الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث
كلية العلوم – قسم الرياضيات

التحويلات التكاملية المضاعفة وتطبيقاتها

أطروحة أعدّت لنيل درجة الدّكتوراه في الرّياضيّات البحتة

إعداد

صفاء عدنان شيخ السوق

المعيدة في قسم العلوم الأساسية ـ كلية الهندسة الميكانيكية و الكهربائية ـ جامعة البعث

إشراف

الدكتور محمد عامر

أستاذ مساعد في قسم الرّياضيات – كليّة العلوم – جامعة البعث

العام الدراسي

2019 م – 1441 هـ

فهرس المحتويات

مسلسل	العنوان	رقم الصفحة
	المخلص.....	1
1	المقدمة	3
2	مسألة البحث.....	3
3	هدف البحث.....	4
4	أهمية البحث.....	4
5	المسائل الأساسية ذات الطابع العلمي الجديد التي درست في هذه الأطروحة...	4
6	المنشورات.....	6
7	الاستعراض المرجعي.....	7
الفصل الأول	**دراسة موجزة عن تحويلات تكاملية بسيطة مع دوال خاصة أساسية و طرق تقريبية لحل معادلات غير خطية**	**9**
1	مفاهيم أساسية.....	9
1.1	دالة غاما.....	10
2. 1	دالة غاما غير التامة	10
3. 1	دالة ريمان–زيتا	10
4. 1	دالة ميتاغ–ليفلر.....	11
5. 1	المشتقات من مراتب كسرية.....	11
1. 5. 1	مؤثر ريمان–ليوفيل الاشتقاقي الكسري	11
2. 5. 1	مؤثر كابوتو (Caputo) في الاشتقاق من المرتبة α.....	11
6. 1	الدالة ذات المرتبة الأسية.....	13
7. 1	الدالة المستمرة قطعياً.....	13
8. 1	تحويل لابلاس.....	13
9. 1	تحويل الزاكي.....	13
1 .9 . 1	مبرهنة.....	14
2 .9 . 1	مبرهنة.....	15
10 . 1	o – صغيرة	15
11 . 1	تحويل ميلين.....	15
1. 11 . 1	شروط الوجود.....	15

1 . 11 .2	خواص تحويل ميلين.....	15
1 . 11 .3	تحويل ميلين لبعض الدوال الأساسية.....	16
1 . 11 .4	تلاف ميلين.....	17
1 . 11 .5	مبرهنة التلاف.....	17
1 . 11 .6	تحويل ميلين العكسي.....	17
1 . 12	تحويل لابلاس المضاعف.....	18
1 . 13	تحويل الزاكي المضاعف.....	19
1 . 13 .1	مبرهنة.....	19
1 . 13 .2	تحويل الزاكي المضاعف للدوال التي ستمر بنا في هذه الأطروحة	19
1 . 13 .3	التحويل العكسي.....	20
1 . 14	تحويل ميلين المضاعف.....	20
1 . 14 .1	تعريف.....	21
1 . 14 .2	خواص تحويل ميلين المضاعف	21
1 . 14 .3	تلاف ميلين المضاعف	22
1 . 14 .4	مبرهنة التلاف.....	22
1 . 14 .5	تحويل ميلين المضاعف لبعض الدوال الأساسية	22
1 . 15	طريقة أدومين التفكيكية.....	23
1 . 16	طريقة التغاير التكرارية (VIM).....	26
الفصل الثاني 2	**تحويل لابلاس–الزاكي و خواصه مع تطبيقاته**	**28**
1	تعريف تحويل لابلاس–الزاكي (LET)	28
2	شروط وجود تحويل لابلاس–الزاكي.....	28
3	خواص تحويل لابلاس–الزاكي.....	29
4	مبرهنة القيمة الابتدائية.....	37
5	تحويل لابلاس–الزاكي لبعض الدوال الأساسية.....	37
6	مبرهنة.....	41
7	مبرهنة.....	42
8	التحويل العكسي لتحويل لابلاس–الزاكي.....	42

9	تعريف تلاف (طي) دالتين	43
10	مبرهنة.....	43
11	مبرهنة < مبرهنة التلاف (الطي) >	44
12	مبرهنة.....	44
13	مبرهنة.....	45
14	تطبيقات تحويل لابلاس–الزاكي.....	46
1. 14	حل معادلات تفاضلية جزئية خطية بأمثال ثابتة.....	46
2 . 14	حل جمل معادلات تفاضلية جزئية خطية بأمثال ثابتة.....	48
3. 14	حل معادلات تكاملية خطية.....	50
4 . 14	.حل معادلات تفاضلية خطية جزئية غير خطية	52
1. 4 . 14	طريقة لابلاس –الزاكي التفكيكية	52
2. 4 . 14	. طريقة لابلاس الزاكي التكرارية (LEVIM)	55
5 . 14	حل جمل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية	58
1. 5 . 14	طريقة لابلاس–الزاكي التفكيكية لحل جمل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.....	58
6 . 14	حل معادلات تكاملية و تكاملية – تفاضلية جزئية غير خطية.....	65
1 . 6 . 14	حل معادلة فيشر– فريدهولم التكاملية – التفاضلية غير الخطية.....	65
2 . 6 . 14	حل معادلة آبل غير الخطية.....	68
7 . 14	حل معادلات تفاضلية جزئية من مرتبة كسرية.....	69
الفصل الثالث3	**تحويل ميلين – الزاكي (ME) و تطبيقاته و حالات خاصة منه.....**	**78**
1	تعريف تحويل ميلين – الزاكي	78
2	شروط وجود التحويل.....	78
3	علاقة التحويل بتحويل لا بلاس–الزاكي.....	79
4	خواص تحويل ميلين الزاكي.....	79

5	تعريف التلاف.....	89
6	تحويل ميلين– الزاكي لبعض الدوال الأساسية.....	94
7	التحويل العكسي لتحويل ميلين–الزاكي.....	100
8	تطبيقات تحويل ميلين الزاكي.....	101
1.8	حل معادلات تفاضلية جزئية ذات أمثال متغيرة.....	101
2.8	إيجاد مجموع متسلسلات مضاعفة.....	104
3.8	حل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية.....	107
1 . 3.8	طريقة ميلين – الزاكي التكرارية MEVIM).....	107
9	حالات خاصة من تحويل ميلين–الزاكي.....	110
1.9	تحويل ميلين المنتهي – الزاكي	110
2. 9	تحويل ميلين غير التام–الزاكي.....	116
	الاستنتاجات والتوصيات.....	120
	المراجع.....	121
	المصطلحات العلمية.....	125
	الملخص باللغة الإنكليزية.....	127

الملخّص

يُناقش موضوع الأطروحة: **التحويلات التكاملية المضاعفة و تطبيقاتها**، وهو عمل أعدّ لنيل درجة الدّكتوراه في الرّياضيّات البحتة.

تقع الدراسة في ثلاثة فصول تتضمّن دراسة مرجعيّة لتحويلات تكاملية بسيطة أساسية و دوال خاصة بالإضافة لطرق تقريبية لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية تم الاستفادة منها في هذه الاطروحة لاستنتاج تحويلين تكامليين مضاعفين مختلطين هما تحويل لابلاس–الزاكي و ميلين–الزاكي اللذين كانا محورين أساسين لدراستنا و كانا من ثم طرقاً جديدة فعالة لحل المعادلات غير الخطية .

الفصل الأوّل: دراسة موجزة عن تحويلات تكاملية بسيطة مع دوال خاصة أساسية و طرق تقريبية لحل معادلات غير خطية .

قدمنا في هذا الفصل دراسة موجزة عن تحويلات لابلاس و الزاكي و ميلين البسيطة و تحويلاتها المضاعفة كتحويل لابلاس المضاعف و الزاكي المضاعف كذلك ميلين المضاعف ، حيث إن تلك التحويلات البسيطة كانت أساساً في استنباط تحويلات مضاعفة مختلطة جديدة في أطروحة الدكتوراه هذه بالإضافة لدوال أساسية كدالة غاما و زيتا و ميتاغ–ليفلر اعتمدنا عليها في نتائجنا ، كذلك تطرقنا إلى طرق تقريبية لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية لنقوم بدمجها مع التحويلات التكاملية المضاعفة الجديدة للحصول على تقنيات فعالة عند التعامل مع هذا النوع من المعادلات و جملها، و قمنا بتسليط الضوء على مفاهيم و تعاريف و مبرهنات أساسية تم الاستفادة منها في هذا العمل.

الفصل الثّاني: تحويل لابلاس–الزاكي و خواصه مع تطبيقاته

درسنا في هذا الفصل تحويلاً تكاملياً مضاعفاً جديداً نواته عبارة عن جداء نواتي تحويلين تكامليين بسيطين مختلفين هما تحويلا لابلاس و الزاكي و هو تحويل لابلاس–الزاكي التكاملي حيث عرفناه بتكامل ثنائي مع الشروط التي تضمن وجوده لدوال تحققها و أثبتنا خواصه علاوة على ذلك عرفنا التلاف الخاص به لنتطرق إلى مبرهنات معززة بالبرهان للاستفادة منها و مما سبقها من تعاريف في تطبيقات هذا التحويل على المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية و غير

الخطية من مراتب صحيحة و كسرية و جملها كذلك المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية بنواة مستمرة أو شاذة .هذا و قد دمجنا هذا التحويل المضاعف مع طرق تقريبية للحصول على طرق سهلة و فعّالة لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية و جملها .

الفصل الثّالث: تحويل ميلين – الزاكي (ME) و تطبيقاته و حالات خاصة منه

في هذا الفصل تمحورت دراستنا حول تحويل مضاعف مختلط آخر له طابع مختلف عن التحويل الوارد في الفصل الثاني حيث نواته خليط من كثير حدود و تابع أسي فنتج شيء من الاختلاف في الخواص و النتائج و التلاف بالإضافة للتطبيقات ليضفي أهمية على العمل في هذه الأطروحة. وقد تطرقنا إلى علاقة هذا التحويل بتعميم التحويل السابق بالإضافة إلى خواص و تعاريف و مبرهنات عديدة كانت محوراً أساسياً في تطبيقات هذا التحويل كذلك الأمر نتج لدينا من تغيير في المتحول بالتحويل المدروس في الفصل السابق حالات خاصة من تحويل ميلين–الزاكي و هما ميلين المنتهي–الزاكي و ميلين غير التام–الزاكي اقتصرنا في دراستها على خواص وتعاريف ومبرهنات أساسية و لم نتطرق لتطبيقات لهما على وجه الخصوص.

كلمات مفتاحية: تحويل لا بلاس – تحويل الزاكي – تحويل ميلين – المعادلات التفاضلية – طريقة أدومين التفكيكية .

1- المقدمة :

يمكن توصيف معظم الظواهر في العالم باستخدام معادلات تفاضلية عادية أو جزئية والتي تتميز بسهولة حلها إذا ما اقترنت بالتحويلات التكاملية المضاعفة التي معظمها مشتق من تحويلات تكاملية بسيطة، وكذلك الأمر بالنسبة للمعادلات التكاملية المضاعفة والتكاملية- التفاضلية الجزئية والتفاضلية الجزئية من مراتب كسرية، كل هذه المعادلات تتحول إلى معادلات جبرية بتطبيق تحويلات تكاملية مضاعفة عليها أما بالتحويلات البسيطة جميعها فلا يمكن ذلك.

ومثل ذلك تمت دراسة تسرب المياه الجوفية ضمن البنية الجيولوجية من خلال توصيفها بمعادلة تفاضلية جزئية التي كان حلها باستخدام التحويلات البسيطة و الطرق العددية قاصراً، و حُلت باستخدام تحويل مضاعف و هو تحويل كانيدم [5] . إضافة إلى أهمية التحويلات التكاملية المضاعفة في العلوم الهندسية بخاصة في تحليل الإشارة ومعالجة الصوت و الصورة بأبعاد ثلاثية إضافة لأهميتها الكبيرة في مجال العلوم التطبيقية و الفيزيائية .

وتستخدم التحويلات التكاملية البسيطة وبخاصة تحويلات لابلاس و الزاكي و ميلين، وكذلك الأمر تحويلاتها المضاعفة وهي تحويلات لابلاس المضاعفة و الزاكي المضاعفة و ميلين المضاعفة، على نطاق واسع في إيجاد حلول لمسائل رياضية مختلفة و مما تجدر الإشارة إليه أن جميع التحويلات المضاعفة المدروسة سابقاً تم الحصول عليها من خلال مضاعفة كل تحويل بسيط على حدة أي L_2 ، E_2 ، M_2 ، وكانت نواة هذه التحويلات المضاعفة عبارة عن جداء لنواة التحويل بنفسها فكان كل ما يتعلق بها من خواص و مبرهنات عبارة عن تعميم لما ورد في تحويلاتها البسيطة.

2- مسألة البحث

تمت دراسة تحويل لا بلاس المضاعف و الزاكي المضاعف بأبحاث عديدة ،و تناول بحث وحيد تحويل ميلين المضاعف، في حين لم يدرس تحويل مضاعف ناتج عن دمج تحويلين بسيطين مختلفين فإنه من الأهمية بمكان الاستفادة من خواص وفاعلية تحويلين معاً من خلال التحويلات المضاعفة المختلطة ولذلك كان من الضرورة إيجاد تحويلي لابلاس- الزاكي و ميلين -الزاكي و دراستهما مع خواصهما وتطبيقاتهما المختلفة أيضاً.

3- هدف البحث

يهدف هذا البحث بصورة رئيسة إلى إيجاد تحويلات تكاملية مضاعفة بحلّة جديدة من خلال دمج تحويلين تكامليين بسيطين مختلفين هما تحويل لابلاس- الزاكي و ميلين-الزاكي و دراستهما من أجل تطبيقات واسعة ،و أيضا إيجاد طرائق جديدة ذات فعالية كبيرة مرتبطة بهذين التحويلين وهي طريقة لابلاس- الزاكي التفكيكية و طريقة لابلاس- الزاكي التكرارية و ميلين- الزاكي التكرارية لحل صفوف مختلفة من المعادلات التفاضلية غير الخطية ذات الأهمية الكبيرة من الناحية الرياضية و الفيزيائية والهندسية.

4- أهمية البحث

ترتكز أهمية هذا البحث على حقيقة مفادها أنه تم إيجاد تحويلين مضاعفين مختلطين في هذه الأطروحة و كل منهما يتميز بطابع خاص من ناحية الخواص و التطبيقات، فعلى سبيل المثال المعادلات التفاضلية و التكاملية وغيرها من التطبيقات التي حُلّت باستخدام أحدهما كانت صعبة الحل باستخدام الآخر.

ويعتبر هذا العمل ذا طابع نظري و تطبيقي و النتائج الأساسية فيه تساعد في إيجاد حل مفصل لمعادلات لم تحل سابقاً ، وأيضا لها أهمية كبيرة في العلوم الفيزيائية و الهندسية خاصة في مجال تحليل الإشارة و معالجة الصورة و الصوت بالإضافة إلى جميع العلوم التطبيقية التي توصف ظواهرها بمعادلات رياضية مختلفة صعبة الحل دون استخدام التحويلات التكاملية المضاعفة .

5- المسائل الأساسية ذات الطابع العلمي الجديد و التي درست في هذه الأطروحة

1. تعريف تحويل لابلاس- الزاكي المضاعف لدالة بمتغيرين وشروطه وتحويله العكسي
2. دراسة خواص هذا التحويل مع إثباتها
3. تطبيق هذا التحويل على دوال أساسية
4. التلاف المضاعف لدالتين كل منهما بمتغيرين
5. مبرهنات أساسية كمبرهنة التلاف بالإضافة إلى مبرهنات أخرى ذات أهمية كبيرة مع إثباتها
6. إيجاد طريقتين جديدتين لحل معادلات تفاضلية و تكاملية غير خطية وهما طريقة لابلاس – الزاكي التفكيكية و طريقة لابلاس – الزاكي التكرارية

7. تطبيقات هذا التحويل :

1.7. حل معادلات تفاضلية جزئية خطية ذات أمثال ثابتة .

2.7. حل جمل معادلات تفاضلية جزئية خطية ذات أمثال ثابتة.

3.7. حل معادلات تكاملية مضاعفة .

4.7. حل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية .

5.7. حل جمل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية .

6.7. حل معادلات تكاملية وتكاملية – تفاضلية جزئية غير خطية.

7.7. حل معادلات تفاضلية جزئية ذات مراتب كسرية .

وقد قمنا بحل أمثلة مختلفة ذات أهمية على كل من هذه التطبيقات، وننوه بأنه يوجد بعض المعادلات والمسائل الحدية و الابتدائية غير محلولة سابقا رياضيا نخص بالذكر مسألة **بلازيوس** [46] التي هي حالة خاصة من مسألة **نفير–ستوكس** ذات الأهمية الكبيرة.

8. تحويل ميلين–الزاكي : تعريف ، شروط وجوده و تحويله العكسي .

9. أهم خواص التحويل مع إثباتها .

10. تطبيق هذا التحويل على دوال أساسية .

11. التلاف المضاعف الخاص بتحويل ميلين– الزاكي.

12. مبرهنات أساسية مع إثباتها .

13. إيجاد طريقة ميلين الزاكي التكرارية من أجل حل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية كمعادلة كوشي غير الخطية " التي لا يمكن حلها باستخدام التحويل السابق".

14. تطبيقات هذا التحويل :

1.14. حل معادلات تفاضلية جزئية خطية بأمثال متغيرة

2.14. مجموع متسلسلات مضاعفة .

3.14. حل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية .

15. حالات خاصة من تحويل ميلين–الزاكي:

1.15. تحويل ميلين المنتهي – الزاكي

2.15 . تحويل ميلين غير التام – الزاكي

6– المنشورات:

- مقارنة بين استخدام تحويلات لابلاس – الزاكي البسيطة و المضاعفة لحل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة وغير المتجانسة ،مجلة جامعة البعث، المجلد(4) ، عام (2018).
- طريقة لابلاس– الزاكي التفكيكية لحل جملة المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، مجلة جامعة البعث، المجلد(41)، عام (2019).
- تحويل لابلاس – الزاكي و خواصه مع تطبيقاته على المعادلات التكاملية و التفاضلية الجزئية،المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث،المجلد (3)، عام (2019).

7- الاستعراض المرجعي:

قدم العالم بيير سيمون لابلاس عام 1782 تحويله الشهير (لابلاس) والذي من خلاله تم دمج الرياضيات النظرية (البحتة) مع الرياضيات التطبيقية في بوتقة واحدة وهو بذلك يعتبر أقدم وأشهر التحويلات التكاملية الخطية في الأبحاث الرياضية ، وأضاف لابلاس إلى دراسته تطبيقات للتحويل في إيجاد حلول لمعادلات تفاضلية خطية و تكاملية و تكاملية- تفاضلية و غيرها[23 و26 و31].

وقدم العالم هجالمر ميلين (1854 – 1933) تحويلا باسم ميلين حيث نواته لم تكن دالة أسية بل كثيرة حدود وهو بذلك يختلف عن تحويل لابلاس ويختلف عنه في علاقة التلاف الخاص به و سهولة إيجاد حل لمعادلات تفاضلية ذات أمثال متغيرة كمعادلة كوشي [44]. أثبت R.S.Dahyia عام 1990 بعض النظريات التي تنطوي على تحويل لابلاس ذي n بُعد لدالة ذات n متغير وحلّ باستخدامه معادلات جزئية غير متجانسة خطية ومن نمط مكافئ [32].

ونشر كل من S.Saberi Nadjafi و R.S.Dahyia عام 1992 أبحاثاً تضمنت مبرهنات عديدة لحساب تحويل لابلاس ذي n بُعد إضافة لحل معادلة الموجه ذات البعُد الواحد وذلك باستخدام تحويل لابلاس المضاعف L_2 [30] ،علاوة على ذلك نشر االباحثان B.Salkhordeh و A.Aghili أعوام 2004 و 2006 و 2008 أبحاثاً تضمنت مبرهنات وتطبيقات عديدة لتحويل لابلاس المضاعف [8 و 9 و 10] ، و خصص الباحثان دراسة عن تحويل لابلاس المضاعف لدالة بمتغيرين و تطبيقه في إيجاد حلول معادلات تفاضلية جزئية خطية غير متجانسة من النمط المكافئ [7].

وطبق Lokenath Debnath تحويل لابلاس المضاعف في إيجاد حل معادلات دالية و تكاملية خطية [25] واستخدم مفهوم التلاف المضاعف كل من حسان الطيب و آدم كليمان أيضا لتطبيقات مختلفة[6]، أمّا تحويل ميلين المضاعف فدرس ببحث واحد لحسان الطيب و كليمان عام (2007) [19].

وقدم Watugala في مطلع التسعينيات من القرن العشرين تحويلا تكامليا عُرف باسم سوميدو و تم استخدامه في إيجاد حلول للمعادلات التفاضلية العادية [2 ، 16]،أما خواصه و تطبيقات أخرى له فتطرّق لها M.A.Asirn وذلك في بحثين عامي(2001-2002) [28و29]، ودرس J.M.Tchuench و N.S.Mbare عام (2007) تحويل سوميدو المضاعف مع خواصه [24] .

وقام طارق الزاكي عام 2010 بتعديل تحويل سوميدو ليحصل على تحويل الزاكي الذي يعتبر تقنية جديدة لحل مسائل رياضية وهندسية عديدة [39 و40 و41 و43]، أما تحويله المضاعف تطرّق لدراسته كل من طارق الزاكي و إيمان هلال عام 2012 مع خواصه و تطبيقات له [20] .

ولأهمية المعادلات غير الخطية و إيجاد حلولها تم استخدام طرق تقريبية لإيجاد حلول للمعادلات التفاضلية غير الخطية ومن تلك الطرق طريقة أدومين التفكيكية(Adomain Decomposition) [15] و استخدم [3] طريقة التغاير التكرارية (Variation Irritation) في حين تم الحل باستخدام طريقة الهوموتوبي (Homotopy Perturbation) [21].

و جدير بالذكر أنّ التحويلات التكاملية البسيطة و المضاعفة وقفت عاجزة عن حل المسائل غير الخطية لذلك لجأ الباحثان لدمج التحويل التكاملي مع طريقة تقريبية لإيجاد طرائق فعالة لحل ذلك النوع من المسائل فقد دمج خوري تحويل لابلاس مع أدومين التفكيكية و طبّقها على معادلات تفاضلية غير خطية [38]، و استخدم مانافيانهيرز هذا الدمج لحل معادلات تفاضلية– تكاملية غير خطية[22] .

و قام الزاكي و اليرنور بدمج تحويل لابلاس مع طريقة التغاير التكرارية للحصول على طريقة معدلة سهلة وفعالة في إيجاد حلول لمعادلات تفاضلية و تكاملية غير خطية [12]

و استخدم شراده شافان ومهير باتشال عام 2014 طريقة تحويل الزاكي مع الهوموتوبي [37] وفي عام 2017 دمج رحمة الله نور الدين طريقة الزاكي مع طريقة ادومين التفكيكية [33].

<u>و ننوه بأنّه لم يُدمج تحويل ميلين مع أي طريقة تقريبية لحل مسائل غير خطية.</u>

لم يتوقف العلماء و الباحثون على المشتقات من مراتب صحيحة بل أخذوا بطرح فكرة أن يكون المشتق من مرتبة كسرية و ذلك عام 1695 من خلال مراسلة بين أوبيتال و ليبنتز فقدم الأخير توقعات للمشتق من المرتبة $\frac{1}{2}$ كانت بداية لمفاهيم تعرف الآن بالحساب الكسري (Fractional Calculus) و قد بقي تطورها بطيئاً إلى عام 1900 و بعدها قُدّمت تعاريف عديدة في هذا المجال.

