار هذه التجربة البرنولية n مرّة ، فإن مجموعة قيم X هي $R_X = \{0,1,2,\dots\dots,n\}$

ويمكننا أن نثبت أنّ:

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي X توزيعاً ثنائياً (حدانياً) بالوسيطين n و P إذا كان لـ X دالة الاحتمال:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x q^{n-x} \quad , x = 0,1,\dots n$$

أي إن لـ X جدول التوزيع الاحتمالي:

X	0	1	.....	K	...	n
f(x)	q^n	npq^{n-1}	.....	$\frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k q^{n-k}$	...	p^n

نعود لنؤكد أن المتغير العشوائي X الذي له التوزيع الحداني بالوسيطين n و P (أي $X \sim b(n;P)$) يمثل عدد مرات النجاح عند تكرار تجربة برنولية (وسيطها P) n مرّة .

مثال

إذا كان احتمال أن يصيب رام الهدف 0.8 ، فإذا صوب الرامي نحو الهدف 5 مرات ورمزنا ب X لعدد مرات إصابة الهدف.

المطلوب:

أ- اكتب دالة احتمال المتغير العشوائي X .

ب- احسب احتمال اصابة الهدف مرة واحدة فقط.

ت- احسب احتمال إصابة الهدف مرّة واحدة على الأكثر.

ث- احسب احتمال اصابة الهدف مرتين على الأقل.

ج- احسب احتمال إصابة الهدف.

الحل:

أ- إنّ التسديد نحو الهدف تجربة برنولية لها نتيجتان ، إما النجاح (إصابة الهدف) وإما الإخفاق (عدم إصابة الهدف) ووسيطها $P = 0.8$ والتسديد نحو الهدف 5 مرات يعني تكرار هذه التجربة البرنولية 5 مرات ، ومِنْ ثَمَّ يكون لـ X (عدد مرات إصابة الهدف) التوزيع الحداني بالوسيطين $n = 5$ و $P = 0.8$ أي إنّ:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{5!}{x!(5-x)!}(0.8)^x(0.2)^{5-x} \; ; \; x = 0,1,2,3,4,5$$

ب- الاحتمال المطلوب:

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{5!}{1!4!}(0.8)^1(0.2)^4 = 5(0.8)(0.0016) = 0.0064$$

ت-

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5!}{0!5!}(0.8)^0(0.2)^5 + 0.0064 =$$

$$(0.2)^5 + 0.0064 = 0.00672$$

ث-

$$\mathrm{P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)}$$

$$= 1 - 0.00672 = 0.99428$$

ج-

$$\mathrm{P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)}$$
$$= 1 - 0.00032 = 0.99968$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$\boldsymbol{\mu} = E(X) = nP = (5)(0.8) = 4$$

$$\sigma^2 = V(X) = nPq = (5)(0.8)(0.2) = 0.8$$

3. توزيع بواسون:

نقدم فيما يأتي بعض الأمثلة التي يكون فيها للمتغير العشوائي توزيع بواسون.

- العدد العشوائي للجزئيات الصادرة عن مادة مشعة خلال خمس ثوان .
- العدد العشوائي للسيارات الصغيرة التي تصل خلال ساعة محددة من كل يوم للتزود بالوقود من محطة معينة.
- العدد العشوائي للمكالمات الهاتفية التي تصل إلى مقسم إحدى الشركات خلال ربع الساعة الأولى من ساعة محددة.
- العدد العشوائي للبذور الملقحة التي لم تنبت من عبوة تحوي عدداً محدداً من البذور (وليكن 100 بذرة).
- العدد العشوائي لحالات الإسعاف التي يستقبلها مشفى معين خلال ساعة محددة من الصباح.
- العدد العشوائي للولادات التي تحصل خلال الأسبوع الأول من كل شهر في مشفى معين .
- العدد العشوائي لحوادث المرور في مدينة معينة خلال يوم ماطر . والأمثلة كثيرة.