وقد استخدم باحثون تحويلات تكاملية لحل معادلات تفاضلية ذات مرتبة كسرية منهم

Li Kexue و Peng Jigen كذلك Saeed Kazem و Ranjit R.Dhunde لأعوام (2011,2013,2018) و ذلك في المراجع [27 و 34 و 36].

الفصل الأول

دراسة موجزة عن تحويلات تكاملية بسيطة مع دوال خاصة أساسية و طرق تقريبية لحل معادلات غير خطية

نقدم في هذا الفصل دراسة موجزة عن تحويلات لابلاس والزاكي و ميلين البسيطة و تحويلاتها المضاعفة كتحويل لابلاس المضاعف والزاكي المضاعف كذلك ميلين المضاعف ، حيث إن تلك التحويلات البسيطة كانت أساساً في استنباط تحويلات مضاعفة جديدة منها في هذه الأطروحة. كذلك تطرقنا إلى طرق تقريبية لحل معادلات تفاضلية غير خطية و التي قمنا بدمجها مع التحويلات التكاملية المضاعفة الجديدة للحصول على تقنيات جديدة فعالة لحل معادلات تفاضلية و تكاملية و تفاضلية–تكاملية غير خطية كذلك جملها، بالإضافة إلى مفاهيم و تعاريف و مبرهنات أساسية تم الاستفادة منها أيضاً في هذا العمل.

1.1. مفاهيم أساسية :

1.1.1. دالة غاما:[45]

تعد هذه الدالة من أهم الدوال الخاصة التي وضعها العالم أولر ضمن مسمى تكامل أولر من النوع الثاني حيث إنّها دالة معرفة على نصف المستوي العقدي $0 < \mathrm{Re}(s)$ و تعطى بالتكامل الآتي :

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad (1.1) \ ; \mathrm{Re}(s) > 0$$

و هي أيضاً دالة تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي ما عدا النقاط $s = -n$ حيث: $n = 0,1,2,\ldots$ ، والتي تعد أقطاباً بسيطة. أما رواسب الدالة المذكورة عند تلك الأقطاب فتعطى بالعلاقة:

$$Res[\Gamma(s)]_{s=-n} = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (2.1)$$

بعض العلاقات التي تحققها هذه الدالة:

$$\Gamma(n+1) = n! \ ; n \in \mathbb{N} \qquad (3.1)$$

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \qquad (4.1)$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \qquad (5.1)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad (6.1)$$

$\Gamma(2s) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2s-1} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ و هي صيغة ليجندر المضاعفة.

$$\Gamma(ms) = m^{ms-1/2} \ (2\pi)^{(1-m)/2} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma(s + k \ /m) \qquad (7.1)$$

حيث: $m = 2,3,\ldots$ و هي صيغة غاوس- ليجندر المتعددة ، وتعتبر هذه الدالة أساساً في التحويلات التكاملية البسيطة.

2.1.1. دالة غاما غير التامة: [14]

إن لدالة غاما التي تعطى بالعلاقة:

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \qquad (8.1)$$

حالة خاصة منها تعرف بالعلاقة الآتية:

$$\Gamma(s,a)=\int_a^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \qquad (9.1)$$

تسمى دالة برايم (Prym's function) واضح أن:

$$\Gamma(s,0)=\Gamma(s) \qquad (10.1)$$

$$\Gamma(1,a)=e^{-a} \qquad (11.1)$$

وتحقق هذه الدالة العلاقات الآتية:

$$\Gamma(s+1,a)=s\Gamma(s,a)+a^s e^{-a} \qquad (12.1)$$

و أيضاً:

$$\Gamma(2,a)=e^{-a}(a+1) \qquad (13.1)$$

$$\Gamma(3,a)=e^{-a}(a^2+2a+2) \qquad (14.1)$$

و بشكل عام يكون:

$$\Gamma(n,a)=e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k} \qquad (15.1)$$

حيث n عدد صحيح موجب تماماً .

3.1.1. دالة ريمان-زيتا [45] : تعرف الدالة زيتا بالعلاقة :

$$\varsigma(z,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q+n)^z};\ \ \mathrm{Re}(z)>1, q\neq 0,-1,-2,..... \qquad (16.1)$$

و في حال $q=0$:

$$\varsigma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^z};\mathrm{Re}(z)>1 \qquad (17.1)$$

وهذه الدالة الأخيرة تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي z ما عدا النقطة $z=1$ التي هي قطب بسيط والراسب عندها يساوي (+1) .

و يمكن التعبير عن بعض قيم زيتا بالاعتماد على أعداد برنولي كما يلي:

$$\varsigma(-m)=-\frac{\beta_{m+1}}{m+1} \qquad ; m\in\mathbb{N}\cup\{0\} \qquad (18.1)$$

$$\varsigma(m)=\frac{2^{m-1}|\beta_m|\pi^m}{m!} \ ; m=2,4,6,...2k,... \qquad (19.1)$$

حيث β_m أعداد برنولي و هذه تحقق :

$\beta_{2n+1}=0$ من أجل $n=1,2,3,4,....$ أي فقط يظهر دليل فردي واحد هو الواحد.

4.1.1. دالة ميتاغ–ليفلر :(Mittag–Leffler function) [13]

إن دالة ميتاغ ليفلر تعرّف بالعلاقة:

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad ; \; x\in\mathbb{C}\,,\; \alpha,\beta>0 \qquad (20.1)$$

و كحالة خاصة عندما $\beta=1$ تكون هذه الدالة بوسيط واحد α:

$$E_{\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \quad ; \; x\in\mathbb{C}\,,\; \alpha>0 \qquad (21.1)$$

نلاحظ عندما $\alpha=1$: $E_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$

5.1.1. المشتقات من مراتب كسرية:[13]

عُرِّف هذا المشتق من قبل علماء و باحثين بتعاريف عديدة نذكر منها:

1.5.1.1. مؤثر ريمان–ليوفيل الاشتقاقي الكسري:

بفرض $\alpha>0$ و $x>a$ و $a,\alpha\in R$ عندئذ:

$$D^{\alpha}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{d^n}{dx^n}\displaystyle\int_a^x\frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau\,;n-1<\alpha<n\;\&\;n\in\mathbb{N}\\[2ex] \dfrac{d^n}{dt^n}f(x);\alpha=n\in\mathbb{N}\end{cases} \qquad (22.1)$$

في حين أن تكامل ريمان–ليوفيل الكسري من المرتبة α له العلاقة:

$$J^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+1-n}\,d\tau \qquad (23.1)$$

وتم الاتفاق على أن

$$J^0f(x):=f(x) \qquad (24.1)$$

أي $J^0:=I$ (المؤثر المطابق)

ملاحظة(1) : $D^{\alpha}J^{\alpha}=I$

و أيضاً بالاتفاق $D^0f(x):=f(x)$ أي $D^0:=I$

2.5.1.1. مؤثر كابوتو (Caputo) في الاشتقاق من المرتبة α : <1967>

المشتق من المرتبة α وفق كابوتو يعطى بالعلاقة الآتية:

$$D_*^{\alpha}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_a^x\frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau\;;\;n-1<\alpha<n\;\&\;n\in\mathbb{N}\\[2ex] \dfrac{d^n}{dt^n}f(x) \qquad ;\alpha=n\in\mathbb{N}\end{cases} \qquad (25.1)$$

تم الاتفاق على أن $D_*^0=I$

مثال : بفرض $a=0$ و $\alpha=\frac{1}{2}$ و $n=1$ و $f(x)=x$

عندئذ مشتق كابوتو من المرتبة $\frac{1}{2}$ للدالة $f(x)$ هو

$$D_*^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t \frac{1}{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}d\tau$$

و بفرض أن $u=(x-\tau)^{\frac{1}{2}}$ عندئذ:

$$D_*^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{1}{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}d(x-\tau)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{x}}^0 \frac{1}{u}\,du^2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{2u}{u}du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{x}-0)=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

ملاحظة(2): في حال D^α مؤثر ريمان – ليوفيل عندئذ:

$$\lim_{\alpha\to n-1} D^\alpha f(x)=f^{(n-1)}(x) \qquad (26.1)$$

وفي حال D_*^α مؤثر كابوتو: $\lim_{\alpha\to n-1} D_*^\alpha f(x)=f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)$

ملاحظة(3): في كثير من المراجع يرمز للمشتق من المرتبة الكسرية ريمان – ليوفيل $_aD_x^\alpha(f(x))$ وللمشتق كابوتو $_a^cD_x^\alpha(f(x))$

ملاحظة(4): لنأخذ $a=-\infty$ عندئذ:

$$_{-\infty}D_t^\alpha f((x))=\,_{-\infty}^cD_x^\alpha(f(x))=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{-\infty}^x \frac{f^{(n)}(x)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau \qquad (27.1)$$

حيث $n-1<\alpha<n$ و $n\in\mathbb{N}$ أما المؤثر D^n فهو المشتق من مرتبة صحيحة

$$D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

توطئة : لتكن $n-1<\alpha<n$ بحيث $n\in\mathbb{N}$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ و $f(x)$ قابلة للاشتقاق وفق كابوتو أي $D_*^\alpha f(x)$ موجود عندئذ:

$D_*^\alpha f(x)=J^{n-\alpha}D^n f(x)$ (علاقة تربط بين المشتق من المرتبة الكسرية و الصحيحة)

وهذا يعني أن مشتق كابوتو $f(x)$ من المرتبة α يساوي تكاملاً من المرتبة $n-\alpha$ للمشتق الصحيح من المرتبة n للدالة $f(x)$

أما عند ريمان – ليوفيل :

$$D^\alpha f(x)=D^n J^{n-\alpha}f(x) \qquad (28.1)$$

أي أن المشتق ريمان – ليوفيل من المرتبة α للدالة $f(x)$ يساوي المشتق من المرتبة α للتكامل المرتبة $n-\alpha$ للدالة $f(x)$

6.1.1. الدالة ذات المرتبة الأسية:[23]

نقول عن الدالة $f(x)$ إنها دالة ذات مرتبة أسية a إذا وجد ثوابت $a,K>0,M>0$ بحيث تحقق: $|f(x)|\le Ke^{ax}$ من أجل كل $x>M$.

7.1.1. الدالة المستمرة قطعياً: (Piecewise Continous) [23]

تكون الدالة f مستمرة قطعياً على المجال $[0,\infty[$ إذا حققت:

1) $\lim_{t\to 0^+} f(x)=f(0^+)$ موجودة.

2) f دالة مستمرة في كل مجال محدود $]0,b[$ إلا في عدد منته من النقاط $\tau_1,\tau_2,....,\tau_n$ في المجال $]0,b[$ التي تملك f عندها قفزة .

8.1.1. تحويل لابلاس : [23 و 26 و 31]

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة قطعياً على المجال $[0,\infty[$ و ذات مرتبة أسية a فعندئذ تحويل لابلاس لها موجود و يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\bar{f}(s)=L(f(x))=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx \qquad (29.1)$$

و من أبرز خواصه :

1) خاصة الخطية :

$$L(\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x))=\alpha_1 L(f_1(x))+\alpha_2 L(f_2(x)) \qquad (30.1)$$

2) خاصة المشتق :

$$L(f^{(n)}(x))=s^n L(f)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-.....-f^{(n-1)}(0) \qquad (31.1)$$

أما تحويل لابلاس لبعض الدوال الأساسية الواردة فهو :

$$L(e^{ax})=\frac{1}{s-a} \quad , \quad L(\cos(ax))=\frac{s}{s^2+a^2} \qquad (32.1)$$

$$L(sh(ax))=\frac{a}{s^2-a^2} \quad , \quad L(x^n)=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

حيث : $\Gamma(n)$ هي دالة غاما .

و بالنسبة لتحويله العكسي فيعطى بالعلاقة :

$$f(x)=L^{-1}\left[L(f(x))\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sx}L(f(x))ds \qquad (33.1)$$

9.1.1. تحويل الزاكي :[40 و41]

يُعرف هذا التحويل بتحويل سوميدو المعدّل أيضاً و يعرّف بالعلاقة :

$$E(f(x))=E(f(x);p)=p\int_0^\infty e^{-\frac{x}{p}}f(x)dx \qquad (34.1)$$

في حين أنّ تحويل سوميدو يعطى بالعلاقة :

$$S\left(f\ (t)\right)=\int_0^{\infty}e^{-\frac{t}{u}}f\ (t)dt=\int_0^{\infty}e^{-t}f\ (ut)dt \qquad (35.1)$$

و ننوه بأنّ تحويل الزاكي موجود للدوال التي تنتمي للمجموعة A حيث :

$$A=\left\{f\ (x);\exists M\ ,k_1,k_2>0;\left|f\ (x)\right|<Me^{\frac{|x|}{k_j}}\ ,if\ \ x\in\left(-1\right)^j\times\left[0,\infty\right[\right\}$$

و بالنسبة لأبرز خواصه :

1) خاصة الخطية :

$$E\left(\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)\right)=\alpha_1 E\left(f_1(x)\right)+\alpha_2 E\left(f_2(x)\right) \qquad (36.1)$$

2) خاصة المشتق :

$$E\left(f^{\ (n)}(x)\right)=\frac{1}{p^n}E\left(f\ \right)-\sum_{k=0}^{n+1}p^{2-n+k}f^{\ (n)}(0) \qquad (37.1)$$

2) خاصة المكاملة :

$$E\left[\int_0^{\infty}f\ (\tau)d\tau\right]=pE\left(f\ (x)\right) \qquad (38.1)$$

و يكون تحويل اليزاكي لبعض الدوال الأساسية:

$$E\left(e^{ax}\right)=\frac{p^2}{1-ap}\quad,\quad E\left(\cos(ax)\right)=\frac{p^2}{1+a^2p^2}\quad,\quad E\left(\sin(ax)\right)=\frac{ap^3}{1+a^2p^2} \qquad (39.1)$$

$$E\left(x^n\right)=p^{n+2}\Gamma(n+1)\ ,\quad E\left(ch(ax)\right)=\frac{p^2}{1-a^2p^2}\quad,\quad E\left(sh(ax)\right)=\frac{ap^3}{1-a^2p^2}$$

أما تحويله العكسي فله العلاقة الآتية :

$$f\ (x)=E^{-1}\left[E\left(f\ (x)\right)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}pe^{px}E\left(f\ (x);\frac{1}{p}\right)dp \qquad (40.1)$$

1.9.1.1. مبرهنة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $\left[0,\infty\right[$ و تحقق شروط وجود تحويل الزاكي لها عندئذ :

$$E\left(xf\ '(x)\right)=u^2\frac{d}{dp}\left[\frac{E(f\ )}{p}-pf\ (0)\right]-\left[\frac{E(f\ )}{p}-pf\ (0)\right] \qquad (41.1)$$

2.9.1.1. مبرهنة :

إذا كانت الدالتان f , g مستمرتين على $[0,\infty[$ و كان تلافهما معرفاً بالعلاقة:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \qquad (42.1)$$

عندئذ:

$$E(f*g)=\frac{1}{p}E(f)E(g) \qquad (43.1)$$

10.1.1. o – صغيرة :[17]

لنفرض أن $g=g(x)$ دالة ذات قيم موجبة و $x>0$ عندئذ :

في حال $x\to\infty$:

نقول عن f إنها $o(g)$ إذا تحقق : $\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=0$ ونكتب $f=o(g);x\to\infty$

و في حال $x\to 0$:

نقول عن f إنها $o(g)$ إذا تحقق: (44.1) $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{g(x)}$ ونكتب $f=o(g);x\to 0$

11.1.1. تحويل ميلين :[17]

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{C}$ وقابلة للمكاملة على $\mathbb{R}^+$ عندئذ نعرف تحويل ميلين لها بالعلاقة :

$$M(f(x))=\int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx \qquad (45.1)$$

ويمكن أن نرمز لهذا التحويل بالرمز : $M(f(x))=M(f;s)=F(s)$

1.11.1.1. شروط الوجود : لتكن f دالة مستمرة على $\mathbb{R}^+$ وكذلك :

$$f(x)=\begin{cases} o(x^{-a}) & for \quad x\to 0 \\ o(x^{-b}) & for \quad x\to\infty \end{cases} \qquad (46.1)$$

عندئذ $M(f)$ موجود من أجل أي $s\in\mathbb{C}$ ويحقق $\mathrm{Re}(s)\in(a,b)$

2.11.1.1. خواص تحويل ميلين :

1. الخاصة الأولى (الخطية) :

$$M(\alpha f_1(x)+\beta f_2(x))=\alpha M(f_1(x))+\beta M(f_2(x)) \qquad (47.1)$$

2. الخاصة الثانية (التحاكي) :

$$M(f(ax))=a^{-s}M(f;s) \qquad (48.1)$$

3. الخاصة الثالثة (الانسحاب) :

$$M(x^a f(x))=M(f;s+a) \qquad (49.1)$$

4. الخاصة الرابعة (مشتق الصورة) : (حيث إنّ الصورة مقصود بها صورة الدالة f وفق المؤثر M)

$$M(lm^k(x)f(x)) = \frac{d^k}{ds^k}M(f;s) \qquad (50.1)$$

5. الخاصة الخامسة (مشتق الدالة الأصلية):

$$M(f^{(m+1)}(x)) = (-1)^m \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-(1+m))}M(f;s-(1+m)) \qquad (51.1)$$

6. الخاصة السادسة (المكاملة) :

$$1)M(x^{\alpha}\int_0^{\infty} t^{\beta} f_1(xt)f_2(t)dt) = M(f_1;s+\alpha)M(f_2;1-s-\alpha+\beta) \qquad (52.1)$$

$$2)M(x^{\alpha}\int_0^{\infty} t^{\beta} f_1(\frac{x}{t})f_2(t)dt) = M(f_1;s+\alpha)M(f_2;1+s+\alpha+\beta) \qquad (53.1)$$

7. الخاصة السابعة :

$$M\left[x^n f^{(n)}(x)\right] = (-1)^n (s)_n M(f;s) \qquad (54.1)$$

حيث: $(s)_n = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} = s(s+1)\dots.(s+n-1)$

و هي رموز بوخامر (The Pochhammer Symbols)

8. الخاصة الثامنة:

$$M(\int_0^t f(x)dx) = -\frac{1}{s}M(f)(s+1) \qquad (55.1)$$

3.11.1.1. **تحويل ميلين لبعض الدوال الأساسية :**

1) **الدالة الأسية :**

$$f(t) = e^{-pt}; p > 0$$

$$\Rightarrow M(f) = p^{-s}\Gamma(s) \qquad (56.1)$$

2) **دوال مثلثية :**

$$1)M(\sin(at)) = a^{-s}\Gamma(s)\sin(\tfrac{\pi s}{2}); -1 < \mathrm{Re}\,s < 1 \qquad (57.1)$$

$$2)M(\cos(at)) = a^{-s}\Gamma(s)\cos(\tfrac{\pi s}{2}); 0 < \mathrm{Re}\,s < 1 \qquad (58.1)$$

$$3)M(e^{-at}\sin(bt)) = \frac{\Gamma(s)\sin\left[sarctg(b/a)\right]}{(a^2+b^2)^{s/2}}; -1 < \mathrm{Re}\,s \qquad (59.1)$$

$$4)M(e^{-at}\cos(bt)) = \frac{\Gamma(s)\cos\left[sarctg(b/a)\right]}{(a^2+b^2)^{s/2}}; \mathrm{Re}\,s > 0 \qquad (60.1)$$

3) **الدالة الدرجية :** $f(t) = H(t - t_0)t^z$

حيث : $H(t - t_0) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t \le t_0 \\ 1 & ; \quad t_0 \le t < \infty \end{cases}$ الدالة الدرجية و

z **:** عدد عقدي أما t **:** فعدد موجب تماماً .

عندئذ تحويل ميلين للدالة $f(t)$ هو :

$$M(f) = \int_{t_0}^{\infty} t^{z+s-1} dt = -\frac{t_0^{z+s}}{z+s} \qquad (61.1)$$

4) **الدالة** : $f(t) = (1+t)^{-1}$

$$M(f) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}; 0 < \mathrm{Re}(s) < 1 \qquad (62.1)$$

4.11.1.1. **تلاف ميلين :**

لتكن لدينا الدالتان g, f المعرفتان على $\mathbb{R}$ فإن التلاف التقليدي لهما يعرف بالعلاقة:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \qquad (63.1)$$

أما في دراستنا هذه فسوف نتعرف على تلاف ميلين أو التلاف في حالة ميلين بالشكل:

إذا كانت لدينا الدالتان $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ فعندئذ يعطى تلاف ميلين لهما بالعلاقة:

$$(f *_M g)(x) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{u}\right) g(u) \frac{du}{u} \qquad (64.1)$$

كما و يرمز لهذا التلاف بالرمز $(f \vee g)$.قد يطلق على تلاف ميلين جداء الطي .

5.11.1.1. مبرهنة التلاف:

مبرهنة التلاف: إذا كان $X_c = \{f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}; f(x)x^{c-1} \in L^1(\mathbb{R}^+)\}$ و $f, g \in X_c$

فعندئذٍ تتحقق العلاقة: $M(f \vee g) = M(f *_M g) = F(s)G(s) \qquad (65.1)$

حيث: $F(s) = M(f) \& G(s) = M(g)$

6.11.1.1. تحويل ميلين العكسي :

إذا كانت $c \in (a,b)$ وهو مجال الوجود للدالة $f(s)$ فإن تحويل ميلين العكسي لها بالصيغة العقدية يعطى بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(f) x^{-s} ds \qquad (66.1)$$

12.1.1. تحويل لابلاس المضاعف :[35]

إن تحويل لابلاس المضاعف للدالة $f(x,t)$ ذات المتغيرين يعطى بالعلاقة :

$$\bar{\bar{f}}(s,p)=L_2\left(f(x,t)\right)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-pt}e^{-sx}f(x,t)dxdt \qquad (67.1)$$

حيث تحويله البسيط معطى بالعلاقة (29.1).

أهم خواص هذا التحويل:

1) خاصة الخطية :

$$L_2\left(\alpha_1 f_1(x,t)+\alpha_2 f_2(x,t)\right)=\alpha_1 L_2\left(f_1(x,t)\right)+\alpha_2 L_2\left(f_2(x,t)\right) \qquad (68.1)$$

2) $$L_2\left(f(x).g(t)\right)=L\left(f(x)\right).L\left(g(t)\right) \qquad (69.1)$$

3) $$L_2\left(f(x)\right)=\frac{1}{p}L\left(f(x)\right) \qquad (70.1)$$

4) $$L_2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=sL_2\left(f(x,t)\right)-L(f(0,t)) \qquad (71.1)$$

5) $$L_2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=pL_2\left(f(x,t)\right)-L(f(x,0)) \qquad (72.1)$$

6) $$L_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=s^2L_2\left(f\right)-sL(f(0,t))-L(f_x(0,t)) \qquad (73.1)$$

7) $$L_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)=p^2L_2\left(f\right)-pL(f(x,0))-L(f_t(x,0)) \qquad (74.1)$$

أما تحويل لابلاس المضاعف لبعض الدوال الأساسية :

$$4)L_2\left(sh(ax+bt)\right)=\frac{ap+bs}{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2-b^2\right)} \qquad (78.1)$$

$$5)L_2\left(ch(ax+bt)\right)=\frac{sp-ab}{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2-b^2\right)} \qquad (79.1)$$

$$6)L_2\left(x^a t^b\right)=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\frac{\Gamma(b+1)}{s^{b+1}} \;\Rightarrow\; L_2(1)=\frac{1}{sp};x>0\,\&\,t>0 \qquad (80.1)$$

أما التحويل العكسي لتحويل لابلاس المضاعف فهو:

$$f(x,t)=L_2^{-1}\left[L_2\left(f(x,t)\right)\right]=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}e^{pt}e^{sx}\bar{\bar{f}}(s,p)dsdp \qquad (81.1)$$

13.1.1. تحويل الزاكي المضاعف : [42]

و هذا التحويل يعطى بالعلاقة :

$$E_2\left(f(x,t)\right)=E_2\left(f(x,t);s,p\right)=s.p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s}}e^{-\frac{t}{p}}f(x,t)dxdt \qquad (82.1)$$

نلاحظ أن ضرب نواة هذا التحويل ناتجة عن ضرب نواة تحويله البسيط بنفسها و لكن بمتغيرين و وسيطين مختلفين و ذلك ضمن تكامل ثنائي معتل .

1.13.1.1. مبرهنة : إن تحويل الزاكي للمشتقات الجزئية للدالة $f(x,t)$ بالنسبة للمتغيرين x و t من المرتبة الأولى و الثانية يعطى بالعلاقات :

$$1)E_2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{1}{s}E_2\left(f(x,t)\right)-sE(f(0,t)) \qquad (83.1)$$

$$2)E_2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\frac{1}{p}E_2\left(f(x,t)\right)-pE(f(x,0)) \qquad (84.1)$$

$$3)E_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{s^2}E_2\left(f\right)-E(f(0,t))-sE(f_x(0,t)) \qquad (85.1)$$

$$4)E_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)=\frac{1}{p^2}E_2\left(f\right)-E(f(x,0))-pE(f_t(x,0)) \qquad (86.1)$$

ملاحظة : إن تحويل الزاكي المضاعف أيضاً يتمتع بخاصة الخطية .

2.13.1.1. تحويل الزاكي المضاعف للدوال التي ستمر بنا في هذا الأطروحة :

$$1)E_2\left(e^{ax+bt}\right)=s.p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s}}e^{-\frac{t}{p}}e^{ax+bt}dxdt=s.p\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{s}-a)x}dx\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{p}-b)t}dt$$

$$=\frac{s.p}{\left(\frac{1}{s}-a\right)\left(\frac{1}{p}-b\right)}=\frac{s^2.p^2}{(1-as)(1-bp)} \qquad (87.1)$$

$$2)E_2\left(\cos(ax+bt)\right)=E_2\left(\frac{e^{i(ax+bt)}+e^{-i(ax+bt)}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s^2.p^2}{(1-ias)(1-ibp)}+\frac{s^2.p^2}{(1+ias)(1+ibp)}\right)$$

$$=\frac{s^2.p^2(1-absp)}{(1+a^2s^2)(1+b^2p^2)} \qquad (88.1)$$

و اعتماداً على العلاقة :

$$\sin(ax+bt)=\frac{e^{i(ax+bt)}-e^{-i(ax+bt)}}{2i}$$

تم إيجاد :

$$E_2\left(\sin(ax+bt)\right)=\frac{s^2.p^2\left(as+bp\right)}{\left(1+a^2s^2\right)\left(1+b^2p^2\right)} \qquad (89.1)$$

$$3)E_2\left(sh(ax+bt)\right)=E_2\left(\frac{e^{(ax+bt)}-e^{-(ax+bt)}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s^2.p^2}{(1-as)(1-bp)}-\frac{s^2.p^2}{(1+as)(1+bp)}\right)$$

$$=\frac{s^2.p^2\left(as+bp\right)}{\left(1-a^2s^2\right)\left(1-b^2p^2\right)} \qquad (90.1)$$

و اعتماداً على العلاقة :

$$ch(ax+bt)=\frac{e^{(ax+bt)}+e^{-(ax+bt)}}{2}$$

تم إيجاد :

$$E_2\left(ch(ax+bt)\right)=\frac{s^2.p^2\left(1-absp\right)}{\left(1-a^2s^2\right)\left(1-b^2p^2\right)} \qquad (91.1)$$

3.13.1.1. التحويل العكسي:

إن التحويل العكسي لتحويل الزاكي المضاعف يعطى بالعلاقة الآتية:

$$f(x,t)=E_2^{-1}\left[E_2\left(f(x,t)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} spe^{pt}e^{sx}E_2\left(f(x,t);\frac{1}{s},\frac{1}{p}\right)dsdp \qquad (92.1)$$

14.1.1. تحويل ميلين المضاعف:[19]

لتكن $f(x,t)$ دالة بمتغيرين حيث: $x>0$ و $t>0$ عندئذ يعطى تحويل ميلين المضاعف لها بالعلاقة:

$$M_2(f(x,t))=M_2(f(x,t);s,p)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)x^{s-1}t^{p-1}dxdt \qquad (93.1)$$

1.14.1.1. تعريف : من أجل $a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $a_1 \le b_1$ و $a_2 \le b_2$

نرمز ب $C_{a_1,a_2}^{b_1,b_2} = \{s,p; s,p \in \mathbb{C}, a_1 \le \operatorname{Re} s \le b_1 \,\&\, a_2 \le \operatorname{Re} p \le b_2\}$،

كما ونرمز ب $H_{a_1,a_2}^{b_1,b_2}$ للفضاء الخطي المؤلف من الدوال f حيث :

$f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{C}$ و تحقق :

$x^{s-1}t^{p-1}f(x,t) \in L_1(\mathbb{R}_+^2)$ من أجل كل $s,p \in C_{a_1,a_2}^{b_1,b_2}$.

2.14.1.1. خواص تحويل ميلين المضاعف :

ليكن $f, f_1, f_2 \in H_{a_1,a_2}^{b_1,b_2}$ عندئذ:

1. الخاصة الأولى (الخطية) :

$$M_2(\alpha f_1(x,t) + \beta f_2(x,t)) = \alpha M_2(f_1(x,t)) + \beta M_2(f_2(x,t)) \qquad (94.1)$$

2. الخاصة الثانية (التحاكي) :

$$M_2(f(ax,bt)) = a^{-s}b^{-b}M_2(f(x,t);s,p) \;; a>0, b>0 \qquad (95.1)$$

3. الخاصة الثالثة (الانسحاب) :

$$M_2(x^a t^b f(x,t)) = M_2(f(x,t); s+a, p+b) \;; a>0, b>0 \qquad (96.1)$$

الخاصة الرابعة (مشتق الصورة) :

$$M_2(\ln x \ln t\, f(x,t)) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial p} M_2(f(x,t);s,p) \qquad (97.1)$$

4. الخاصة الخامسة (مشتق الدالة الأصلية):

$$M_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} f(x,t)\right) = (s-1)(p-1)M_2(f(x,t); s-1, p-1) \qquad (98.1)$$

حيث يوجد σ_1, σ_2 و $\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$ تحقق:

$$\lim_{x\to 0} x^{s-1} f(x,t) = 0 \,,\; \lim_{x\to\infty} x^{s-1} f(x,t) = 0$$

و يوجد α_1, α_2 بحيث $\alpha_1 < \operatorname{Re}(p) < \alpha_2$ تحقق:

$$\lim_{t\to 0} t^{p-1} f(x,t) = 0 \,,\; \lim_{t\to\infty} t^{p-1} f(x,t) = 0$$

5. الخاصة السادسة :

$$1)\; M_2\left[\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x,t)\right] = (-1)^n (s)_n M_2(f;s,p) \qquad (99.1)$$

حيث: $(s)_n = \dfrac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} = s(s+1)\ldots(s+n-1)$

و هي رموز بوخامر (The Pochhammer Symbols)

$$2)\ M_2\left[\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m f(x,t)\right]=(-1)^m(p)_m M_2(f;s,p)$$

6. الخاصة السابعة :

$$M_2\left(\int_0^x\int_0^t f(u,v)dudv\right)=\frac{1}{ps}M_2(f;s+1,p+1) \qquad (100.1)$$

6. الخاصة الثامنة :

$$1)M_2\left(\int_0^\infty\int_0^\infty u^m v^n f(ux,vt)g(u,v)dudv\right)=M_2(f;s,p)M(g;m-s+1,n-p+1) \qquad (101.1)$$

$$2)M_2\left(\int_0^\infty\int_0^\infty u^m v^n f\left(\frac{x}{u},\frac{t}{v}\right)g(u,v)dudv\right)=M_2(f;s,p)M_2(g;m+s+1,n+p+1) \qquad (102.1)$$

$$3)M_2\left(\int_0^\infty\int_0^\infty u^{-1}v^{-1} f\left(\frac{x}{u},\frac{t}{v}\right)g(u,v)dudv\right)=M_2(f;s,p)M_2(g;s,p) \qquad (103.1)$$

3.14.1.1. تلاف ميلين المضاعف :

لتكن الدالتان $f,g:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{C}$ عندئذ تلافهما $f(x,t)**g(x,t)$ يعرف بالعلاقة:

$$f(x,t)**g(x,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty u^{-1}v^{-1}f\left(\frac{x}{u},\frac{t}{v}\right)g(u,v)dudv \qquad (104.1)$$

4.14.1.1. مبرهنة التلاف :

إذا كان $f,g\in H_{a_1,a_2}^{b_1,b_2}$ و $f(x,t)**g(x,t)\in H_{a_1,a_2}^{b_1,b_2}$

عندئذ :

$$M_2\left[f(x,t)**g(x,t)\right]=M_2(f;s,p)M_2(g;s,p) \qquad (105.1)$$

5.14.1.1. تحويل ميلين المضاعف لبعض الدوال الأساسية :

1) **الدالة الأسية :**

$$f(x,t)=e^{-(ax+bt)};\ a>0,b>0$$
$$\Rightarrow M_2(f(x,t))=a^{-s}\Gamma(s)b^{-p}\Gamma(p) \qquad (106.1)$$

$$f(x,t)=\frac{1}{(1+x)^a(1+t)^b} \qquad (2$$

$$\Rightarrow M_2(f(x,t))=\frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-p)\Gamma(s)\Gamma(p)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \qquad (107.1)$$

و كحالة خاصة عندما $a=b=1$ نجد :

$$M_2\left[\frac{1}{(1+x)(1+t)}\right]=\frac{\pi^2}{\sin(\pi s)\sin(\pi p)} \quad ; 0<\mathrm{Re}(s)<1, 0<\mathrm{Re}(p)<1$$

1 . 1 . 15 . طريقة أدومين التفكيكية : (Adomin decomposition method) [15]

هذه الطريقة التقريبية قدمها و طوّرها العالم أدومين في الثمانينيات و ذلك لحل المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية الخطية منها و غير الخطية و جملها هذه الطريقة تنتج حلولاً تقريبية و أخرى على شكل متسلسلة متقاربة إلى الحل المضبوط و ذلك باستخدام علاقات تكرارية و تتلخص هذه الطريقة بتفكيك(تحليل) الدالة المجهولة في المعادلة المعطاة لمجموع لانهائي من الحدود الناتجة من العلاقات التكرارية و سنوضح ذلك بالآتي ، إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية العادية غير الخطية :

$$Lu(x)+Ru(x)+Nu(x)=g(x) \qquad (108.1)$$

حيث Lu حد خطي و Ru هي بقية الحدود الخطية و أما Nu فهي الحدود غير الخطية و $g(x)$ دالة غير متجانسة . لحل هذا النوع من المعادلات التفاضلية غير الخطية بطريقة أدومين التفكيكية نتبع الخطوات الآتية :

نحل المعادلة (108.1) بالنسبة للدالة u أي:

$$Lu=-Ru-Nu+g(x)$$

و منه :

$$u=L^{-1}Lu=L^{-1}[-Ru-Nu+g(x)] \qquad (109.1)$$

لنفرض مثلاً أن : (110.1) $Lu=\frac{d^2u}{dx^2}$ عندئذ :

$$L^{-1}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]=u(x)-u(0)-xu_x(0) \qquad (111.1)$$

حيث L^{-1} هنا هو مؤثر تكاملي من الشكل :

$$L^{-1}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]=\int_0^x\int_0^x\frac{d^2u}{dt^2}dtdt=u(x)-u(0)-xu_x(0) \qquad (112.1)$$

و في هذه الحالة تكون الشروط الابتدائية : (113.1) $u(0)=c_1 \ , \ u_x(0)=c_2$

معطاة بنص المسألة .

و بالتالي مما سبق ينتج :

$$u = u(0) + xu_x(0) + L^{-1}g(x) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \qquad (114.1)$$

الآن لنضع u على شكل متسلسلة غير منتهية :

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) \qquad (115.1)$$

كذلك الأمر:

$$Nu = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(u_0, u_1, u_2, ...) \qquad (116.1)$$

حيث :

$$A_m = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} \qquad (117.1)$$

و هذه الحدود تسمى بحدود أدومين . و نوضح هذه الحدود بالعلاقات الآتية :

$$A_0 = N(u_0)$$

$$A_1 = u_1 N'(u_0)$$

$$A_2 = u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2!}u_1^2 N''(u_0)$$

$$A_3 = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{1}{3!}u_1^3 N''(u_0)$$

.

.

نعوض (115.1) و (116.1) في المعادلة (114.1) .

و حيث : $u_0 = u(0) + xu_x(0) + L^{-1}g(x)$ نجد :

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m = u_0 - L^{-1}R\sum_{m=0}^{\infty} u_m - L^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} A_m \qquad (118.1)$$

و يكون :

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0$$

$$u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1$$

$$u_3 = -L^{-1}Ru_2 - L^{-1}A_2$$

.

.

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n$$

و بالتالي الحل بشكل عام يعطى بالصيغة الآتية :

$$u_0(x) = u(0) + xu_x(0) + L^{-1}g(x) \qquad (119.1)$$

$$u_{n+1}(x) = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \qquad (120.1)$$

و لمزيد من التوضيح سنأخذ المثال الآتي:

مثال: حل المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية الآتية :

$$u_{xx} - uu_{tt} = -x^2 e^{-2t}$$

مع الشروط الحدية: $u(0,t) = 0 \ , \ u_x(0,t) = e^{-t}$

لحل هذه المعادلة نطبّق المؤثر العكسي للمؤثر التفاضلي $L_x L_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ أي :

$$u(x,t) - u(0,t) - xu_x(0,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty uu_{tt} dxdx - \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-2t} dxdx$$

بالمكاملة والاستفادة من الشروط الحدية نجد :

$$u(x,t) = xe^{-t} - \frac{x^4 e^{-t}}{12} + \int_0^x \int_0^x uu_{tt} dxdx$$

و الآن نفرض الحل $u(x,t)$ على شكل مجموع متسلسلة لانهائية:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x,t)$$

حيث إنّ:

$$u_0(x,t) = xe^{-t} - \frac{x^4 e^{-2t}}{12}$$

$$u_{m+1}(x,t) = \int_0^x \int_0^x A_m dxdx$$

A_m هي كثيرات حدود أدومين و التي تمثّل بالشكل: $uu_{tt} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m$

أما مركبات كثيرة الحدود هذه A_m هي :

$$A_0 = u_0 (u_0)_{tt}$$
$$A_1 = u_0 (u_1)_{tt} + u_1 (u_0)_{tt}$$
$$A_2 = u_0 (u_2)_{tt} + u_1 (u_1)_{tt} + u_2 (u_0)_{tt}$$
$$.$$
$$.$$

عندئذ:

$$u_1(x,t) = \int_0^x \int_0^x A_0 dxdx$$
$$= \int_0^x \int_0^x [x^2 e^{-2t} - \frac{5}{12} x^5 e^{-3t} + \frac{1}{36} x^8 e^{-4t}] dxdx$$
$$= \frac{x^4}{12} e^{-2t} - \frac{5}{252} x^7 e^{-3t} + \frac{1}{3240} x^{10} e^{-4t}$$

بإيجاد حدود أخرى أيضاً و جمع هذه الحدود ضمن المتسلسلة سنجد أن جميع الحدود يوجد لها نظير و بالتالي سيكون الحل للمسألة المعطاة هو : $u(x,t)=xe^{-t}$

ملاحظة :

يمكن تعميم الطريقة السابقة بنفس الخطوات لحل جمل معادلات تفاضلية عادية و جزئية خطية و غير خطية يمكن للقارئ العودة للمرجع [3] .

16.1.1. طريقة التغاير التكرارية (VIM) :[3 و4]

طوّرت هذه الطريقة العالمة (Ji–Huan,He) وفي السنوات الأخيرة تم تكريس الاهتمام لتطوير الطريقة المدروسة و العمل بها لإيجاد الحل المضبوط للمعادلة التفاضلية غير الخطية و أيضاً لما لهذه الطريقة من تطبيقات واسعة في حل المعادلات التكاملية غير الخطية و جمل المعادلات التفاضلية غير الخطية. هذا و تعتمد هذه الطريقة على تكرارات محددة و دالة التصحيح (correction function) يكون الحل على شكل نهاية لحد عام مستنبط من التكرارات التي نحصل عليها، سنقوم بعرض هذه الطريقة للتوضيح لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$L_t u(x,t)+Ru(x,t)+Nu(x,t)=g(x,t) \qquad (121.1)$$

مع الشرط الابتدائي $u(x,0)=f(x)$ حيث $L_t=\frac{\partial}{\partial t}$ و R فهو مؤثر تفاضلي خطي في حين $Nu(x,t)$ حدود غير خطية $g(x,t)$ حدود غير متجانسة، ووفقاً لطريقة التغاير التكرارية لحل هذه المعادلة نستطيع تركيب دالة التصحيح (correction function) وفق الصيغة التكرارية الآتية :

$$u_{m+1}(x,t)=u_m(x,t)+\int_0^t \lambda(\tau)\{L_t\tilde{u}_m(x,\tau)+R\tilde{u}_m(x,\tau)+N\tilde{u}_m(x,\tau)-g(x,\tau)\}d\tau$$

حيث λ هي مضروب لاغرانج و التي تعرّف بشكل مثالي بنظرية التغاير،أما الدليل m فيشير إلى التقريب من المرتبة m، $\tilde{u}_m$ تعتبر كتغاير محدد بمعنى : $\delta\tilde{u}_m=0$.

إنّ التقريب u_{m+1} حيث $m\geq 0$ للدالة $u(x,t)$ يمكن الحصول عليه من خلال إيجاد مضروب لاغرانج و الاعتماد على الدالة الاختيارية u_0 و بالنتيجة سيكون الحل:

$$u(x,t)=\lim_{m\to\infty}u_m(x,t) \qquad (123.1)$$

مثال: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية :

$$u_t-u_{xx}+2u^3=0$$

مع الشرط الابتدائي : $u(x,0)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+10}$

اعتماداً على طريقة VIM لحل هذه المسألة نستطيع تحديد دالة التصحيح للمعادلة المعطاة كالآتي :

$$u_{m+1}(x,t)=u_m(x,t)+\int_0^t \lambda(\tau)\{[\tilde{u}_m(x,\tau)]_\tau+[\tilde{u}_m(x,\tau)]_{xx}-2[\tilde{u}_m(x,\tau)]^3\}d\tau$$

نستطيع إيجاد λ مضروب لاغرانج و ذلك باعتبار $(\tilde{u}_m)_{xx}$ و $(\tilde{u}_m)^3$ كتغاير اختياري بمعنى $(\delta\tilde{u}_m)_{xx}=(\delta\tilde{u}_m)^3=0$ و بعد ذلك نكامل النتيجة بالتجزئة فنحصل على $\lambda=-1$.

و ستعطى عندئذ دالة التصحيح بالعلاقات التكرارية الآتية :

$$u_{m+1}(x,t)=u_m(x,t)-\int_0^t [\tilde{u}_m(x,\tau)]_\tau+[\tilde{u}_m(x,\tau)]_{xx}-2[\tilde{u}_m(x,\tau)]^3 d\tau$$

و بالنتيجة باستخدام النتيجة أعلاه مع الشرط الابتدائي سنحصل على الحدود :

$$u_0(x,t)=\frac{2x+1}{x^2+x+10}$$

$$u_1(x,t)=\frac{2x+1}{x^2+x+10}-\frac{6(2x+1)t}{(x^2+x+10)^2}$$

$$u_3(x,t)=\frac{2x+1}{x^2+x+10}-\frac{6(2x+1)t}{(x^2+x+10)^2}+\frac{36(2x+1)t^2}{(x^2+x+10)^3}$$

$$\Rightarrow u_m(x,t)=\frac{2x+1}{x^2+x+10}-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\left(\frac{6t}{x^2+x+10}\right)^k$$

و بذلك سيكون الحل :

$$u(x,t)=\lim_{m\to\infty}u_m(x,t)$$

$$=\frac{2x+1}{x^2+x+10}\cdot\frac{1}{1+\frac{6t}{x^2+x+10}}=\frac{2x+1}{x^2+x+6t+10}$$

أهم النقاط التي وردت في الفصل الأول:

1. دراسة مفاهيم و تعاريف و مبرهنات أساسية تم الاستفادة منها في هذا العمل.
2. دراسة موجزة عن تحويلات لابلاس و الزاكي و ميلين البسيطة و تحويلاتها المضاعفة كتحويل لابلاس المضاعف و الزاكي المضاعف كذلك ميلين المضاعف ، حيث أن تلك التحويلات البسيطة كانت أساساً في استنباط تحويلات مضاعفة مختلطة جديدة في أطروحة الدكتوراه .
3. دراسة دوال أساسية كدالة غاما و زيتا و ميتاغ–ليفلر اعتمدنا عليها في نتائجنا .
4. تطرقنا إلى طرق تقريبية لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية لنقوم بدمجها مع التحويلات التكاملية المضاعفة الجديدة للحصول على تقنيات فعالة عند التعامل مع هذا النوع من المعادلات و جملها.

الفصل الثاني

تحويل لا بلاس–الزاكي و خواصه مع تطبيقاته

ندرس في هذا الفصل تحويلاً تكاملياً مضاعفاً جديداً نواته عبارة عن جداء نواتي تحويليين تكامليين بسيطين مختلفين هما تحويلا لابلاس و الزاكي و هو تحويل لابلاس–الزاكي التكاملي حيث عرفنا هذا التحويل من خلال تكامل ثنائي و أيضاً درسنا خواصه مع إثباتها كذلك سلطنا الضوء على التلاف المضاعف إضافة لمبرهنات معززة بالإثبات للاستفادة مما سبق في تطبيقات هذا التحويل لحل معادلات تفاضلية جزئية خطية و غير خطية من مراتب صحيحة و كسرية و جملها كذلك معادلات تكاملية خطية و غير خطية بنواة مستمرة أو شاذة .و عندما واجهنا عقبات لحل المعادلات غير الخطية باستخدام التحويل المحدث لجأنا لدمج هذا التحويل المضاعف مع طرائق تقريبية لنحصل على طرائق سهلة و فعّالة لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية و جملها ووضحنا كل ذلك بتطبيقات و أمثلة.

1.2.تعريف تحويل لابلاس–الزاكي (LET) :

لتكن لدينا الدالة $f\ (x,t)$ دالة بمتغيرين x و t معرفة في الربع الأول من المستوي $(x\ -t)$ عندئذ تحويل لابلاس–الزاكي لها يعطى بتكامل ثنائي من الشكل:

$$\overline{\overline{f}}\ (s,p) = L_x E_t\left(f\ (x,t)\right)$$

$$= LE\left(f\ (x,t)\right) = p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}} f\ (x,t)dxdt \qquad (1.2)$$

حيث إن $e^{-sx-\frac{t}{p}}$ تسمى نواة تحويل لابلاس–الزاكي

2.2. شروط وجود تحويل لابلاس–الزاكي:

إذا كانت الدالة $f\ (x,t)$ دالة معرفة و مستمرة قطعياً على $[0,\infty[\times[0,\infty[$ و ذات مرتبة أسية أي يوجد ثوابت $a>0$ و $b=\frac{1}{c}>0$ و $k>0$ تتحقق المتراجحة :

$$|f(x,t)| \le ke^{ax+bt} \qquad (2.2)$$

و هذا يكافىء أنّ :

$$\mathrm{f(x,t)} = o(e^{ax+bt}) \quad \text{عندما} \quad x\to\infty\ , t\to\infty \qquad (3.2)$$

فإذا تحقق ما سبق يكون تحويل لابلاس–الزاكي للدالة $f\ (x,t)$ موجوداً من أجل كل s و p تحققان : $Re(s)>a\ , Re\left(\frac{1}{p}\right)>\frac{1}{c}$.