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي X توزيع بواسون بالوسيط $(\mu > 0)\ \mu$ إذا كان لـ X دالة الاحتمال الآتية:

$$f(k) = P(X = k) = e^{-\mu}.\frac{\mu^{K}}{k!}\ ; \quad k=0, 1, 2,\ldots$$

أي إنّ لـ X دالة التوزيع الاحتمالي :

X	0	1	2	...
$f_X(x)$	$e^{-\mu}$	$\mu e^{-\mu}$	$\frac{1}{2}\mu^{2}e^{-\mu}$	...

حيث : $\forall K : f(k) \geq 0$ $\left(\text{k عدد صحيح}\right)$ ، $\sum_k f(k) = 1$

ويمكننا التحقق من أن التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = \mu \ ; \ V(X) = \mu$$

مثال

إذا كان معدل عدد الولادات في مشفى دار التوليد هو ثلاث ولادات كل ساعة والمطلوب:

1. ما احتمال أن تكون هناك حالة ولادة واحدة خلال ساعة معينة؟
2. ما احتمال أن تكون هناك أربع ولادات على الأكثر خلال ساعة معينة.

الحل:

إذا كان X يدل على عدد الولادات خلال ساعة فإن X هنا يتوزع وفق التوزيع البواسوني بالوسيط $\mu = 3$.

$$X \sim poisson(\mu = 3) \Leftrightarrow P[X = K] = \frac{\mu^K}{K!} e^{-\mu}$$

حيث $k = 0,1,2,3,4, \ldots \ldots$

الطلب (1):

$$P[X = 1] = \frac{\mu^1}{1!} e^{-\mu} = \frac{3}{1} e^{-3} = 0.149$$

الطلب (2):

$$P[X \leq 4] = \sum_{K=0}^{4} P[X = K] = \sum_{K=0}^{4} \frac{3^K}{K!} e^{-3}$$

$$= e^{-3} \left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right] = 0.82$$

بعض التوزيعات المستمرة الشهيرة:

1. **التوزيع الأسي:**

للتوزيع الأسي أهمية كبيرة في المجال التطبيقي ، إذ يعد نموذجاً مناسباً لكثير من المسائل التي تواجهنا في حياتنا العملية ، فعلى سبيل المثال ، تمثل الأزمان الآتية:

- الزمن العشوائي لمكالمة هاتفية.
- الزمن العشوائي بين مكالمتين هاتفيتين.
- الزمن العشوائي لصيانة جهاز في ورشة صيانة.
- عمر عنصر إلكتروني (مكثف ، مقاومة ، ...).
- الزمن العشوائي لتخديم زبون في مرفق خدماتي .

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي المستمر X التوزيع الأسي بالوسيط λ (λ>0) إذا كان لـ X الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

- **التوقع الرياضي والتباين:**

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

2. التوزيع الطبيعي:

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية لما له من تطبيقات مهمة في مجال الإحصاء، إذ يستخدم هذا التوزيع في كثير من المسائل التطبيقية .

1. يستخدم التوزيع الطبيعي في وصف كثير من المتغيرات العشوائية إذ نلحظ أن عدداً كبيراً من المتغيرات العشوائية (من أطوال ، أوزان ، ...إلخ) التي نواجهها في حياتنا العامة لها منحني كثافة ، أو منحني تكرار ، له تقريباً شكل الجرس ، أو كما نعبر عن ذلك إحصائيا ، له بصورة تقريبية شكل منحني التكرار الطبيعي ، أو شكل التوزيع الطبيعي.

تعريف:

نقول إن للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي بالوسيطين μ و σ^2 ونعبر عن ذلك بالرمز $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إذا كانت كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$$
$$\sigma > 0 \ ; \ -\infty < \mu < +\infty$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = \mu \quad , \ V(X) = \sigma^2$$

أي أن وسيطي التوزيع الطبيعي μ و σ^2 هما التوقع الرياضي والتباين لـ X على الترتيب.

حالة خاصة من توزيع الطبيعي:

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي Z التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان $Z \sim N(0,1)$، أي إذا كان لـ Z الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

ملاحظة:

إذا كان لـ x التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإنه يكون للمتغير العشوائي $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ التوزيع الطبيعي المعياري ، أي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$