3.2. خواص تحويل لابلاس–الزاكي:

لتكن $f(x,t)$ دالة تحقق شروط الوجود لتحويل لابلاس–الزاكي لها عندئذ يمكن إثبات الخواص الآتية والمشابهة لخواص تحويل لا بلاس البسيط :

1.3.2. خاصة الخطية: يتمتع تحويل لابلاس–الزاكي بخاصة الخطية حيث:

$$LE\big(\alpha f(x,t)+\beta g(x,t)\big)=\alpha LE\big(f(x,t)\big)+\beta LE\big(g(x,t)\big) \qquad (4.2)$$

الإثبات:

$$LE\big(\alpha f(x,t)+\beta g(x,t)\big)=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}\,[\,\alpha f(x,t)+\beta g(x,t)]dxdt$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}\alpha f(x,t)dxdt+p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}\beta g(x,t)dxdt$$

$$=\alpha p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}f(x,t)dxdt+\beta p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}g(x,t)dxdt$$

$$=\alpha LE\big(f(x,t)\big)+\beta LE\big(g(x,t)\big)$$

2.3.2. خاصة الإزاحة (الانسحاب):(Shifting)

$$LE\left(e^{(ax+bt)}f(x,t)\right)=(1-bp)LE\left(s-a,\frac{p}{1-bp}\right) \qquad (5.2)$$

الإثبات :

$$LE\big(e^{(ax+bt)}f(x,t)\big)=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}e^{(ax+bt)}f(x,t)dxdt$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{p}-b)t}\,e^{-(s-a)x}f(x,t)dxdt$$

نفرض $q=\frac{p}{1-bp}$ عندئذ:

$$LE\big(e^{(ax+bt)}f(x,t)\big)=(1-bp)q\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{t}{q}}e^{-(s-a)x}f(x,t)dxdt$$

$$=(1-bp)LE(s-a,q)=(1-bp)LE\left(s-a,\frac{p}{1-bp}\right)$$

3.3.2. خاصة الاشتقاق:(Derivative)

لتكن $f(x,t)$ دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق جزئياً بالنسبة للمتغيرين x و t، ليكن $\bar{\bar{f}}(s,p)=LE\big(f(x,t)\big)$ عندئذ:

$$a)\ LE\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)=s\bar{\bar{f}}(s,p)-E\big(f(0,t)\big) \qquad (6.2)$$

الإثبات:

$$LE\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right) = p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}\,\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dxdt$$

$$= p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx$$

بالمكاملة بالتجزئة حيث $u = e^{-sx}\,, dv = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx$ نجد:

$$LE\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right) = p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left[e^{-sx}f(x,t)\Big|_{x=0}^{\infty} + s\int_0^\infty e^{-sx}f(x,t)dx\right]$$

$$= -E\big(f(0,t)\big) + s\bar{\bar{f}}\,(s,p)$$

$$b)\ LE\left(\frac{\partial f\ (x,t)}{\partial t}\right) = \frac{1}{p}\bar{\bar{f}}\,(s,p) - pL\big(f\ (x,0)\big) \quad (7.2)$$

الإثبات:

$$LE\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right) = p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}\,\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dxdt$$

$$= p\int_0^\infty e^{-sx}dx\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt$$

بفرض $u = e^{-\frac{t}{p}}\,,\ dv = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt$ عندئذ:

$$LE\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right) = p\int_0^\infty e^{-sx}dx\left[e^{-\frac{t}{p}}f(x,t)\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}f(x,t)dt\right]$$

$$= -pL\big(f(x,0)\big) + \frac{1}{p}\bar{\bar{f}}\,(s,p)$$

$$c)\ LE\left(\frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial x\,\partial t}\right) = \frac{s}{p}\bar{\bar{f}}\,(s,p) - spL\big(f\ (x,0)\big) - E\big(f_t\,(0,t)\big) \quad (8.2)$$

الإثبات:

$$LE\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\partial t}\right) = p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}\,\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\partial t}dxdt$$

$$= p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\int_0^\infty e^{-sx}\,\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\partial t}dx$$

بفرض $u = e^{-sx}\,,\ dv = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\partial t}dx$ عندئذ $du = -se^{-sx}dx\,,\ v = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$

و منه:

$$LE\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\partial t}\right)=p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left\{\left[e^{-sx}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-sx}\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx\right\}$$

$$=sLE\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)-E\big(f_t(0,t)\big)$$

بالاستفادة من العلاقة (7.2) نجد :

$$LE\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\partial t}\right)=s\left[\frac{1}{p}LE\big(f(x,t)\big)-pL(f(x,0))\right]-E\big(f_t(0,t)\big)$$

$$=\frac{s}{p}\bar{\bar{f}}\ (s,p)-spL\big(f(x,0)\big)-E\big(f_t(0,t)\big)$$

$$d)\quad LE\left(\frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial x^2}\right)=s^2\bar{\bar{f}}\ (s,p)-sE\left(f\ (0,t)\right)-E\left(f_x\ (0,t)\right)\quad (9.2)$$

الإثبات :

$$LE\left(\frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial x^2}\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}\ \frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial x^2}dxdt$$

$$=p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\int_0^\infty e^{-sx}\ \frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial x^2}dx$$

بالمكاملة بالتجزئة حيث $u=e^{-sx}\ ,\ dv=\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial^2 x}dx$:

$$LE\left(\frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial x^2}\right)=p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left[\left[\frac{\partial f\ (x,t)}{\partial x}e^{-sx}\right]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-sx}\ \frac{\partial f\ (x,t)}{\partial x}dx\right]$$

$$=-E\left[f_x\ (0,t)\right]+sLE\left[\frac{\partial f\ (x,t)}{\partial x}\right]$$

بالتعويض بالعلاقة (6.2) نجد:

$$LE\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right)=s^2\bar{\bar{f}}\ (s,p)-sE\big(f(0,t)\big)-E\big(f_x(0,t)\big)$$

$$e)LE\left(\frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial t^2}\right)=\frac{1}{p^2}\bar{\bar{f}}\ (s,p)-L\left(f\ (x,0)\right)-pL\left(f_t\ (x,0)\right)\quad (10.2)$$

الاثبات

$$LE\left(\frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial t^2}\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}\ \frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial t^2}dxdt$$

$$=p\int_0^\infty e^{-sx}dx\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}\ \frac{\partial^2 f\ (x,t)}{\partial t^2}dt$$

بالمكاملة بالتجزئة حيث $u = e^{-\frac{t}{p}},\ dv = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial^2 t}dx$:

$$LE\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right) = p\int_0^\infty e^{-sx}dx\left[\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}e^{-\frac{t}{p}}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt\right]$$

$$= -pE\left[f_t(x,0)\right] + \frac{1}{p}LE\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right]$$

بالتعويض بالعلاقة (7.2) نجد:

$$LE\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{p^2}\bar{\bar{f}}(s,p) - L\big(f(x,0)\big) - pL\big(f_t(x,0)\big)$$

2 .3 .4 الخاصة الرابعة (مشتق الصورة) :

إذا كانت $f(x,t)$ هي دالة الأصل فعندئذ نسمي $LE\left[f(x,t)\right]$ بصورة $f(x,t)$ وفق المؤثر الذي هو تحويل لابلاس–الزاكي:

$$1)\quad LE\big(tf(x,t)\big) = p^2\frac{\partial}{\partial p}LE\big(f(x,t)\big) - pLE\big(f(x,t)\big) \qquad (11.2)$$

الإثبات:

$$\frac{\partial}{\partial p}LE(f) = \frac{\partial}{\partial p}\left[p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt\right]$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt + \frac{1}{p}\int_0^\infty\int_0^\infty tf(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$= \frac{1}{p}LE\big(f(x,t)\big) + \frac{1}{p^2}LE\big(tf(x,t)\big)$$

مما سبق نجد : $LE\big(tf(x,t)\big) = p^2\frac{\partial}{\partial p}LE\big(f(x,t)\big) - pLE\big(f(x,t)\big)$

$$2)\qquad LE\left(t^2 f(x,t)\right) = p^4\frac{\partial^2}{\partial p^2}LE\big(f(x,t)\big) \qquad (12.2)$$

الإثبات:

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}LE\big(f(x,t)\big) = \frac{\partial^2}{\partial p^2}\left[p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial p}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt + \frac{1}{p}\int_0^\infty\int_0^\infty tf(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt\right]$$

$$= \frac{1}{p^3}\int_0^\infty \int_0^\infty t^2 f(x,t) e^{-sx-\frac{t}{p}} dxdt$$

$$= \frac{1}{p^4} LE(t^2 f(x,t))$$

مما سبق نجد :

$$LE\left(t^2 f(x,t)\right) = p^4 \frac{\partial^2}{\partial p^2} LE(f(x,t))$$

3) $$LE\left(t^3 f(x,t)\right) = p^6 \frac{\partial^3}{\partial p^3} LE(f(x,t)) + 3p^5 \frac{\partial^2}{\partial p^2} LE(f(x,t)) \quad (13.2)$$

الاثبات

$$\frac{\partial^3}{\partial p^3} LE(f(x,t)) = \frac{\partial^3}{\partial p^3}\left[p\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) e^{-sx-\frac{t}{p}} dxdt \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{p^3}\int_0^\infty \int_0^\infty t^2 f(x,t) e^{-sx-\frac{t}{p}} dxdt \right]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{-3t^2}{p^4} + \frac{t^3}{p^5} \right] f(x,t) e^{-sx-\frac{t}{p}} dxdt$$

$$= \frac{-3}{p^5} LE(t^2 f(x,t)) + \frac{1}{p^6} LE(t^3 f(x,t))$$

بالاستفادة من العلاقة (11.2) نجد :

$$LE\left(t^3 f(x,t)\right) = \frac{-3}{p^5}\left[p^4 \frac{\partial^2}{\partial p^2} LE(f(x,t)) \right] + \frac{1}{p^6} LE(t^3 f(x,t))$$

و بالمثل سنجد :

4) $$LE\left(t^4 f(x,t)\right) = p^8 \frac{\partial^4}{\partial p^4} LE(f(x,t)) + 8p^7 \frac{\partial^3}{\partial p^3} LE(f(x,t)) + 12p^6 \frac{\partial^2}{\partial p^2} LE(f(x,t)) \quad (14.2)$$

وبشكل عام يكون لدينا من أجل $n \geq 2$:

$$LE\left(t^n f(x,t)\right) = p^{2n}\frac{\partial^n}{\partial p^n}LE(f(x,t)) + \frac{n!}{n-1}p^{2n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}}LE(f(x,t)) +$$

$$+\frac{n!}{n-2}p^{2n-2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial p^{n-2}}LE(f(x,t)) + \ldots + \frac{n!}{2}p^{n+2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}LE(f(x,t)) \quad (15.2)$$

5) $$LE\left(xf(x,t)\right) = -\frac{\partial}{\partial s}LE(f(x,t)) \quad (16.2)$$

الاثبات

$$\frac{\partial}{\partial s}LE(f) = \frac{\partial}{\partial s}\left[p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt\right]$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty -x\,f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$= -LE(x\,f(x,t))$$

و منه :

$$LE\left(xf(x,t)\right) = -\frac{\partial}{\partial s}LE(f(x,t))$$

6) $$LE\left(x^2 f(x,t)\right) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}LE(f(x,t)) \quad (17.2)$$

الإثبات:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}LE(f) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt\right]$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty x^2 f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt = LE(x^2 f(x,t))$$

و بالتالي ينتج:

$$LE\left(x^2 f(x,t)\right) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}LE(f(x,t))$$

وهكذا يكون من أجل $n = 1, 2, \ldots\ldots$

$$LE\left(x^n f(x,t)\right) = (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial s^n}LE(f(x,t)) \quad (18.2)$$

ملاحظة: هذه الخواص تفيدنا في حل معادلات تفاضلية جزئية ذات أمثال متغيرة باستخدام تحويل لابلاس–الزاكي.

2 .3 .5 خاصة التحاكي:

$$LE\left(f\ (\alpha x\ ,\beta t)\right)=\frac{1}{\alpha\beta}LE\left(f\ (x\ ,t);\frac{s}{\alpha},\beta p\right)\qquad(19.2)$$

الإثبات:

$$LE\,(f\ (\alpha x\ ,\beta t))=p\int_0^\infty\int_0^\infty f\ (\alpha x\ ,\beta t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

بفرض : $\alpha x\ =y\ \ ,\ \ \beta t=z$ عندئذ:

$$LE\,(f\ (\alpha x\ ,\beta t))=p\int_0^\infty\int_0^\infty f\ (y\ ,z\ )e^{-\frac{s}{\alpha}y-\frac{z}{p\beta}}\frac{dy}{\alpha}\frac{dz}{\beta}$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}LE\left(f\ (x\ ,t);\frac{s}{\alpha},\beta p\right)$$

2 .3 .6 خاصة التأخير:

$$LE\left(f\ (x\ -x_0,t\ -t_0)\right)=e^{-sx_0-\frac{t_0}{p}}LE\left(f\ (x\ ,t)\right)\qquad(20.2)$$

الإثبات:

$$LE\left(f\ (x\ -x_0,t\ -t_0)\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty f\ (x\ -x_0,t\ -t_0)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty f\ (x\ -x_0,t\ -t_0)e^{-sx-\frac{t}{p}}d\,(x\ -x_0)d\,(t\ -t_0)$$

بالتالي:

$$x\ -x_0\ \geq 0\Rightarrow x\ \geq x_0$$
$$t\ -t_0\ \geq 0\Rightarrow t\ \geq t_0$$

عندئذ يكون :

$$LE\left(f\ (x\ -x_0,t\ -t_0)\right)=p\int_{x_0}^\infty\int_{t_0}^\infty f\ (x\ -x_0,t\ -t_0)e^{-sx-\frac{t}{p}}d\,(x\ -x_0)d\,(t\ -t_0)$$

بفرض : $x\ -x_0\ =u\ \ ,t\ -t_0\ =v$ نجد :

$$LE\left(f\ (x\ -x_0,t\ -t_0)\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty f\ (u,v\ )e^{-s\,(u+x_0)-\frac{(v\ +t_0)}{p}}dudv$$

$$=e^{-sx_0-\frac{t_0}{p}}LE\left(f\ (x\ ,t)\right)$$

7. 3. 2 خاصة المكاملة:

$$LE\left(\int_0^x\int_0^t f(x,t)dxdt\right)=\frac{p}{s}LE\left(f(x,t)\right) \qquad (21.2)$$

الإثبات:

$$LE\left(\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right]e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$=p\int_0^\infty e^{-sx}dx\left\{\int_0^x d\zeta\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}\left[\int_0^t f(\zeta,\eta)d\eta\right]dt\right\}$$

نفرض :

$$u=\int_0^t f(\zeta,\eta)d\eta\Rightarrow du=f(\zeta,t)dt$$

$$dv=e^{-\frac{t}{p}}dt\Rightarrow v=-pe^{-\frac{t}{p}}$$

و بالتالي:

$$LE\left(\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right)=p\int_0^\infty e^{-sx}dx\left\{\int_0^x d\zeta\left[\underbrace{-pe^{-\frac{t}{p}}\int_0^t f(\zeta,\eta)d\eta\Big|_{t=0}^{\infty}}_{=0}+p\int_0^\infty f(\zeta,t)e^{-\frac{t}{p}}dt\right]\right\}$$

$$=p\int_0^\infty e^{-sx}dx\left\{\int_0^x d\zeta\left[p\int_0^\infty f(\zeta,t)e^{-\frac{t}{p}}dt\right]\right\}$$

$$=p^2\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left\{\int_0^\infty e^{-sx}\left[\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta\right]dx\right\}$$

بفرض:

$$u=\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta\Rightarrow du=f(x,t)dx$$

$$dv=e^{-sx}dx\Rightarrow v=-\frac{1}{s}e^{-sx}$$

و منه يكون :

$$LE\left(\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right)=p^2\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left\{\underbrace{-\frac{1}{s}e^{-sx}\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta\Big|_{x=0}^{\infty}}_{=0}+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}f(x,t)dx\right\}$$

$$=\frac{p^2}{s}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}f(x,t)dxdt=\frac{p}{s}LE\left(f(x,t)\right)$$

2 .4 . مبرهنة القيمة الابتدائية:

يمكن إيجاد القيمة الابتدائية لدالة $f(x,t)$ في اللحظة $t=0$ و ذلك وفق العلاقة الآتية:

$$f(x,0)=L^{-1}\left[\lim_{p\to o}\frac{1}{p^2}LE\left(f(x,t)\right)\right] \qquad (22.2)$$

الإثبات: من العلاقة (7.2) لدينا:

$$LE\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}f(x,t)dxdt$$

$$=\frac{1}{p}LE\left(f(x,t)\right)-pL\left(f(x,0)\right)$$

و بالتالي:

$$L\left(f(x,0)\right)=\frac{1}{p^2}LE\left(f(x,t)\right)-\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}f(x,t)dxdt$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $p\to 0$:

$$L\left(f(x,0)\right)=\lim_{p\to 0}\frac{1}{p^2}LE\left(f(x,t)\right)$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي العلاقة الأخيرة يتم إثبات المبرهنة.

2 . 5 .تحويل لابلاس–الزاكي لبعض الدوال الأساسية:

1) $f(x,t)=x^a t^b; x>0 \,\&\, t>0$

$$LE\left(x^a t^b\right)=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}p^{b+2}\Gamma(b+1) \qquad (23.2)$$

حيث $b>-1$ و $a>-1$ هي أعداد حقيقية.

الإثبات:

$$LE(x^a t^b)=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}x^a t^b dxdt$$

$$=p\int_0^\infty e^{-sx}x^a dx\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}t^b dt$$

نفرض : $sx=u\Rightarrow dx=\frac{du}{s}\ ,\ \frac{t}{p}=v\Rightarrow dt=pdv$ و منه :

$$LE(x^a t^b)=p\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^a\frac{du}{s}\int_0^\infty e^{-v}(pv)^b\frac{dv}{p}$$

$$=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}p^{b+2}\Gamma(b+1)$$

كحالة خاصة :

$$LE(1) = \frac{p^2}{s} \qquad (24.2)$$

أما في حال كانت b و a أعداداً طبيعية فعندئذ يكون:

$$LE(x^a t^b) = \frac{a!\,b!}{s^{a+1}} p^{b+2} \qquad (25.2)$$

لتكن $f\left(x،t\right) = e^{(ax+bt)}$ و منه :

$$2)\ \ LE\left(e^{(ax+bt)}\right) = \frac{p^2}{(s-a)(1-bp)} \qquad (26.2)$$

$$LE\left(e^{(ax+bt)}\right) = p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}} e^{(ax+bt)} dxdt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)x}\, dx \int_0^\infty pe^{-(\frac{1}{p}-b)t}\, dt$$

بفرض $(s-a)x = u\ ,\ \left(\frac{1}{p}-b\right)t = v$ عندئذ:

$$LE\left(e^{(ax+bt)}\right) = p\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{s-a}\int_0^\infty e^{-v}\frac{dv}{\frac{1}{p}-b}$$

$$= \frac{p^2}{(s-a)(1-bp)}$$

و بشكل مشابه :

$$LE\left(e^{i(ax+bt)}\right) = \frac{p^2}{(s-ia)(1-ibp)} \qquad (27.2)$$

(3)

نحن نعلم أن :

$$\sin(ax+bt) = \frac{e^{i(ax+bt)} - e^{-i(ax+bt)}}{2i} \qquad (28.2)$$

$$\cos(ax+bt) = \frac{e^{i(ax+bt)} + e^{-i(ax+bt)}}{2} \qquad (29.2)$$

من خاصة الخطية لتحويل لابلاس–الزاكي و المعادلات (26.2)، (27.2) ، (28.2) ،(29.2) نجد:

$$\mathrm{LE}[\sin(ax+bt)] = LE\left[\frac{e^{i(ax+bt)} - e^{-i(ax+bt)}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[LE\left(e^{i(ax+bt)}\right) - LE\left(e^{-i(ax+bt)}\right)\right]$$

$$= \frac{ap^2 + sbp^3}{(s^2+a^2)(1+b^2p^2)} \qquad (30.2)$$

$$\mathrm{LE}[\cos(ax+bt)] = LE\left[\frac{e^{i(ax+bt)} + e^{-i(ax+bt)}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[LE\left(e^{i(ax+bt)}\right) + LE\left(e^{-i(ax+bt)}\right)\right]$$

$$= \frac{sp^2 - abp^3}{(s^2+a^2)(1+b^2p^2)} \qquad (31.2)$$

و بشكل مشابه أيضاً :

$$\sinh(ax+bt) = \frac{e^{(ax+bt)} - e^{-(ax+bt)}}{2} \qquad (32.2)$$

$$\cosh(ax+bt) = \frac{e^{(ax+bt)} + e^{-(ax+bt)}}{2} \qquad (33.2)$$

و منه :

$$\mathrm{LE}[\sinh(ax+bt)] = \frac{ap^2 + sbp^3}{(s^2-a^2)(1-b^2p^2)} \qquad (34.2)$$

$$\mathrm{LE}[\cosh(ax+bt)] = \frac{sp^2 - abp^3}{(s^2-a^2)(1-b^2p^2)} \qquad (35.2)$$

(4)

$$LE\left(J_0(a\sqrt{xt})\right) = p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}} J_0(a\sqrt{xt})\,dx\,dt$$

$$= p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}\,dt \int_0^\infty e^{-sx} J_0(a\sqrt{xt})\,dx$$

$$= \frac{p}{s}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} e^{-\frac{a^2t}{4s}}\,dt = \frac{1}{s}E\left(e^{-\frac{a^2t}{4s}}\right)$$

$$= \frac{p^2}{s(1+\frac{a^2}{4s}p)} = \frac{4p^2}{4s+a^2p} \qquad (36.2)$$

حيث $J_0(x)$ هي دوال بيسل من المرتبة صفر و لها الصيغة:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \qquad (37.2)$$

5) $$LE\left[H\left(x-x_0,t-t_0\right)\right] = p\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx-\frac{t}{p}} H\left(x-x_0,t-t_0\right)dxdt$$

$$= \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx}dx \int_{t_0}^{\infty} pe^{-\frac{t}{p}}dt$$

$$= p^2 e^{-\frac{y_0}{p}} \frac{e^{-sx_0}}{s} \qquad (38.2)$$

حيث $H(x-x_0,t-t_0)$ هي دالة هيفيسايد(Heaviside) التي تعرف بالعلاقة:

$$H(x-x_0,t-t_0) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \geq x_0 \text{ and } t \geq t_0 \\ 0 & ; \quad x < x_0 \text{ and } t < t_0 \end{cases} \qquad (39.2)$$

(6) دالة النبضة الواحدية (دالة دلتا– ديراك): تعرّف هذه الدالة بأنها :

$$\delta(x-a,t-b) = \lim_{\substack{k\to 0\\ m\to 0}} f_{k,m}(x,t) \qquad (40.2)$$

حيث إن :

$$f_{k,m}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{km}; & a \leq x \leq a+k \;\&\; b \leq t \leq b+m \\ 0 \;; & \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (41.2)$$

و منه تكون :

$$\delta(x-a,t-b) = \begin{cases} \infty & ; \quad x = a \,\&\, t = b \\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك} \end{cases} \qquad (42.2)$$

عندئذ:

$$LE\left[\delta(x-a,t-b)\right] = pe^{-(sa+\frac{b}{p})} \qquad (43.2)$$

الإثبات :

$$LE\left(f_{k,m}(x,t)\right) = p\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_{k,m}(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$= p\int_a^{a+k}\int_b^{b+m} f_{k,m}(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$= \frac{p}{km}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_a^{a+k}\left[-pe^{-\frac{t}{p}}\right]_b^{b+m}$$

$$= \frac{p}{km}\left[-\frac{1}{s}e^{-s(a+k)} + \frac{1}{s}e^{-sa}\right]\left[-pe^{-\frac{b+m}{p}} + pe^{-\frac{b}{p}}\right]$$

$$= pe^{-sa}e^{-\frac{b}{p}}\left[\frac{1-e^{-sx}}{ks}\right]\left[\frac{p-pe^{-\frac{m}{p}}}{\frac{m}{p}}\right]$$

بالاعتماد على العلاقة(40.2) :

$$LE\left[\delta(x-a,t-b)\right] = pe^{-(sa+\frac{b}{p})}$$

حالة خاصة : إذا كانت $a=b=0$ فعندئذ :

$$LE\left[\delta(x,t)\right] = p$$

6 .2 مبرهنة: إذا كانت $f(x,t)$ دالة دورية أي تحقق :

$$f(x,t) = f(x+a,t+b)$$

وأيضاً هذه الدالة تحقق شروط وجود تحويل لابلاس–الزاكي لها عندئذ :

$$LE\left(f(x,t)\right) = p\left[1-e^{-sa-\frac{b}{p}}\right]^{-1}\int_0^a\int_0^b f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt \qquad (44.2)$$

الاثبات :

$$LE\left(f(x,t)\right) = p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$= p\int_0^a\int_0^b f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt + p\int_a^\infty\int_b^\infty f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

لنفرض $u=x-a, v=t-b$ عندئذ :

$$LE\left(f(x,t)\right) = p\int_0^a\int_0^b f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt + pe^{-sa-\frac{b}{p}}\int_0^\infty\int_0^\infty f(u+a,v+b)e^{-su-\frac{v}{p}}dudv$$

بما أن $f(x,t)$ دالة دورية :

$$LE\left(f(x,t)\right)=p\int_0^a\int_0^b f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt+pe^{-sa-\frac{b}{p}}\int_0^\infty\int_0^\infty f(u,v)e^{-su-\frac{v}{p}}dudv$$

$$=p\int_0^a\int_0^b f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt+pe^{-sa-\frac{b}{p}}LE(f(x,t))$$

$$=p\left[1-e^{-sa-\frac{b}{p}}\right]^{-1}\int_0^a\int_0^b f(x,t)e^{-sx-\frac{t}{p}}dxdt$$

2 . 7.مبرهنة : لتكن $f(x,t)=g(x)h(t)$ اي دالة مفصولة المتغيرات عندئذ :

$$LE\left(f(x,t)\right)=L\left(g(x)\right)E\left(h(t)\right) \qquad (45.2)$$

الاثبات:

$$LE\left(f(x,t)\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}g(x)h(t)dx\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx\int_0^\infty pe^{-\frac{t}{p}}h(t)dt$$

$$=L\left(g(x)\right)E\left(h(t)\right)$$

2 . 8 .التحويل العكسي لتحويل لابلاس–الزاكي:

إذا كان $LE\left(f(x,t)\right)=\overline{\overline{f}}(s,p)$ فعندئذ و حسب صيغة بروميتش العكسية [26] يكون تحويل لابلاس–الزاكي العكسي معطى بالتكامل العقدي الآتي :

$$f(x,t)=LE^{-1}\left(\overline{\overline{f}}(s,p)\right)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}p\,e^{sx+pt}\,\overline{\overline{f}}(s,\frac{1}{p})ds\,dp \qquad (46.2)$$

2 . 8 . 1 .حالة خاصة :

إذا كان $LE\left(f(x,t)\right)=\overline{\overline{f}}(s,p)=L(g(x))E(h(t))=L(s)E(p)$

عندئذ يمكن استخدام مبرهنة الرواسب عند لإيجاد التحويل العكسي لتحويل لابلاس–الزاكي كالآتي:

$$f(x,t)=LE^{-1}\left(\overline{\overline{f}}(s,p)\right)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}p\,e^{sx+pt}\,L(s)E(\frac{1}{p})ds\,dp$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_i}\left[e^{sx}L(s)\right].\sum_{j=1}^{m}\operatorname*{Res}_{p=p_j}\left[pe^{pt}E\left(\frac{1}{p}\right)\right] \qquad (47.2)$$

حيث : $s_1,s_2,.....,s_n$ و $p_1,p_2,.....,p_m$ هي أقطاب للدالة :

$$p\overline{\overline{f}}(s,\frac{1}{p})=pL(s)E\left(\frac{1}{p}\right)$$

ملاحظة : يتمتع تحويل لابلاس–الزاكي العكسي بخاصة الخطية أيضاً أي :

$$LE^{-1}\left[\alpha\overline{\overline{f}}(s,p)+\beta\overline{\overline{g}}(s,p)\right]=\alpha LE^{-1}\left[\overline{\overline{f}}(s,p)\right]+\beta LE^{-1}\left[\overline{\overline{g}}(s,p)\right] \quad (48.2)$$

حيث : $LE(f(x,t))=\overline{\overline{f}}(s,p)\,,\,LE(g(x,t))=\overline{\overline{g}}(s,p)$

2 .9 . تعريف تلاف (طي) دالتين :

لتكن $f(x,t)$ و $g(x,t)$ دالتين معرفتين و مستمرتين على $[0,\infty[\times[0,\infty[$ عندئذ يرمز لتلاف هاتين الدالتين بالرمز $(f**g)(x,t)$ و يعرف بالعلاقة الآتية :

$$(f**g)(x,t)=\int_0^x\int_0^t f(x-u,t-v)\,g(u,v)dudv \qquad (49.2)$$

بسهولة يمكن ملاحظة أن التلاف تبديلي أي :

$$(f**g)(x,t)=(g**f)(x,t) \qquad (50.2)$$

و من تعريف التلاف يمكن التحقق بسهولة أن الخواص الآتية للتلاف محققة :

1) $[f**(g**h)](x,t)=[(f**g)**h](x,t)$ (51.2) (التجميعية)

2) $[f**(ag+bh)](x,t)=a(f**g)(x,t)+b(f**h)(x,t)$ (52.2) (التوزيعية)

3) $(f**\delta)(x,t)=(\delta**f)(x,t)=f(x,t)$ (53.2) (المطابقة) .

حيث $\delta(x,t)$ هي دالة ديراك بالمتغيرين x و t .

2 . 10 مبرهنة : إذا كانت $\overline{\overline{f}}(s,p)=LE\big(f(x,t)\big)$ فعندئذ:

$$LE(f(x-\varepsilon,t-\tau)H(x-\varepsilon,t-\tau))=e^{-s\varepsilon-\frac{\tau}{p}}\overline{\overline{f}}(s,p) \qquad (54.2)$$

حيث $H(x,t)$ هي دالة هيفيسايد (الدرجية) .

الإثبات : لدينا من تعريف تحويل لابلاس–الزاكي :

$$LE(f(x-\varepsilon,t-\tau)H(x-\varepsilon,t-\tau))=$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}f(x-\varepsilon,t-\tau)H(x-\varepsilon,t-\tau)\;dxdt$$

$$=p\int_\varepsilon^\infty\int_\tau^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}}\;f(x-\varepsilon,t-\tau)dxdt$$

نفرض $x-\varepsilon=y\,,t-\tau=z$ فعندئذ :

$$=pe^{-s\varepsilon-\frac{\tau}{p}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sy-\frac{z}{p}}\;f(y,z)dydz$$

$$=e^{-s\varepsilon-\frac{\tau}{p}}\overline{\overline{f}}(s,p)$$

2 . 11 مبرهنة < مبرهنة التلاف (الطي) >:

إذا كانت $\bar{\bar{f}}\,(s,p) = LE\big(f(x,t)\big)$ و $\bar{\bar{g}}\,(s,p) = LE\big(g(x,t)\big)$ فعندئذ :

$$LE[(f ** g)(x,t)] = \frac{1}{p} LE\big(f(x,t)\big) LE\big(g(x,t)\big) = \frac{1}{p} \bar{\bar{f}}\,(s,p) \bar{\bar{g}}\,(s,p) \qquad (55.2)$$

و يكون أيضاً : $$LE^{-1}\left[\frac{1}{p}\,\bar{\bar{f}}\,(s,p).\bar{\bar{g}}\,(s,p)\right] = (f ** g)(x,t) \qquad (56.2)$$

حيث $(f ** g)(x,t)$ هو تلاف الدالتين $f(x,t)$ و $g(x,t)$ المعرف بالعلاقة (49.2).

الإثبات : لدينا من تعريف تحويل لابلاس–الزاكي :

$$LE[(f ** g)(x,t)] = p \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}} (f ** g)(x,t) dxdt$$

$$= p \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}} \left[\int_0^x \int_0^t f(x-u, t-v)\, g(u,v) dudv \right] dxdt$$

و باستخدام دالة هيفيسايد نجد :

$$= p \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-\frac{t}{p}} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty f(x-u, t-v) H(x-u, t-v)\, g(u,v) dudv \right] dxdt$$

$$= \mathrm{p} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{g(u,v)dudv} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{sx}-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{p}}} \mathrm{f(x-u,t-v)H(x-u,t-v)dxdt} \right]$$

و بالاعتماد على المبرهنة (10.2) نجد :

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty g(u,v) e^{-su-\frac{v}{p}} \bar{\bar{f}}\,(s,p) dudv$$

$$= \frac{1}{p}\,.\bar{\bar{f}}\,(s,p).p \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-su-\frac{v}{p}} g(u,v) dudv = \frac{1}{p}\,\bar{\bar{f}}\,(s,p) \bar{\bar{g}}\,(s,p)$$

2 .12 . مبرهنة: ليكن $f = f\,(x,t)$ و $g = g\,(x,t)$ وتلافهما البسيط معطى بالعلاقة

$$(f * g)(x,t) = \int_0^x f\,(x-\zeta,t)\; g\,(\zeta,t) d\zeta \qquad (57.2)$$

عندئذ : $$LE\,(f * g) = LE\,(g).L\,(f) \qquad (58.2)$$

الاثبات:

$$LE(f*g)=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^x f(x-\zeta,t)g(\zeta,t)d\zeta\right]e^{-sx-\frac{t}{p}}dx\,dt$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(x-\zeta,t)H(x-\zeta,t)g(\zeta,t)d\zeta\right]e^{-sx-\frac{t}{p}}dx\,dt$$

حيث $H(x-\zeta,t)$ دالة هيفيسايد (الدرجية) :

$$LE(f*g)=p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,t)e^{-\frac{t}{p}}\,d\zeta\int_0^\infty f(x-\zeta,t)H(x-\zeta,t)e^{-sx}dx\,dt$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,t)e^{-\frac{t}{p}}\,d\zeta\int_\zeta^\infty f(x-\zeta,t)e^{-sx}dx\,dt$$

نفرض $x=u+\zeta$ بالتالي $dx=du$ ومنه:

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,t)e^{-\frac{t}{p}}e^{-s\zeta}\,d\zeta\int_0^\infty f(u,t)e^{-su}du\;dt=LE(g).L(f)$$

2. 13 مبرهنة: إذا كانت $f=f(x,t)$ و $g=g(x,t)$ و تلافهما :

$$(f*g)(x,t)=\int_0^t f(x,t-\eta)\,g(x,\eta)d\eta \qquad (59.2)$$

عندئذ:

$$LE(f*g)=\frac{1}{p}\,LE(g)E(f) \qquad (60.2)$$

الإثبات:

$$LE(f*g)=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^t f(x,t-\eta)g(x,\eta)d\eta\right]e^{-sx-\frac{t}{p}}dx\,dt$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(x,t-\eta)H(x,t-\eta)g(x,\eta)d\eta\right]e^{-sx-\frac{t}{p}}dx\,dt$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty g(x,\eta)e^{-sx}\,dx\left[\int_\eta^\infty f(x,t-\eta)e^{-\frac{t}{p}}dt\right]d\eta$$

نفرض $t = v + \eta$ بالتالي $dt = dv$ ومنه:

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty g(x,\eta)e^{-sx-\frac{\eta}{p}}\,dx\,d\eta\left[\int_0^\infty f(x,v)e^{-\frac{v}{p}}dv\right]$$

$$= \frac{1}{p}\,LE(g).E(f)$$

2. 14 .تطبيقات تحويل لابلاس–الزاكي:

2 .14 . 1 .حل معادلات تفاضلية جزئية خطية بأمثال ثابتة:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية غير المتجانسة من المرتبة الثانية بأمثال ثابتة الآتية:

$$au_{xx} + bu_{tt} + cu_x + du_t + eu(x,t) = f(x,t) \qquad (61.2)$$

حيث a,b,c,d,e ثوابت مع الشروط الابتدائية و الحدية الآتية :

$$u(x,0) = f_1(x) \quad , \quad u_t(x,0) = f_2(x) \qquad (62.2)$$

$$u(0,t) = f_3(t) \quad , \quad u_x(0,t) = f_4(t) \qquad (63.2)$$

لإيجاد حل هذه المسألة نأخذ تحويل لابلاس–الزاكي لطرفي المعادلة (61.2) مع تطبيق خاصة الخطية :

$$aLE(u_{xx}) + bLE(u_{tt}) + cLE(u_x) + dLE(u_t) + eLE(u) = LE\big(f(x,t)\big)$$

بفرض $\bar{\bar{u}}(s,p) = LE[u(x,t)]$ و $\bar{\bar{f}}(s,p) = LE[f(x,t)]$

بتطبيق خاصة المشتقات نجد :

$$a\big[s^2\bar{\bar{u}}(s,p) - E\big(u(0,t)\big) - E\big(u_x(0,t)\big)\big]$$
$$+ b\left[\frac{1}{p^2}\bar{\bar{u}}(s,p) - L\big(u(x,0)\big) - pL\big(u_t(x,0)\big)\right]$$
$$+ c\big[s\bar{\bar{u}}(s,p) - E\big(u(0,t)\big)\big] + d\left[\frac{1}{p}\bar{\bar{u}}(s,p) - pL\big(u(x,0)\big)\right]$$
$$= \bar{\bar{f}}(s,p)$$

بأخذ تحويل لابلاس للعلاقات (62.2) و تحويل الزاكي للمعادلات (63.2) نجد :

$$\left(as^2 + \frac{b}{p^2} + cs + \frac{d}{p} + e\right)\bar{\bar{u}}(s,p) = as\bar{f}_3(p) + a\bar{f}_4(p) + b\bar{f}_1(s) +$$
$$+bp\bar{f}_2(s) + c\bar{f}_3(p) + ep\bar{f}_1(s) + \bar{\bar{f}}(s,p)$$

حيث $\bar{f}_1(s) = L\big(u(x,0)\big), \bar{f}_2(s) = L\big(u_t(x,0)\big), \bar{f}_3(p) = E\big(u(0,t)\big),$
$\bar{f}_4(p) = E(u_x(0,t)).$

و بحل المعادلة الجبرية الناتجة ثم تطبيق تحويل لابلاس–الزاكي العكسي على طرفي الحل نحصل على $u(x,t)$ حل المعادلة التفاضلية المعطاة .

مثال (1) : حل معادلة Klein-Gordon التي ترتبط بمعادلة شرودينغر التفاضلية :

$$u_{tt} - u_{xx} - u = 0 \qquad (64.2)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0) = 1 + \sin x \ , u_t(x,0) = 0 \qquad (65.2)$

و الشروط الحدية: $u(0,t) = cht \ \ , \ \ u_x(0,t) = 1 \qquad (66.2)$

لحلها نطبق تحويل لابلاس–الزاكي على طرفيها مع خاصتي الخطية و الاشتقاق :

$$LE(u_{tt}) - LE(u_{xx}) - LE(u) = 0$$

$$\frac{1}{p^2} LE(u) - L(u(x,0)) - pL(u_t(x,0)) - s^2 LE(u) + sE(u(0,t)) + E(u_x(0,t)) - LE(u) = 0$$

نأخذ تحويل لابلاس للشروط الابتدائية و تحويل الزاكي للشروط الحدية و نعوض :

$$(\frac{1}{p^2} - s^2 - 1) LE(u) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} - s\frac{p^2}{1-p^2} - p^2$$

$$\left(\frac{1 - s^2p^2 - p^2}{p^2}\right) LE(u) = \frac{1 - p^2s^2 - p^2}{s^2+1} + \frac{1 - p^2 - s^2p^2}{s(1-p^2)}$$

$$LE(u) = \frac{p^2}{s^2+1} + \frac{p^2}{s(1-p^2)}$$

بتطبيق تحويل لابلاس–الزاكي العكسي للطرفين نجد : $u(x,t) = \sin x + cht$

مثال (2): لإيجاد حل للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$u_{xx} - u_{tt} + u_t + 9u = sin3x \qquad (67.2)$$

مع الشروط :

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u_t(x,0) = sin3x \qquad (68.2)$$

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u_x(0,t) = 3t \qquad (69.2)$$

إن تطبيق تحويل لابلاس–الزاكي على طرفي المعادلة المعطاة مع تطبيق خاصة الخطية يعطي:

$$LE(u_{xx}) - LE(u_{tt}) + LE(u_t) + 9LE(u) = LE(sin3x)$$

بالاستفادة من خاصة المشتقات بعد أخذ تحويل لابلاس للمعادلات (68.2) كذلك تحويل الزاكي للعلاقات (69.2) نجد:

$$s^2 LE(u) - 3p^3 - \frac{1}{p^2} LE(u) + \frac{3p}{s^2+9} + \frac{1}{p} LE(u) + 9LE(u) = \frac{3p^2}{s^2+9}$$

بحل المعادلة الجبرية الناتجة نجد : $LE(u) = \dfrac{3p^3}{s^2+9}$

بأخذ تحويل لابلاس–الزاكي العكسي يعطي الحل للمعادلة المعطاة و هو :

$$u(x,t)=t\sin 3x$$

مثال (3) *:* لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$u_{xx}+2u_{tt}+3u_x=0 \qquad (70.2)$$

مع الشروط الابتدائية و الحدية :

$$u(x,0)=0 \quad , \quad u_t(x,0)=e^{-3x} \qquad (71.2)$$

$$u(0,t)=t \quad , \quad u_x(0,t)=-3t \qquad (72.2)$$

بتطبيق تحويل لابلاس–الزاكي على طرفي المعادلة المعطاة مع خاصة الخطية نجد :

$$LE(u_{xx})+2LE(u_{tt})+3LE(u_x)=0$$

بالاستفادة من خاصة المشتقات نحصل على :

$$s^2LE(u)-sp^3+3p^3+\frac{2}{p^2}LE(u)-\frac{2p}{s+3}+3sLE(u)-3p^3=0$$

و منه :

$$LE(u)=\frac{p^3}{s+3}$$

بأخذ التحويل العكسي للتحويل المطبق نحصل على الحل : $u(x,t)=te^{-3x}$

2 . 14 . 2 . حل جمل معادلات تفاضلية جزئية خطية بأمثال ثابتة:

قام كل من طارق وصالح الزاكي بحل جمل معادلات تفاضلية جزئية خطية مع شروط ابتدائية باستخدام تحويل الزاكي البسيط وعند تطبيق هذا التحويل على معادلات الجملة حصلا على جملة أخرى من المعادلات التفاضلية الجزئية بدوال مجهولة عبارة عن تحويل الزاكي لحلول الجملة وكخطوة للحل كان لابد من حل الجملة الناتجة وهذا الأمر غير سهل في الحالة العامة . من أجل ذلك تطرقنا في هذه الأطروحة لحل هذه الجملة مع شروط ابتدائية و حدية باستخدام تحويل لابلاس– الزاكي المضاعف والذي سيحول جملة المعادلات المعطاة عند تطبيقه إلى جملة من المعادلات الجبرية سهلة الحل.

لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية الآتية:

$$\alpha_1 u_t(\mathrm{x},\mathrm{t})+\alpha_2 v_x(x,t)=f_1(x,t) \qquad (73.2)$$

$$\beta_1 u_x(x,t)+\beta_2 v_t(x,t)=f_2(\mathrm{x},\mathrm{t}) \qquad (74.2)$$

مع الشروط الابتدائية الحدية:

$$u(x,0)=h_1(x) \quad , \; v(x,0)=h_2(x) \qquad (75.2)$$

$$u(0,t)=h_3(t) \quad , \; v(0,t)=h_4(t) \qquad (76.2)$$

حيث $x,t>0$ و $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ ثوابت بأخذ تحويل لابلاس –الزاكي لطرفي المعادلتين نجد:

$$\alpha_1 LE(u_t)+\alpha_2 LE(v_x)=LE(f_1(x,t))$$

$$\beta_1 LE(u_x)+\beta_2 LE(v_t)=LE(f_2(x,t))$$

نطبق خاصة الاشتقاق فيكون:

$$\frac{\alpha_1}{p}LE(u)-\alpha_1 p\,L(u(x,0))+\alpha_2 s\,LE(v)-\alpha_2 E(v(0,t))=LE(f_1(x,t))$$

$$\beta_1 s\,LE(u)-\beta_1 E(u(0,t))+\frac{\beta_2}{p}LE(v)-\beta_2 p\,L(v(x,0))=LE(f_2(x,t))$$

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلات (*75.2*) وتحويل الزاكي للمعادلات (*76.2*) ثم التعويض في المعادلات السابقة نجد:

$$\frac{\alpha_1}{p}LE(u)-\alpha_1 p\,L(h_1)+\alpha_2 s\,LE(v)-\alpha_2 E(h_4(t))=LE(f_1)$$

$$\beta_1 s\,LE(u)-\beta_1 E(h_3(t))+\frac{\beta_2}{p}LE(v)-\beta_2 p\,L(h_2(x))=LE(f_2)$$

بحل جملة المعادلات الجبرية السابقة بالنسبة لـ $LE(v),LE(u)$ ثم أخذ تحويل لابلاس–الزاكي العكسي للعلاقات السابقة سنحصل على حل الجملة المعطاة.

مثال(4): لتكن لدينا جملة المعادلات:

$$u_t+v_x=xe^t+e^{x+t} \qquad (77.2)$$

$$u_x-v_t=e^t-e^{x+t} \qquad (78.2)$$

مع الشروط:

$$u(x,0)=x \quad , \; v(x,0)=e^x \qquad (79.2)$$

$$u(0,t)=0 \quad , \; v(0,t)=e^t \qquad (80.2)$$

نطبق تحويل لابلاس الزاكي لطرفي المعادلتين (77.2) و (78.2) مع خاصتي الخطية والاشتقاق وأيضاً نطبق تحويل لابلاس للمعادلتين (79.2) وتحويل الزاكي للمعادلتين (80.2) ونعوض فنحصل على :

$$\frac{1}{p}LE(u)-\frac{p}{s^2}+s\,LE(v)-\frac{p^2}{1-p}=\frac{p^2}{s^2(1-p)}+\frac{p^2}{(s-1)(1-p)}$$

$$s\,LE(u)-\frac{1}{p}LE(v)+\frac{p}{s-1}=\frac{p^2}{s(1-p)}-\frac{p^2}{(s-1)(1-p)}$$

ومنه:

$$\frac{1}{p}LE(u)+s\,LE(v)=\frac{p}{s^2(1-p)}+\frac{p^2 s}{(s-1)(1-p)}$$

$$s\,LE(u)-\frac{1}{p}LE(v)=-\frac{p}{(s-1)(1-p)}+\frac{p^2}{s(1-p)}$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين الأخيرتين نجد:

$$LE(u)=\frac{p^2}{s^2(1-p)}$$

$$LE(v)=\frac{p^2}{(s-1)(1-p)}$$

بأخذ التحويل العكسي لتحويل لابلاس الزاكي نحصل على حلول الجملة المعطاة:

$$v(x,t)=e^{x+t} \quad ، \quad u(x,t)=x\,e^{t}$$

2. 14 .3 .حل معادلات تكاملية خطية :

معادلة فولتيرا التكاملية المضاعفة غير المتجانسة من النوع الأول و نمط التلاف لها الشكل الآتي:

$$\lambda\int_0^x\int_0^t k(x-u,t-v)\,f(u,v)dudv=g(x,t) \qquad (81.2)$$

حيث $f(x,t)$ دالة مجهولة و $\lambda\neq 0$.

نطبّق تحويل لابلاس–الزالكي على المعادلة (81.2) لحلها فنحصل على :

$$LE\left[\lambda\int_0^x\int_0^t k(x-u,t-v)\,f(u,v)dudv\right]=LE[g(x,t)]$$

باستخدام (49.2) و (55.2) سنجد : $\lambda LE[(k**f)(x,t)]=LE[g(x,t)]$

$$\frac{\lambda}{p}\,\bar{\bar{k}}(s,p).\bar{\bar{f}}(s,p)=\bar{\bar{g}}(s,p)$$

بتبسيط المعادلة الأخيرة :
$$\bar{\bar{f}}\,(s,p) = \frac{p}{\lambda}\frac{\bar{\bar{g}}\,(s,p)}{\bar{\bar{k}}\,(s,p)} = \frac{1}{\lambda}H(s,p)$$

حيث :
$$H(s,p) = p\frac{\bar{\bar{g}}\,(s,p)}{\bar{\bar{k}}\,(s,p)}$$

التحويل العكسي لتحويل لابلاس–الزاكي يعطي الحل للمعادلة (81.2) كالآتي :

$$f(x,t) = \frac{1}{\lambda}LE^{-1}[H(s,p)]$$

لاحظ أنّه وفقاً لخاصة التلاف (50.2) المعادلة (81.2) يمكن أن تأخذ الشكل :

$$\lambda\int_0^x\int_0^t k(u,v)\,f(x-u,t-v)dudv = g(x,t) \qquad (82.2)$$

مثال (5) : حل المعادلة

$$2\int_0^x\int_0^t e^{u-v}\,f(x-u,t-v)dudv = xe^{x-t} - xe^{x} \qquad (83.2)$$

بتطبيق تحويل لابلاس–الزاكي على المعادلة (83.2) ومن ثم استخدام (49.2) و(55.2) يعطي:

$$2LE(f(x,t) ** e^{x-t}) = LE(xe^{x-t}) - LE(xe^{x})$$

أو

$$\frac{2}{p}\bar{\bar{f}}\,(s,p)\frac{p^2}{(s-1)(1+p)} = \frac{p^2}{(1+p)(s-1)^2} - \frac{p^2}{(s-1)^2}$$

$$\bar{\bar{f}}\,(s,p) = -\frac{1}{2}\frac{p^2}{s-1}$$

فإذا طبّق التحويل العكسي للتحويل المستخدم على طرفي العلاقة الأخيرة سنحصل على :

$$f(x,t) = -\frac{1}{2}e^{x}$$

مثال (6) حل المعادلة التكاملية الآتية :

$$\int_0^x\int_0^t f(x-u,t-v)\,f(u,v)dudv = a^2t\,;a = \text{const} \qquad (84.2)$$

بتطبيق تحويل لابلاس–الزاكي على المعادلة (84.2) و من ثم استخدام (49.2) و(55.2) يعطي:

$$LE(f ** f) = LE(a^2t)$$

$$\frac{1}{p}\bar{\bar{f}}\,(s,p)\bar{\bar{f}}\,(s,p) = a^2\frac{p^3}{s}$$

$$\bar{\bar{f}}\,(s,p) = \frac{ap^2}{\sqrt{s}}$$

بتطبيق التحويل العكسي لتحويل لابلاس–الزاكي على طرفي العلاقة الأخيرة سنحصل على الحل :

$$f(x,t)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2. 14 . 4 .حل معادلات تفاضلية خطية جزئية غير خطية:

نتيجة لأهمية المعادلات التفاضلية غير الخطية التي تصف العديد من المسائل الفيزيائية والهندسية والجيولوجية وغيرها، ووفقاً لصعوبة وتعدد طرق حل هذا النوع من المعادلات والتي كان العديد منها صعب الحل، فقد توصلنا في هذه الأطروحة لتقنيتين جديدتين لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات الأمثلة المتغيرة والتفاضلية الجزئية غير الخطية كطريقة شاملة وهما طريقتا لابلاس– الزاكي التفكيكية (Laplace-Elzaki decomposition method) ولا بلاس– اليزاكي التكرارية (Laplace-Elzaki Variation Iteration Method) أساس هذه الطرائق هو دمج تحويل تكاملي مضاعف مع طريقة تقريبية.

2 . 14 . 4 . 1 .طريقة لابلاس –الزاكي التفكيكية:

سنطبق هذه الطريقة لحل معادلات وجمل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية وتتلخص هذه الطريقة بما يأتي:

لتكن لدينا المعادلة : $L(u)+N(u)=g(x,t) \qquad (85.2)$

وليكن $L=\frac{\partial}{\partial t}$ مثلاً أما N هو مؤثر تفاضلي غير خطي و g دالة غير متجانسة ،و الشرط الابتدائي للمسألة المعطاة هو: $u(x,0)=h(x) \qquad (86.2)$

عندئذ لحل هذا النوع من المعادلات باستخدام لابلاس – الزاكي التفكيكية نأخذ تحويل لابلاس– الزاكي لطرفي المعادلة مع تطبيق خواص الخطية والاشتقاق وأخذ تحويل لابلاس للشرط المعطى ونعوض فنجد:

$$\frac{1}{p}LE(u)-pL(h)=LE(g(x,t))-LE(N(u))$$

ومنه: $LE(u)=p^2L(h)+p\,LE(g(x,t))-p\,LE(N(u))$

نأخذ تحويل لابلاس– الزاكي العكسي لطرفي المعادلات الأخيرة نجد:

$$u(x,t)=LE^{-1}\left[p^2L(h)++p\,LE(g(x,t))\right]-LE^{-1}\left[p\,LE(N(u)\right]$$

لنفرض : $u_0(x,t)=LE^{-1}\left[p^2L(h)+LE(g)\right]$

أما الحل u فليكن على شكل مجموع متسلسلة :

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$$

$$N(u)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$$

حيث A_n هي حدود أدومين ومنه يكون :

$$u_{n+1}(x,t)=-LE^{-1}\left[pLE(A_n)\right]$$

وكتطبيق لهذه الطريقة سيتم حل معادلة KDV (korteweg- Devries)

مثال (7):إيجاد حل لمعادلة KDV التفاضلية الجزئية الآتية

$$u_t-4uu_x+7u_{xxx}=0 \quad (87.2)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=3(1-x) \quad (88.2)$$

لحل هذه المسألة نأخذ تحويل لابلاس–الزاكي لطرفي المعادلة مع تطبيق خاصية الخطية والاشتقاق :

$$\frac{1}{p}LE(u)-pL(u(x,0))-4LE(uu_x)+7LE(u_{xxx})=0$$

نطبق تحويل لابلاس على الشرط الابتدائي ونعوض:

$$LE(u)=\frac{3p^2(s-1)}{s^2}+pLE(4uu_x-7u_{xxx})$$

بتطبيق تحويل لابلاس الزاكي العكسي:

$$u(x,t)=3(1-x)+LE^{-1}\left[pLE(4uu_x-7u_{xxx})\right]$$

بفرض:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$$

حيث:

$$u_0(x,t)=3(1-x)$$

$$u_{n+1}(x,t)=LE^{-1}\left[p\,LE\ (4A_n-7u_{nxxx})\right]$$

وتدعى A_n كثيرات حدود أدومين وهي :

$$A_0 = u_0 u_{0x}$$

$$A_1 = u_1 u_{0x} + u_0 u_{1x}$$

$$A_2 = u_2 u_{0x} + u_1 u_{1x} + u_0 u_{2x}$$

.

.

ومنه:

$$u_1 = LE^{-1}\left[p\,LE\ (4A_0 - 7u_{0xxx}\right]$$

حيث:

$$u_1 = LE^{-1}\left[p\left(-36\frac{p^2(s-1)}{s^2}\right)\right]$$

$$= -36t\,(1-x) = -(3)(12t)(1-x)$$

$$A_1 = 3\times(3)^2\times 4t\,(L\,x) + 3\times 36t\,(1-x)$$

$$= 2(3)^3\times 4t\,(1-x)$$

$$\Rightarrow u_2(x,t) = LE^{-1}\left[pLE\ (4A_1 - 7u_{1xxx})\right]$$

$$= LE^{-1}\left[p\times 2\times(3)^3\times(4)^2\,\frac{p^3(s-1)}{s^2}\right]$$

$$= (3)(12t)^2(1-x)$$

$$A_2 = -(3)^3(12t)^2(1-x)$$

$$\Rightarrow u_3(x,t) = LE^{-1}\left[-p\times(12)^3\times(3)\,p^4\times 2!\times\frac{s-1}{s^2}\right]$$

$$= -(3)^2(12)^3\times\frac{2!t^3}{3!}(1-x) = (3)(12t)^3(1-x)$$

.

.

$$u_n(x,t) = (-1)^n\,(3)(12t)^n\,(1-x)$$

ومنه حل المعادلة المعطاة:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3)(12t)^n(1-x)$$
$$=\frac{3(1-x)}{1+12t}\quad ;\ |t|<\frac{1}{12}$$

نلاحظ أنه عند استخدام طريقة (LEDM) لم يكن هناك حاجة سوى لشرط ابتدائي دون شروط حدية. وهنا حصلنا على الحل المضبوط (exact salution) للمسألة المعطاة .

2. 14 . 4 .2 . طريقة لابلاس الزاكي التكرارية (LEVIM) :

تم استخدام هذه الطريقة في هذه الأطروحة كتقنية أخرى لحل المعادلات التفاضلية والتكاملية غير الخطية وقد تم تركيب تحويل تكاملي وهو تحويل لابلاس الزاكي مع طريقة التغاير التكرارية (VIM) للحصول على طريقة فعّالة للتعامل مع معادلات مستحيلة الحل باستخدام التحويل التكاملي مفرداً و باستخدام الطرق التحليلية الأخرى وذلك من أجل الحصول على الحل المضبوط لها (exact salution) هذا وقد تم حل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية بطرق معدّلة باستخدام تحويلات تكاملية بسيطة مع طريقة التغاير التكرارية مثل اليرينور الذي دمج تحويل لابلاس مع طريقة التغاير التكرارية وحل بذلك بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية وسيتم استخدام طريقة لابلاس الزاكي التكرارية هذه في تطبيقات تحويل لابلاس- الزاكي عند حل معادلات تفاضلية غير خطية ومعادلات تكاملية تفاضلية غير خطية. تتلخص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية:

$$Lu(x,t)+Nu(x,t)=g(x,t)\quad (89.2)$$

لنفرض أن $L=\frac{\partial}{\partial t}$ من أجل توضيح الطريقة هذا ويمكن ان يكون L أي مؤثر تفاضلي خطي بينما N فهو مؤثر تفاضلي غير خطي و g دالة غير متجانسة.

عندئذ لحل المعادلة المعطاة مع الشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=h(x)\quad (90.2)$$

باستخدام طريقة *(LEVIM)* أولاً نأخذ تحويل لابلاس الزاكي الطرفي المعادلة مع أخذ خاصتي الخطية والاشتقاق بعين الاعتبار فنجد:

$$LE\left(Lu\left(x,t\right)\right)+LE\left(Nu\left(x,t\right)\right)=LE\left(g\left(x,t\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}LE\left(u\right)-pL\left(h\left(x\right)\right)=LE\left(g\left(x,t\right)\right)-LE\left(Nu\left(x,t\right)\right)$$

$$\Rightarrow LE\left(u\right)=p^2L\left(h\right)+pLE\left(g\right)-pLE\left(Nu\left(x,t\right)\right)$$

بتطبيق تحويل لابلاس الزاكي العكسي نحصل على:

$$u\left(x,t\right)=M\left(x,t\right)-LE^{-1}\left[pLE\left(Nu\left(x,t\right)\right)\right]$$

حيث: $M\left(x,t\right)=LE^{-1}\left[p^2L\left(h\left(x\right)\right)+pLE\left(g\left(x,t\right)\right)\right]$

وتكون: $u_0\left(x,t\right)=M\left(x,t\right)$

$$u_{n+1}\left(x,t\right)=M\left(x,t\right)-LE^{-1}\left[pLE\left(Nu_n\left(x,t\right)\right)\right] \quad (91.2)$$

أما الحل فيكون : $u\left(x,t\right)=\lim_{n\to\infty}u_n\left(x,t\right) \quad (92.2)$

و كتطبيق لهذه الطريقة عند حل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية حل معادلة شرودينغر غير الخطية.

مثال (8): حل معادلة شرودينغر (Schrödinger) التفاضلية الجزئية غير الخطية باستخدام طريقة (LEVIM) :

هذه المعادلة لها الشكل العام الآتي:

$$i\,u_t+u_{xx}+\lambda\left|u\right|^{2r}u=0\ ;\ \ r\geq 1\ ,\ i=\sqrt{-1} \quad (93.2)$$

مع الشرط الابتدائي: $u\left(x,0\right)=f\left(x\right) \quad (94.2)$

لحل هذه المسألة نأخذ تحويل لابلاس–الزاكي لطرفي المعادلة بعد ضرب طرفيها بـ $(-i)$:

$$LE\left(u_t\right)-i\,LE\left(u_{xx}\right)-i\,\lambda LE\left(\left|u\right|^{2r}u\right)=0$$

نطبق خاصية الاشتقاق:

$$\frac{1}{p}LE\left(u\right)-pL\left(f\left(x\right)\right)-iLE\left(u_{xx}\right)-i\,\lambda LE\left(\left|u\right|^{2r}u\right)=0$$

بأخذ تحويل لابلاس- الزاكي العكسي نجد:

$$u(x,t)=LE^{-1}\left[p^{2}L\left(f(x)\right)\right]+i\,LE^{-1}\left[p\,LE\left(u_{xx}+\lambda\,|u|^{2r}u\right)\right]$$

و بفرض :

$$u_{0}(x,t)=LE^{-1}\left[p^{2}L\left(f(x)\right)\right]$$

عندئذ :

$$u_{n+1}(x,t)=u_{0}(x,t)+i\,LE^{-1}\left[p\,LE\left(u_{nxx}+\lambda\,|u_{n}|^{2r}u_{n}\right)\right]$$

ويكون الحل للمسألة المعطاة

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}\left[u_{n}(x,t)\right]$$

مثال(9): إيجاد حل للمسألة:

$$i\,u_{t}+u_{xx}-2\,|u|^{2}u=0$$

والشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=e^{ix}$$

لحلها باستخدام طريقة (LEVIM) نأخذ تحويل لابلاس- الزاكي لطرفي المعادلة مع تطبيق خواص الخطية والاشتقاق نجد:

$$\frac{i}{p}LE(u)-\frac{p\,i}{s-i}+LE(u_{xx})-2LE\left(|u|^{2}u\right)=0$$

وبأخذ تحويل لابلاس- الزاكي العكسي نجد:

$$u(x,t)=LE^{-1}\left[\frac{p^{2}}{s-i}\right]-LE^{-1}\left[\frac{p}{i}LE\left(u_{xx}-2\,|u|^{2}u\right)\right]$$

$$=e^{ix}+i\,LE^{-1}\left[\;LE\left(u_{xx}-\;|u|^{2}u\right)\right]$$

بفرض :

$$u_{0}(x,t)=e^{ix}$$

$$u_{n+1}(x,t)=u_{0}(x,t)+i\,LE^{-1}\left[p\,LE\left(u_{nxx}-2\,|u_{n}|^{2}u_{n}\right)\right]$$

عندئذ تكون الحدود كالآتي :

$$u_{1}(x,t)=e^{ix}+i\,LE^{-1}\left[p\,LE\left(u_{1xx}-2\,|u_{1}|^{2}u_{1}\right)\right]$$

$$=e^{ix}+i\,LE^{-1}\left[p\,LE\left(-e^{ix}-2e^{ix}\right)\right]$$

$$=e^{ix}-3i\,LE^{-1}\left[\frac{p^{3}}{s-i}\right]$$

$$=e^{ix}-3i\,t\,e^{ix}=e^{ix}\left(1-3i\,t\right)$$

أما الحد الثاني :

$$u_2(x,t)=e^{ix}+i\,LE^{-1}\left[p\,LE\left(-e^{ix}\left(1-3it\right)-2e^{ix}\left(1-3it+9t^2-27it^3\right)\right)\right]$$

$$=e^{ix}+i\,LE^{-1}\left[\frac{-3p^3+9i\,p^4-36p^5+324ip^6}{s-i}\right]$$

$$=e^{ix}\left[1-3it-9\frac{t^2}{2!}-36\frac{i\,t^3}{3!}-\frac{324t^4}{4!}\right]$$

الحد الثالث :

$$u_3(x,t)=e^{ix}+i\,LE^{-1}\,[p\,LE\,(-3+9it+\frac{27}{2}t^2+18it^3-\frac{432}{4!}t^4-\frac{351}{4}it^5+\frac{207}{8}t^6-648it^7$$
$$-\frac{7371}{8}t^8-\frac{5967}{4}it^9-\frac{2357}{8}t^{10}-\frac{2187}{2}it^{11}-\frac{19683}{8}t^{12})\,]$$

$$u_3(x,t)=e^{ix}\left[1-3it+9i^2\frac{t^2}{2!}-27i^3\frac{t^3}{3!}+\ldots\right]$$

و منه :

$$u_n(x,t)=e^{ix}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-3it\right)^k}{k!}$$

عندئذ يكون حل المسألة المعطاة :

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)$$

$$=e^{ix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-3it\right)^n}{n!}=e^{i(x-3t)}$$

2 . 14 . 5 .حل جمل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية:

2. 14 . 5 . 1 .طريقة لابلاس–الزاكي التفكيكية لحل جمل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية :

تتلخص هذه الطريقة بما يأتي :

لتكن لدينا زوج من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية :

$$L_1(u)+N_1(u,v)=g_1(x,t) \qquad (95.2)$$

$$L_2(v)+N_2(u,v)=g_2(x,t) \qquad (96.2)$$

مع الشروط الابتدائية :

$$\left.\begin{aligned}u(x,0)&=h_1(x)\\ v(x,0)&=h_2(x)\end{aligned}\right\} \qquad (97.2)$$

حيث: $L_1 = L_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ ،علماً أن N_1 و N_2 مؤثران تفاضليان غير خطيين أما g_1 و g_2 فهي دوال غير متجانسة .عندئذ للحل نأخذ أولاً تحويل لابلاس–الزاكي لطرفي المعادلتين (95.2) و (96.2) و تحويل لابلاس لطرفي المعادلتين (97.2) و بالاعتماد على خاصتي الخطية و الاشتقاق لتحويل لابلاس– الزاكي نجد:

$$\frac{1}{p}LE(u) - pL(h_1) = LE(g_1(x,t)) - LE(N_1(u,v))$$
$$\frac{1}{p}LE(v) - pL(h_2) = LE(g_2(x,t)) - LE(N_2(u,v))$$

و منه:

$$LE(u) = p^2L(h_1) + pLE(g_1(x,t)) - pLE(N_1(u,v))$$
$$LE(v) = p^2L(h_2) + pLE(g_2(x,t)) - pLE(N_2(u,v))$$

بتطبيق تحويل لابلاس–الزاكي العكسي على طرفي المعادلتين السابقتين نجد :

$$u(x,t) = LE^{-1}\left[p^2L(h_1) + pLE(g_1(x,t))\right] - LE^{-1}\left[pLE(N_1(u,v))\right]$$
$$v(x,t) = LE^{-1}\left[p^2L(h_2) + pLE(g_2(x,t))\right] - LE^{-1}\left[pLE(N_2(u,v))\right]$$

و بفرض :

$$u_0(x,t) = LE^{-1}\left[p^2L(h_1) + pLE(g_1(x,t))\right]$$
$$v_0(x,t) = LE^{-1}\left[p^2L(h_2) + pLE(g_2(x,t))\right]$$

لنكتب كلاً من الحلول $u(x,t)$ و $v(x,t)$ على شكل مجموع متسلسلة غير منتهية أي:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x,t) \quad , \quad v(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x,t)$$

$$N_1(u,v) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \quad , \quad N_2(u,v) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m$$

حيث A_m و B_m هي حدود أدومين و منه يكون :

$$u_{n+1}(x,t) = -LE^{-1}\left[pLE(A_m)\right] \quad (48)$$
$$v_{n+1}(x,t) = -LE^{-1}\left[pLE(B_m)\right] \quad (49)$$

مثال(10) : حل مسألة بلازيوس [46] و هي جملة المعادلات :

$$u_x + v_t = 0 \qquad (98.2)$$
$$uu_x + vu_t = \upsilon u_{tt} \qquad (99.2)$$

مع الشروط الابتدائية :

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) = v(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = x \end{aligned}\right\} \qquad (100.2)$$

باستخدام طريقة لابلاس–الزاكي التفكيكية لحل هذه المسألة نطبق تحويل لابلاس–الزاكي على طرفي المعادلات (98.2) و (99.2) و تحويل لابلاس على طرفي المعادلتين (100.2) و بالاعتماد على خاصتي الخطية و الاشتقاق لتحويل لابلاس– الزاكي نجد:

$$LE(v_t) = -LE(u_x)$$
$$LE(u_{tt}) = \frac{1}{\upsilon} LE\left(uu_x + vu_t\right)$$

و منه :

$$\frac{1}{p} LE\left(v\right) = -LE\left(u_x\right)$$
$$\frac{1}{p^2} LE\left(u\right) - \frac{p}{s^2} = \frac{1}{\upsilon} LE\left(uu_x + vu_t\right)$$

بتطبيق تحويل لابلاس–الزاكي العكسي على طرفي المعادلتين السابقتين نجد :

$$u(x,t) = xt + LE^{-1}\left[\frac{p^2}{\upsilon} LE\left(uu_x + vu_t\right)\right]$$
$$v(x,t) = -LE^{-1}\left[pLE\left(u_x\right)\right]$$

بالتالي إذا فرضنا :

$$u_0(x,t) = xt$$
$$v_0(x,t) = 0$$

لنكتب كلاً من الحلول $u(x,t)$ و $v(x,t)$ على شكل مجموع متسلسلة غير منتهية أي:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad , \quad v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) \quad (57)$$

أما :

$$uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad , \quad vu_t = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

حيث A_n و B_n هي حدود أدومين و منه يكون :

$$u_{n+1}(x,t)=LE^{-1}\left[\frac{p^2}{\upsilon}LE\left(A_n+B_n\right)\right]$$

$$v_{n+1}(x,t)=-LE^{-1}\left[pLE\left(\left(u_n\right)_x\right)\right]$$

لنوجد الحدود u_n و v_n حسب العلاقات السابقة حيث الحدان الأولان معلومان u_0 و v_0 أما

الحد الثاني لكل متسلسلة :

$$u_1(x,t)=LE^{-1}\left[\frac{p^2}{\upsilon}LE\left(A_0+B_0\right)\right]$$

حيث :

$$A_0=u_0u_{0x}=xt^2$$

$$B_0=v_0u_{0t}=0$$

عندئذ :

$$u_1(x,t)=LE^{-1}\left[\frac{p^2}{\upsilon}\left(\frac{2!p^4}{s^2}\right)\right]=\frac{2}{4!\upsilon}xt^4$$

أما :

$$v_1(x,t)=-LE^{-1}\left[pLE\left(t\right)\right]=-LE^{-1}\left[p\left(\frac{p^3}{s}\right)\right]=-\frac{t^2}{2!}$$

الحد الثالث من كل متسلسلة :

$$A_1=u_1u_{0x}+u_0u_{1x}=\frac{1}{3!\upsilon}xt^5$$

$$B_1=v_0u_{1t}+v_1u_{0t}=-\frac{1}{2!}xt^2$$

و منه :

$$u_2(x,t)=LE^{-1}\left[\frac{p^2}{\upsilon}LE\left(A_1+B_1\right)\right]$$

$$=LE^{-1}\left[\frac{p^2}{\upsilon}\left(\frac{5!}{3!}\frac{p^7}{s^2}-\frac{2!}{2!}\frac{p^4}{s^2}\right)\right]$$

$$=\frac{5\times4}{7!}xt^7-\frac{1}{4!\upsilon}xt^4$$

$$v_2(x,t)=-LE^{-1}\left[pLE\left(u_{1x}\right)\right]=-\frac{2}{5!\upsilon}t^5$$

الحد الرابع من كل متسلسلة :

$$A_2 = u_2 u_{0x} + u_1 u_{1x} + u_0 u_{2x} = \frac{75}{7!\upsilon^2} x t^8 - \frac{2}{4!\upsilon} x t^5$$

$$B_2 = v_1 u_{1t} + v_0 u_{2t} + v_2 u_{1t} = -\frac{4}{4!\upsilon} x t^5 - \frac{28}{7!} x t^8$$

و منه :

$$u_3(x,t) = LE^{-1}\left[\frac{p^2}{\upsilon} LE\left(A_2 + B_2\right)\right]$$

$$= LE^{-1}\left[\frac{p^2}{\upsilon} LE\left(\frac{47}{7!\upsilon^2} x t^8 - \frac{6}{4!\upsilon} x t^5\right)\right]$$

$$= LE^{-1}\left[\frac{p^2}{\upsilon} LE\left(\frac{47 \times 8! p^{10}}{7!\upsilon^2 s^2} - \frac{6 \times 5! p^7}{4!\upsilon s^2}\right)\right]$$

$$= \frac{376}{10!\upsilon^3} x t^{10} - \frac{30}{7!\upsilon^2} x t^7$$

$$v_3(x,t) = -LE^{-1}\left[pLE\left(u_{2x}\right)\right] = -\frac{20}{8!\upsilon^2} t^8 + \frac{1}{5!\upsilon} t^5$$

.

.

بالنتيجة:

$$u(x,t) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^{3n+1}}{(3n+1)!}$$

$$v(x,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

حيث : $c_n = -(-1)^{F_n} \left(\frac{2}{3}\right)_n (3)^n$ و F_n : هي متتالية فيبوناتشي

أما $\left(\frac{2}{3}\right)_n = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}+1\right)\left(\frac{2}{3}+2\right)....\left(\frac{2}{3}+n-1\right)$ وهي رموز بوخامر

(The Pochhammer Symbol) .

مثال(11) :ليكن لدينا جملة من معادلات برغر الآتية :

$$u_t - u_{xx} - 2uu_x + (uv)_x = 0 \qquad (101.2)$$
$$v_t - v_{xx} - 2vv_x + (uv)_x = 0 \qquad (102.2)$$

مع الشروط الابتدائية :

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \cos x \\ v(x,0) &= \cos x \end{aligned}\right\} \qquad (103.2)$$

باستخدام طريقة LEDM لحل هذه المسألة نطبق تحويل لابلاس–الزاكي على طرفي المعادلات (101.2) و (102.2) و تحويل لابلاس على طرفي المعادلتين (103.2) و بالاعتماد على خاصتي الخطية و الاشتقاق لتحويل لابلاس– الزاكي نجد:

$$LE(u_t) - LE\left[u_{xx} + 2uu_x - (uv)_x\right] = 0$$
$$LE(v_t) - LE\left[v_{xx} + 2vv_x - (uv)_x\right] = 0$$

و منه :

$$\frac{1}{p}LE(u) - \frac{ps}{s^2+1} = -LE\left[u_{xx} + 2uu_x - (uv)_x\right]$$
$$\frac{1}{p}LE(v) - \frac{ps}{s^2+1} = -LE\left[v_{xx} + 2vv_x - (uv)_x\right]$$

بتطبيق تحويل لابلاس–الزاكي العكسي على طرفي المعادلتين السابقتين نجد :

$$u(x,t) = \cos x + LE^{-1}\left[pLE\left(u_{xx} - 2uu_x + (uv)_x\right)\right]$$
$$v(x,t) = \cos x + LE^{-1}\left[pLE\left(v_{xx} - 2vv_x + (uv)_x\right)\right]$$

بالتالي إذا فرضنا الحلول على شكل متسلسلات :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad , \quad v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$$

حيث :

$$u_0(x,t) = \cos x$$
$$v_0(x,t) = \cos x$$

عندئذ يكون :

$$u_{n+1}(x,t) = LE^{-1}\left[pLE\left((u_n)_{xx} + 2A_n - B_n\right)\right]$$
$$v_{n+1}(x,t) = LE^{-1}\left[pLE\left((v_n)_{xx} + 2C_n - B_n\right)\right]$$

علماً أن :

$$u_n u_{nx} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad , \quad (v_n u_n)_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

$$v_n v_{nx} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \quad , \quad (v_n u_n)_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

حيث A_n و B_n و C_nهي حدود أدومين و لنوجد الحدود u_n و v_n حسب العلاقات السابقة

حيث الحدان الأوليان معلومان u_0 و v_0 أما الحد الثاني لكل متسلسلة

$$u_1(x,t) = LE^{-1}\left[pLE\left((u_0)_{xx} + 2A_0 - B_0\right)\right]$$

$$v_1(x,t) = LE^{-1}\left[pLE\left((v_0)_{xx} + 2C_0 - B_0\right)\right]$$

حيث :

$$A_0 = u_0 u_{0x} = -\cos x \sin x$$

$$B_0 = (u_0 v_0)_x = -2\cos x \sin x$$

$$C_0 = v_0 v_{0x} = -\cos x \sin x$$

عندئذ :

$$u_1(x,t) = LE^{-1}\left[pLE(-\cos x)\right] = LE^{-1}\left(-\frac{p^3 s}{s^2+1}\right) = -t\cos x$$

أما :

$$v_1(x,t) = LE^{-1}\left[pLE(-\cos x)\right] = LE^{-1}\left(-\frac{p^3 s}{s^2+1}\right) = -t\cos x$$

الحد الثالث من كل متسلسلة :

$$A_1 = u_1 u_{0x} + u_0 u_{1x} = t\cos x \sin x + t\sin x \cos x = 2t\cos x \sin x$$

$$B_1 = v_0 u_{1x} + u_{0x} v_1 + u_1 v_{0x} + v_{1x} u_0 = (u_1 v_0)_x + (u_0 v_1)_x = 4t\cos x \sin x$$

$$C_1 = v_1 v_{0x} + v_0 v_{1x} = 2t\cos x \sin x$$

و منه :

$$u_2(x,t) = LE^{-1}\left[pLE\left((u_1)_{xx} + 2A_1 - B_1\right)\right]$$

$$= LE^{-1}\left[pLE\left(t\cos x\right)\right]$$

$$= LE^{-1}\left[p\left(\frac{p^3 s}{s^2+1}\right)\right] = \frac{t^2}{2!}\cos x$$

$$v_2(x,t) = LE^{-1}\left[pLE\left((v_1)_{xx} + 2C_1 - B_1\right)\right]$$
$$= LE^{-1}\left[pLE\left(t\cos x\right)\right]$$
$$= LE^{-1}\left[p\left(\frac{p^3 s}{s^2+1}\right)\right] = \frac{t^2}{2!}\cos x$$

و أيضاً :

$$u_3 = -\frac{t^3}{3!}\cos x$$
$$v_3 = -\frac{t^3}{3!}\cos x$$
$$.$$
$$.$$

بالنتيجة:

$$u(x,t) = \cos x - t\cos x + \frac{t^2}{2!}\cos x - \frac{t^3}{3!}\cos x + ...$$
$$v(x,t) = \cos x - t\cos x + \frac{t^2}{2!}\cos x - \frac{t^3}{3!}\cos x + ...$$

و منه حل المسألة المعطاة هو :

$$u(x,t) = \cos x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!} = e^{-t}\cos x$$
$$v(x,t) = \cos x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!} = e^{-t}\cos x$$

ملاحظة: يمكن حل المعادلات التفاضلية الخطية و جملها بالتطبيقين الأول و الثاني بالطرق المدمجة و هي طريقة لابلاس–الزاكي التفكيكية و طريقة لابلاس–الزاكي التكرارية عندئذ يلزم لإيجاد الحل الخاص لتلك المسائل فقط شروط ابتدائية دون الشروط الحدية.

2. 14 . 6 . حل معادلات تكاملية و تكاملية – تفاضلية جزئية غير خطية:

في هذا التطبيق تم حل معادلة فيشر–فريدهولم التكاملية– التفاضلية الجزئية غير الخطية ومعادلة آبل التكاملية غير الخطية :

2. 14 . 6 . 1. حل معادلة فيشر– فريدهولم التكاملية – التفاضلية غير الخطية:

سنقوم بحل هذه المعادلة بطريقة لابلاس– الزاكي التكرارية (LEVIM)

لتكن لدينا المعادلة:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta u(1-u)+\lambda\int_a^b k(x-\zeta,t)R(u(\zeta,t))d\zeta=0 \quad (104.2)$$

حيث: $k(x-\zeta,t)$ نواة المعادلة التكاملية أما $R(u(\zeta,t))$ هو مؤثر غير خطي.

مع شرط ابتدائي: $u(x,0)=f(x)$

لحل هذه المسألة نطبق تحويل لابلاس –الزاكي على طرفي المعادلة المعطاة مع الأخذ بعين الاعتبار خواص الخطية والاشتقاق فنجد:

$$\frac{1}{p}LE(u)-pL(f(x))-\alpha LE\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\beta LE(u(1-u))$$
$$+\lambda LE(\int_a^b k(x-\zeta,t)R(u(\zeta,t))d\zeta)=0$$

$$LE(u)=p^2L(f(x)+\alpha pLE\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\beta pLE(u(1-u))$$
$$-\lambda p\,LE(\int_a^b k(x-\zeta,t)R(u(\zeta,t))$$

بأخذ تحويل لابلاس – الزاكي العكسي نجد:

$$u(x,t)=LE^{-1}\left[p^2L(f(x))\right]+LE^{-1}\left[pLE\left(\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta u(1-u)\right)\right]-LE^{-1}\left[\lambda pLE(\int_a^b k(x-\zeta,t)R(u(\zeta,t))\right]$$

نفرض:

$$u_0(x,t)=LE^{-1}\left[p^2L(f(x))\right]$$
$$u_{n+1}(x,t)=u_0(x,t)+LE^{-1}\left[pLE(\alpha\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\beta u_n(1-u_n))\right]$$
$$-LE^{-1}\left[\lambda pLE(\int_\alpha^b k(x-\zeta,t)R(u(\zeta,t))\right]$$

ويكون الحل للمعادلة المعطاة : $u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)$

مثال(12): إيجاد حل المعادلة:

$$\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u(1-u)+2\int_0^1 e^{2(x-\zeta)}u^2(\zeta,t)d\zeta=0$$

مع الشرط الابتدائي : $u(x,0)=e^x$

لحل هذه المسألة بطريقة لابلاس- الزاكي التفكيكية نأخذ تحويل لابلاس – الزاكي لطرفي المعادلة مع تطبيق خاصتي الخطية والاشتقاق:

$$\frac{1}{p}LE(u)-pL(u(x,0))-LE\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u(1-u)\right]+2LE\left[\int_0^1 e^{2(x-\zeta)}u^2(\zeta,t)d\zeta\right]=0$$

$$LE(u)=p^2L(u(x,0))+LE\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u(1-u)\right]+2pLE\left[\int_0^1 e^{2(x-\zeta)}u^2(\zeta,t)d\zeta\right]$$

نطبق تحويل لابلاس- الزاكي العكسي نجد:

$$u(x,t)=LE^{-1}\left[\frac{p^2}{s-1}\right]+LE^{-1}\left[pLE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u(1-u))\right]-LE^{-1}\left[2pLE(\int_0^1 e^{2(x-\zeta)}u^2(\zeta,t)d\zeta)\right]$$

$$u(x,t)=e^x+LE^{-1}\left[pLE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u(1-u))\right]-LE^{-1}\left[2pLE(\int_0^1 e^{2(x-\zeta)}u^2(\zeta,t)d\zeta)\right]$$

نفرض: $u_0(x,t)=e^x$

$$u_{n+1}(x,t)=e^x+LE^{-1}\left[pLE\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}-2u_n+2u_n^2-2\int_0^1 e^{2(x-\zeta)}u_n^2(\zeta,t)d\zeta\right]$$

$$u_1(x,t)=e^x+LE^{-1}\left[pLE(e^x-2e^x-2e^{2x}-2\int_0^1 e^{2x}d\zeta)\right]$$

$$=e^x+LE^{-1}\left[\frac{p^3}{s-1}\right]=e^x-te^x=e^x(1-t)$$

$$u_2(x,t)=e^x+LE^{-1}[p(\frac{p^2}{s-1}-\frac{p^3}{s-1}-\frac{2p^2}{s-1}+\frac{2p^3}{s-1}+\frac{2p^2}{s-2}-\frac{4p^3}{s-2}$$
$$+\frac{2p^4}{s-2}-\frac{2p^2}{s-2}+\frac{4p^3}{s-2}-\frac{2p^4}{s-2})]$$

$$u_2(x,t)=e^x+LE^{-1}\left[-\frac{p^3}{s-1}+\frac{p^4}{s-1}\right]=e^x-te^x+\frac{t^2}{2!}e^x$$

بالمثل سنجد : $u_3(x,t)=e^x-te^x+\frac{t^2}{2!}e^x-\frac{t^3}{3!}e^x$

ومنه: $u_n(x,t)=e^x-te^x+\frac{t^2}{2!}e^x-\frac{t^3}{3!}e^x+\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{n!}e^x$

بالتالي: $u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)=e^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!}=e^{x-t}$

2. 14 . 6 . 2. حل معادلة آبل غير الخطية:

هذه المعادلة هي معادلة فولتيرا ذات نواة شاذة وهي من الشكل:

$$\int_0^x \frac{R\left(u\left(\zeta,t\right)\right)}{\left(x-\zeta\right)^{\alpha}}\, d\zeta = f\left(x,t\right)\ ;\ 0<\alpha<1 \qquad (105.2)$$

لحلها باستخدام تحويل لابلاس– الزاكي نطبق هذا التحويل على طرفيها:

$$LE\left[\int_0^x \frac{u^2\left(\zeta,t\right)}{\left(x-\zeta\right)^{\alpha}}\ d\zeta\right] = LE\left[f\left(x,t\right)\right]$$

حسب تعريف تلاف دالتين والمبرهنة (1) نجد:

$$LE\left[\int_0^x \frac{u^2\left(\zeta,t\right)}{\left(x-\zeta\right)^{\alpha}}\ d\zeta\right] = LE\left[u^2\left(x,t\right)\right]L\left[\left(x-\zeta\right)^{-\alpha}\right]$$

نعوض:

$$LE\left[u^2\left(x,t\right)\right].L\left[\left(x-\zeta\right)^{-\alpha}\right] = LE\left[f\left(x,t\right)\right]$$

ومنه

$$LE\left[u^2\left(x,t\right)\right] = \frac{LE\left[f\left(x,t\right)\right]}{L\left[\left(x-\zeta\right)^{-\alpha}\right]}$$

بأخذ التحويل العكسي للتحويل المطبق نجد:

$$u\left(x,t\right) = \left[LE^{-1}\left[\frac{LE\left[f\left(x,t\right)\right]}{L\left[\left(x-\zeta\right)^{-\alpha}\right]}\right]\right]^{\frac{1}{2}}$$

مثال(13): إيجاد حل معادلة آبل غير الخطية من أجل $\alpha = \frac{1}{2}$ و $f\left(x,t\right) = x^2 t$

$$\int_0^x \frac{u^2\left(\zeta,t\right)}{\sqrt{x-\zeta}}\, d\zeta = x^2 t$$

نأخذ تحويل لابلاس –الزاكي لطرفي المعادلة مع الأخذ بعين الاعتبار تعريف تلاف دالتين والمبرهنة (1):

$$LE\left(u^2\right).L\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=LE\left(x^2 t\right)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\ LE\left(u^2\right)=\frac{2p^3}{s^3}$$

$$LE\,(u^2)=\frac{2\sqrt{s}\ p^3}{\sqrt{\pi}\,s^3}=\frac{2p^3}{\sqrt{\pi}\,s^{5/2}}$$

بتطبيق التحويل العكسي لتحويل لابلاس– الزاكي نجد:

$$u^2\left(x,t\right)=LE^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}p^3\sqrt{s^5}\right]=\frac{8}{3\pi}t\sqrt{x^3}$$

ومنه:

$$u\left(x,t\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}\ \sqrt{t}\ \ x^{\frac{3}{4}}$$

2. 14 . 7 . حل معادلات تفاضلية جزئية من مرتبة كسرية:

قام كل من(Ranjit R.Dhunde and G.L.Waghmare) *في* عام2016 بحل معادلة التلغراف التقاضلية الجزئية من مرتبة كسرية باستخدام تحويل لابلاس المضاعف كذلك طبّق كل من(Likexue and Pengjigen)عام2011 تحويل لابلاس لحل معادلة تفاضلية عادية ذات مرتبة كسرية من الشكل:

$${}_0^cD_t^{\alpha}\left(x\left(t\right)\right)=A\,x\left(t\right)+f\ \left(t\right)\ ;\ \ 0<\alpha<1\ \ ,t\geq 0$$

أما (Dole, Khondagale, Panchal) *عام* 2016 قاموا بتطبيق تحويل سوميد على مشتقات كسرية معرفة حسب تعريف Hilfer-Prabhakar يمكن للقارئ العودة للمراجع [34,24]، وفي هذه الأطروحة سنتطرق الى حل معادلات تفاضلية جزئية من مراتب كسرية بحيث إن الاشتقاق الجزئي الكسري فيها معرف وفق كابوتو (caputo):

$$\frac{\partial^{\alpha}\ u\left(x\ \ t\right)}{\partial x^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma\left(m-\alpha\right)}\int_0^x(x-\zeta)^{m-\alpha-1}\frac{\partial^m u(\zeta,t)}{\partial\zeta^m}d\zeta \qquad (106.2)$$

حيث: $m-1<\alpha\leq m\,,m\in\mathbb{N}$

$$\frac{\partial^{\beta}\ u\left(x\ \ t\right)}{\partial t^{\beta}}=\frac{1}{\Gamma\left(n-\beta\right)}\int_0^t(t-\tau)^{n-\beta-1}\ \frac{\partial^n u(x,\tau)}{\partial\tau^n}\,d\tau \qquad (107.2)$$

حيث: $n\in\mathbb{N}$ و $n-1<\beta\leq n$،

2. 14 . 7 .1 **مبرهنة:** لتكن $u=u(x,t)$ دالة تحقق شروط وجود تحويل لابلاس- الزاكي و قابلة للاشتقاق من مرتبة كسرية α لهذه المشتقات يكون:

$$1)\ LE\left(\frac{\partial^{\alpha}\ u(x\ t)}{\partial x^{\alpha}}\right)=s^{\alpha}\ LE\ (u)-\sum_{j=0}^{m-1}s^{\alpha-j-1}\ E\left[\frac{\partial^{j}u(0,t)}{\partial x^{j}}\right]\quad (108.2)$$

حيث: $m-1<\alpha\le m$ و $m\in\mathbb{N}$.

الاثبات :

$$LE\left(\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial x^{\alpha}}\right)=LE\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x(x-\zeta)^{m-\alpha-1}\frac{\partial^m u(\zeta,t)}{\partial\zeta^m}d\zeta\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}LE\left(\int_0^x(x-\zeta)^{m-\alpha-1}\frac{\partial^m u(\zeta,t)}{\partial\zeta^m}d\zeta\right)$$

وحسب المبرهنة (1) في التلاف نجد:

$$=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}L\left(x^{m-\alpha-1}\right)LE\left(\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial x^m}\right)\quad ;m\in\mathbb{N}$$

وحسب خاصة المشتق من مرتبة طبيعية نجد:

$$LE\left(\frac{\partial^{\alpha}\ u(x\ t)}{\partial x^{\alpha}}\right)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}.\frac{\Gamma(m-\alpha)}{s^{m-\alpha}}\left[s^{m}\ LE\ (u)-\sum_{j=0}^{m-1}s^{m-j-1}\frac{\partial^{j}\mathrm{u}\ (0,\mathrm{t})}{\partial x^{j}}\right]$$

$$=s^{\alpha}\ LE\ (u)-\sum_{j=0}^{m-1}s^{\alpha-j-1}\ E\left(\frac{\partial^{j}u(0,t)}{\partial x^{j}}\right)$$

$$2)LE\left(\frac{\partial^{\beta}\ u(x\ t)}{\partial t^{\beta}}\right)=p^{-\beta}\ LE\ (u)-\sum_{k=0}^{n-1}p^{-\beta+2+k}\ L\left[\frac{\partial^{k}\ u(x,0)}{\partial t^{k}}\right]\quad (109.2)$$

حيث: $n-1<\beta\le n$ و $n\in\mathbb{N}$

الإثبات:

$$LE\left[\frac{\partial^{\beta}\ u(x\ t)}{\partial t^{\beta}}\right]=LE\left[\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_0^t(t-\tau)^{n-\beta-1}\ \frac{\partial^n u(x,\tau)}{\partial\tau^n}\ d\tau\right]$$

وحسب المبرهنة (2) من مبرهنات التلاف:

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\times\frac{1}{p}\times E\left(t^{n-\beta-1}\right).LE\ \frac{\partial^{n}\ u(x\ t)}{\partial t^{n}}\qquad ;\ \ n\in\mathbb{N}$$

بالاعتماد على خاصة المشتق من مرتبة طبيعية:

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\times\frac{1}{p}\times\Gamma(n-\beta)\times p^{n-\beta+1}LE\left[\frac{\partial^n u(x\ t)}{\partial t^n}\right]$$

$$=p^{n-\beta}\left[\frac{1}{p^n}LE\left(u(x,t)\right)-\sum_{K=0}^{n-1}p^{2+k-n}\ L\left[\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}\right]\right]$$

$$=p^{-\beta}LE(u)-\sum_{K=0}^{n-1}p^{2+k-n}\ L\left[\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}\right]$$

تمهيدية: لتكن لدينا دالة ميتاغ ليفلر المعرفة بالعلاقة:

$$E_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\quad ;\ t,\beta\in\mathbb{C}\ ,Re(\alpha)>0$$

عندئذ تحويل لابلاس البسيط لها هو:

$$L\left[E_{\alpha,\beta}(x)\right]=\int_0^{\infty}e^{-sx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty}e^{-sx}\ x^k\ dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$$

أما:

$$L\left[E_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})\right]=\int_0^{\infty}e^{-sx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ L\left(x^{\alpha k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{S^{\alpha K+1}}\qquad ;\alpha,\beta>0\quad (110.2)$$

وكحالة خاصة منها عندما $\beta=1$:

$$L\left[E_{\alpha,1}\left(x^{\alpha}\right)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\ \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{s^{\alpha K+1}}$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{0}^{\infty}\left(s^{-\alpha}\right)^{K}=\frac{1}{s\left(1-s^{-\alpha}\right)}$$

$$=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1}\qquad ;\left|s^{\alpha}\right|>1$$

توطئة(1): من أجل أي $\alpha,\beta>0$ و $A\in\mathbb{C}$ فإنّ :

$$L\left[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(A\,x^{\alpha}\right)\right]=s^{\alpha-\beta}\left(s^{\alpha}-A\right)^{-1}\qquad(111.2)$$

وذلك عندما $Re(s)>|A|^{\frac{1}{\alpha}}$ حيث $Re(s)$ هو القسم الحقيقي من العدد العقدي s.

الإثبات: حسب تعريف تحويل لابلاس يكون:

$$L\left[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(A\,x^{\alpha}\right)\right]=\int_{0}^{\infty}e^{-sx}\,x^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{K}\ \ x^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ \int_{0}^{\infty}e^{-sx}x^{\alpha k+\beta-1}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{K}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}L\left(x^{\alpha k+\beta-1}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{K}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha k+\beta)}{s^{\alpha k+\beta}}=s^{-\beta}\ \sum_{K=0}^{\infty}(A\,s^{-\alpha})^{K}$$

وعندما $Re(s)>|A|^{\frac{1}{\alpha}}$ يصبح:

$$L\left[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(A\,x^{\alpha}\right)\right]=s^{-\beta}\frac{1}{1-As^{-\alpha}}=s^{\alpha-\beta}(s^{\alpha}-A)^{-1}$$

توطئة 2: أما تحويل الزاكي لدالة ميتاغ ليفلر:

$$E\left[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(A\,x^{\alpha}\right)\right]=p\int_0^{\infty}e^{\frac{-x}{p}}\,x^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^K\quad x^{\alpha k}}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}\;dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^K}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}\;p\int_0^{\infty}e^{\frac{-x}{p}}\;x^{\alpha k+\beta-1}\;dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^K}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}\;E\left(x^{\alpha k+\beta-1}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^K}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}\;\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)\;p^{\alpha k+\beta-1}$$

$$=p^{\beta+1}\;\sum_{K=0}^{\infty}A^k\quad p^{\alpha k}$$

و بشرط $Re\left(p\right)<\left|A\right|^{-\frac{1}{\alpha}}$ يكون :

$$E\left[x^{b-1}E_{a,b}\left(A\,x^{a}\right)\right]=p^{b+1}\frac{1}{1-Ap^{a}}=\frac{p^{b+1}}{1-A\,p^{a}}\quad(112.2)$$

والآن سنستخدم تحويل لابلاس–الزاكي في حل معادلتي التلغراف الكسرية وانتشار الموجة الكسرية (Fractional diffusion- wave equation) (Fractional telegraph equation)

التطبيق الأول : حل معادلة التلغراف الكسرية الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial^{\alpha}\mathrm{u}\left(x,t\right)}{\partial x^{\alpha}}=a\frac{\partial^{\beta}\mathrm{u}\left(x,t\right)}{\partial t^{\beta}}+\mathrm{b}\frac{\partial^{\gamma}\mathrm{u}\left(x,t\right)}{\partial t^{\gamma}}+c\,u\left(x,t\right)+h\left(x,t\right)\quad(113.2)$$

حيث: $1<\alpha,\beta\leq 2$ و $0<\gamma\leq 1$ أما $x,t\geq 0$

مع الشروط الابتدائية والحدية:

$$u\left(x,0\right)=f_1\left(x\right),u_t\left(x,0\right)=f_2\left(x\right)\quad(114.2)$$

$$u\left(0,t\right)=f_3\left(t\right),u_x\left(0,t\right)=f_4\left(t\right)\quad(115.2)$$

إذا طبقنا تحويل لابلاس –الزاكي على طرفي المعادلة (113.2) مع خاصة الخطية والمشتق الكسري نجد:

$$s^{\alpha} LE(u) - s^{\alpha-1} E(u(0,t)) - s^{\alpha-2} E(u_x(0,t)) = a\left[p^{\beta} LE\ u - p^{\beta-1} L(u(x,0)) - p^{\beta-2} L(u_t(x,0))\right]$$
$$+\mathrm{b}\left[p^{\gamma} LE(u) - p^{\gamma-1} L(u(x,0)) - p^{\gamma-2} L(u_t(x,0))\right]$$
$$+c\, LE(u) + LE(h)$$

ومنه بالاستفادة من الشروط الابتدائية والحدية حيث أن:

$$L(u(x,0)) = L(f_1(x)) = \overline{f_1}(s)$$
$$L(u_t(x,0)) = L(f_1(x)) = \overline{f_2}(s)$$
$$E(u(0,t)) = L(f_3(t)) = \overline{f_3}(p)$$
$$E(u_x(0,t)) = L(f_4(t)) = \overline{f_4}(p)$$

عندئذ:

$$LE(u) = \frac{1}{s^{\alpha} - a p^{\beta} - b p^{\gamma} - c}\begin{bmatrix} s^{\alpha-1}\overline{f_3}(p) + s^{\alpha-2}\overline{f_4}(p) \\ -a p^{\beta-1}\overline{f_1}(s) - a p^{\beta-2}\overline{f_2}(s) - b p^{\gamma-1}\overline{f_1}(s) \\ -b p^{\gamma-2}\overline{f_2}(s) + LE(h) \end{bmatrix}$$

نأخذ تحويل LE^{-1} لطرفي العلاقة الأخيرة للحصول على الحل لمعادلة التلغراف الكسرية

مثال(14): بفرض لدينا المعادلة التفاضلية:

$$\frac{\partial^{\alpha} \mathrm{u}(x,t)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^2 \mathrm{u}(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathrm{u}(x,t)}{\partial t} + u(x,t)$$

حيث: $1 < a, \beta \le 2$ و $x, t \ge 0$

مع الشروط الابتدائية الحدية:

$$u(x,0) = E_{\alpha}(x^{\alpha}) + x\, E_{\alpha,2}(x^{\alpha})$$
$$u_t(x,0) = -\left[E_{\alpha}(x^{\alpha}) + x\, E_{\alpha,2}(x^{\alpha})\right]$$
$$u(0,t) = u_x(0,t) = e^{-t}$$

نأخذ تحويل لابلاس الزاكي على طرفي المعادلة:

$$LE\left(\frac{\partial^{\alpha} \mathrm{u}(x,t)}{\partial x^{\alpha}}\right) = LE\left(\frac{\partial^2 \mathrm{u}(x,t)}{\partial t^2}\right) + \mathrm{LE}\left(\frac{\partial \mathrm{u}(x,t)}{\partial t}\right) + LE(u)$$

$$s^{\alpha} LE(u) - s^{\alpha-1} E(u(0,t)) - s^{\alpha-2} E(u_x(0,t)) = \frac{1}{p^2} LE(u) - L(u(x,0))$$

$$- pL(u_t(x,0)) + \frac{1}{p} LE(u) - pL(u(x,0)) + LE(u)$$

و حيث أنّ :

$$L\left[E_{\alpha}\left(x^{\alpha}\right) + x\, E_{\alpha,2}\left(x^{\alpha}\right)\right] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1} + \frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}-1}$$

$$L\left[-\left(E_{\alpha}\left(x^{\alpha}\right) + x\, E_{\alpha,2}\left(x^{\alpha}\right)\right)\right] = -\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1} + \frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}-1}\right]$$

$$E\left(e^{-t}\right) = \frac{p^2}{1+p}$$

بالتعويض سنحصل على :

$$(s^{\alpha} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} - 1) LE(u) = \frac{s^{\alpha-1} p^2}{1+p} + \frac{s^{\alpha-2} p^2}{1+p} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha-1}} - \frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha-1}}$$

$$+ \frac{p\, s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1} + \frac{p\, s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}-1} - \frac{p\, s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1} - \frac{p\, s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}-1}$$

$$\left[\frac{s^{\alpha} p^2 - 1 - p - p^2}{p^2}\right] LE(u) = \frac{\left(s^{\alpha-1} + s^{\alpha-2}\right) p^2}{1+p} - \frac{\left(s^{\alpha-1} + s^{\alpha-2}\right)}{s^{\alpha}-1}$$

$$= \left(s^{\alpha-1} + s^{\alpha-2}\right)\left[\frac{p^2}{1+p} - \frac{1}{s^{\alpha-1}}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{p^2 s^{\alpha} - 1 - p^2 - p}{p^2}\right] LE(u) = \left(s^{\alpha-1} + s^{\alpha-2}\right)\left[\frac{p^2 s^{\alpha} - p^2 - 1 - p}{\left(s^{\alpha}-1\right)\left(1+p\right)}\right]$$

$$\Rightarrow LE(u) = \left(s^{\alpha-1} + s^{\alpha-2}\right)\left(\frac{p^2}{\left(s^{\alpha}-1\right)\left(1+p\right)}\right) \quad (116.2)$$

نطبّق تحويل لابلاس– الزاكي العكسي على طرفي المعادلة الأخيرة فنجد:

$$u(x,t) = e^{-t}\left[E_{\alpha}\left(x^{\alpha}\right) + xE_{\alpha,2}\left(x^{\alpha}\right)\right]$$

وكحالة خاصة عندما $\alpha = 2$ عندئذ ومن العلاقة (116.2)نجد:

$$LE(u) = \frac{(s+1)\left(p^2\right)}{\left(s^2-1\right)(1+p)} = \frac{p^2}{(s-1)(1+p)}$$

بأخذ تحويل لابلاس- الزاكي العكسي نجد: $u(x,t)=e^{x-t}$

التطبيق الثاني: حل معادلة انتشار الموجة الكسرية

(Fractional diffusion-wave equation)

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x\ t)}{\partial t^{\alpha}}=c^{2}\frac{\partial^{\beta} u\ x\ t}{\partial x^{\beta}}\ \ ;\ m-1<\alpha\le m\ ,n-1<\beta\le n\quad (117.2)$$

مع الشروط الابتدائية والحدية:

$$u(x,0)=f_1(x)\ \ ,u_t(x,0)=f_2(x)\quad (118.2)$$

$$u(0,t)=g_1(t)\ \ ,u_x(0,t)=g_2(t)\qquad (119.2)$$

بتطبيق تحويل لابلاس الزاكي على طرفي المعادلة نجد:

$$LE\left(\frac{\partial^{\alpha} u\ x\ t}{\partial t^{\alpha}}\right)=c^{2}LE\left(\frac{\partial^{\beta} u(x\ t)}{\partial x^{\beta}}\right)$$

بالاعتماد على خاصة المشتقات الكسرية عند تطبيق تحويل لابلاس-الزاكي عليها نحصل على:

$$\frac{1}{p^{\alpha}}LE(u)-\sum_{j=0}^{m-1}p^{-\beta+k+2}L\left[\frac{\partial^{j} u(x,0)}{\partial t^{j}}\right]=c^{2}\left[s^{\alpha}LE(u)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}E\left[\frac{\partial^{k} u(0,t)}{\partial x^{k}}\right]\right]$$

بالاستفادة من الشروط الابتدائية والحدية وذلك بعد أخذ تحويل لابلاس البسيط للشرطين الابتدائيين وتحويل الزاكي والبسيط للشرطين الحدين نحصل على معادلة جبرية سهلة الحل ومن ثم نطبق التحويل العكسي للتحويل المستخدم فنحصل على حل المسألة المعطاة.

ملاحظة : يمكن أن يكون β عدد صحيح و $m-1<\alpha\le m$ أي كسري في معادلة انتشار الموجة و تبقى معادلة تفاضلية من مرتبة كسرية.

مثال: حل المعادلة التفاضلية ذات المرتبة الكسرية الآتية :

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}=\frac{\partial^{2} u(x\ t)}{\partial x^{2}}\qquad ;\qquad 0<\alpha\le 1$$

مع الشرط الابتدائي و الشروط الحدية الآتية: $u(x,0)=chx$

$$u(0,t)=E_{\alpha}(t^{\alpha})\ \ ,\ \ u_x(0,t)=0$$

لحل هذه المسألة نأخذ تحويل لابلاس – الزاكي لطرفي المعادلة المعطاة:

$$LE\left(\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}\right)=LE\left(\frac{\partial^{2} u(x\ t)}{\partial x^{2}}\right)$$

بتطبيق خواص المشتقات ذات المراتب الكسرية والطبيعية نجد:

$$\frac{1}{p^{\alpha}}LE\,(u)-p^{2-\alpha}L\,(u\,(x\,,0))=s^{2}LE\,(u)-sE\,(u\,(0,t))-E\,(u_{x}\,(x\,,t))$$

$$\left(\frac{1}{p^{\alpha}}-s^{2}\right)LE\,(u)=\frac{p^{2-\alpha}s}{s^{2}-1}-\frac{sp^{2}}{1-p^{\alpha}}$$

$$\left(\frac{1-s^{2}p^{\alpha}}{p^{\alpha}}\right)LE\,(u)=\frac{sp^{2}\left[p^{-\alpha}-1-s^{2}+1\right]}{\left(s^{2}-1\right)\left(1-p^{\alpha}\right)}$$

$$\left(\frac{1-s^{2}p^{\alpha}}{p^{\alpha}}\right)LE\,(u)=\frac{sp^{2}\left[p^{-\alpha}-s^{2}\right]}{(s^{2}-1)(1-p^{\alpha})}$$

$$LE\,(u)=\frac{sp^{2}}{(s^{2}-1)(1-p^{\alpha})}$$

بأخذ تحويل لابلاس الزاكي العكسي للطرفين نجد: $u\,(x\,,t)=chx\;E_{\alpha}\left(t^{\alpha}\right)$

ملاحظة : يمكن تعميم التحويل المدروس (تحويل لابلاس–الزاكي) عندما يكون تحويل لابلاس الداخل فيه ثنائي الجانب عندئذ يكون:

$$LE\left(f\;(x\,,t)\right)=\;p\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx-\frac{t}{p}}f\;(x\,,t)dxdt \qquad (120.2)$$

و ذلك من أجل $0<t<\infty\;\;,\;\;-\infty<x<\infty$.

أهم النقاط التي وردت في الفصل الثاني:

1. درسنا تحويل تكاملي مضاعف جديد نواته عبارة عن جداء نواتي تحويلين تكاملين بسيطين مختلفين هما تحويلي لابلاس و الزاكي و هو تحويل لابلاس–الزاكي التكاملي
2. عرفنا التلاف الخاص به لنتطرق إلى مبرهنات معززة بالبرهان للاستفادة منها و مما سبقها من تعاريف في تطبيقات هذا التحويل على المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية و غير الخطية من مراتب صحيحة و كسرية و جملها كذلك المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية بنواة مستمرة أو شاذة .
3. دمجنا هذا التحويل المضاعف مع طرق تقريبية للحصول على طرق سهلة و فعّالة لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية و جملها .

الفصل الثالث

تحويل ميلين – الزاكي (ME) و تطبيقاته و حالات خاصة منه

تمهيد:

في هذا الفصل ندرس تحويل مضاعف مختلط آخر له طابع مختلف عن التحويل الوارد في الفصل الثاني حيث نواته خليط من كثير حدود و تابع أسي فنتج شيء من الاختلاف في الخواص و النتائج و التلاف بالإضافة للتطبيقات ليضفي أهمية على العمل في هذه الأطروحة.و قد تطرقنا إلى علاقة هذا التحويل بتعميم التحويل السابق بالإضافة إلى خواص و تعاريف و مبرهنات عديدة كانت محوراً أساسياً في تطبيقات هذا التحويل كذلك الأمر نتج لدينا من تغيير في المتحول بالتحويل الذي بالفصل السابق حالات خاصة من تحويل ميلين–الزاكي و هما ميلين المنتهي–الزاكي و ميلين غير التام–الزاكي اقتصرنا في دراستها على خواص وتعاريف ومبرهنات أساسية و لم نتطرق لتطبيقات لهما على وجه الخصوص.

1.3. تعريف تحويل ميلين – الزاكي :

لتكن $f(x,t)$ دالة معرفة ومستمرة قطعيا قابلة للمكاملة على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ عندئذ يمكن تعريف تحويل ميلين – الزاكي بالعلاقة :

$$ME(f(x,t)) = M_X E_t(f,x,t) = p\int_0^\infty\int_0^\infty x^{s-1}e^{-t/p}f(x,t)dxdt \qquad (1.3)$$

حيث $s,p\in\mathbb{C}$ و يرمز لهذا التحويل بالرمز : $ME[f(x,t))(s,p) = M(f(x,t);s,p] = F(s,p)$

2.3. شروط وجود التحويل:

لتكن $f = f(x,t)$ دالة مستمرة على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ وكذلك:

$$f(x,t) = \begin{bmatrix} o(x^{-a}e^{t/b}) \ for \ x\to\infty, t = const \\ o(x^{-a}e^{t/b}) \ for \ t\to\infty, x = const \\ o(x^{-c}e^{t/d}) \ for \ x\to\infty, t = const \\ o(x^{-c}e^{t/d}) \ for \ t\to\infty, x = const \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

عندئذ $ME(f)$ موجود من أجل أي $s,p\in\mathbb{C}$ ويحقق: $\mathrm{Re}(p)\in]b,d[$, $\mathrm{Re}(s)\in]a,c[$

3.3. علاقة التحويل بتحويل لا بلاس–الزاكي :

في الفصل السابق درسنا تحويل لا بلاس–الزاكي بحيث كان تحويل لابلاس البسيط و المدمج مع تحويل الزاكي هو تحويل لا بلاس أحادي الجانب فإذا كان تحويل لا بلاس ثنائي الجانب فعندئذ تصبح علاقة تحويل ثنائي لا بلاس–الزاكي هي :

$$LE(f(x,t)) = p\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} f(x,t)e^{-sx}e^{-t/p}dxdt$$

وبالتالي نفرض $u = e^{-x}$ ومنه $du = e^{-x}du$ أما حدود التكامل:

$$x \to +\infty \Rightarrow u \to 0 \ \& x \to -\infty \Rightarrow u \to +\infty$$

$$\Rightarrow LE(f(x,t)) = p\int_{\infty}^{0}\int_{0}^{\infty} f(-\ln u,t)u^{s}e^{-t/p}(-\frac{du}{u})dt$$

$$= p\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(-\ln u,t)u^{s-1}e^{-t/p}\,du\,dt$$

نفرض $g(u,t)=f(-\ln u,t)$ عندئذ :

$$LE(f(x,t)) = ME(f(e^{-x},t)) \qquad (3.3)$$

أو

$$LE(f(-\ln u,t)) = ME(f(u,t)) \qquad (4.3)$$

4.3. خواص تحويل ميلين الزاكي :

لتكن $f(x,t)$ و $f_1(x,t)$ و $f_2(x,t)$ دوال معرفة على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ وتحقق شروط وجود تحويل ميلين–الزاكي لها ولتكن $\alpha,\beta,\lambda,a \in \mathbb{R}$ عندئذ :

1.4.3. **خاصة الخطية** : من أهم الخواص و أبرزها هذه الخاصية حيث:

$$ME\left(\alpha f_1(x,t)+\beta f_2(x,t)\right) = \alpha ME\left(f_1(x,t)\right)+\beta ME\left(f_2(x,t)\right) \qquad (5.3)$$

الإثبات:

$$ME(\alpha f_1(x,t))+\beta f_2(x,t)) = p\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left[\alpha f_1(x,t)+\beta f_2(x,t)\right]x^{s-1}e^{-t/p}dxdt$$

$$= \alpha p \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(x,t) x^{s-1} e^{-t/p} dx dt + \beta p \int_0^\infty \int_0^\infty f_2(x,t) x^{s-1} e^{-t/p} dx dt$$

$$= \alpha ME(f_1(x,t)) + \beta ME\left(f_2(x,t)\right)$$

2.4.3. خاصة التحاكي:

$$ME(f(ax,bt)) = \frac{a^{-s}}{b} ME(f(x,t);s,bp) \quad ; \quad a,b \in \mathbb{R} \qquad (6.3)$$

الإثبات:

$$ME(f(ax,bt)) = p \int_0^\infty \int_0^\infty f(ax,bt) x^{s-1} e^{-t/p} dx dt$$

نفرض $ax = u$ و $bt = v$ و منه :

$$= p \int_0^\infty \int_0^\infty f(u,v) \left(\frac{u}{a}\right)^{s-1} e^{-\frac{v}{bp}} \frac{du}{a} \frac{dv}{b}$$

$$= \frac{a^{-s}}{b} ME(f(x,t);s,bp)$$

3.4.3. خاصة الانسحاب (shifting) :

$$ME(x^a e^{-bt} f(x,t)) = p \int_0^\infty \int_0^\infty x^a e^{bt} f(x,t) x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dx dt$$

$$= p \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) x^{(s+a)-1} e^{-t\left(\frac{1}{p}-b\right)} dx dt$$

بفرض : $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - b \Rightarrow q = \frac{p}{1-bp}$ وهو الوسيط الثاني للتحويل عندئذ:

$$ME(x^a e^{-bt} f(x,t)) = ME\left(f;s+a,\frac{p}{1-bp}\right) \qquad (7.3)$$

4.4.3. مبرهنة:

لتكن $f = f(x,t)$ دالة تحقق شروط وجود تحويل ميلين–الزاكي لها و ليكن $a \in \mathbb{R}$ عندئذ:

$$ME(x^a f(x,t)) = ME(f(x,t);s+a,p) \qquad (8.3)$$

الاثبات:

$$ME(x^a f(x,t)) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^a f(x,t) x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dudt$$
$$= p\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) x^{(s+a)-1} e^{-\frac{t}{p}} dudt$$
$$= ME(f(x,t); s+a, bp)$$

5.4.3. **مبرهنة:** لتكن $f = f(x,t)$ دالة تحقق شروط وجود تحويل ميلين–الزاكي عندئذ:

1) $$ME(tf(x,t); s, p) = p^2 \frac{\partial}{\partial p} ME(f) - pME(f) \qquad (9.3)$$

الاثبات:

$$\frac{\partial}{\partial p} ME(f(x,t)) = \frac{\partial}{\partial p} p\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) e^{-\frac{t}{p}} x^{s-1} dudt$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) e^{-\frac{t}{p}} x^{s-1} dudt + p\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) \times \frac{t}{p^2} x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dudt$$
$$= \frac{1}{p} ME(f(x,t)) + \frac{1}{p^2} ME(tf(x,t))$$

و منه :
$$ME(tf(x,t); s, p) = p^2 \frac{\partial}{\partial p} ME(f) - pME(f)$$

2) $$ME(t^2 f(x,t)) = p^4 \frac{\partial^2}{\partial p^2} ME(f) \qquad (10.3)$$

الإثبات:

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} ME(f(x,t)) = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial}{\partial p} ME(f(x,t))\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial p}\left[\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dxdt + \frac{1}{p}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t)\, t\, x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dxdt\right]$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) x^{s-1} \frac{t}{p^2} e^{-\frac{t}{p}} dxdt - \frac{1}{p^2}\int_0^\infty \int_0^\infty tf(x,t) x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dxdt$$
$$+ \frac{1}{p}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) \frac{t^2}{p^2} x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dxdt$$
$$= \frac{1}{p^4} ME(t^2 f(x,t))$$

و بالتالي:

$$ME(t^2 f(x,t)) = p^4 \frac{\partial^2}{\partial p^2} ME(f)$$

بالمثل سنجد:

$$ME(t^3 f(x,t)) = p^6 \frac{\partial^3}{\partial p^3} ME(f) + 3P^5 \frac{\partial^2}{\partial p^2} ME(f) \qquad (11.3) \qquad (3$$

تعميم:

$$ME(t^b f(x,t)) = p^{2b} \frac{\partial^b}{\partial p^b} ME(f) + \frac{b!}{b-1} P^{2b-1} \frac{\partial^{b-1}}{\partial p^{b-1}} ME(f)$$

$$+ \frac{b!}{b-2} P^{2b-2} \frac{\partial^{b-2}}{\partial p^{b-2}} ME(f) + ... + \frac{b!}{2} P^{2b-(b-2)} \frac{\partial^2}{\partial p^2} ME(f)$$

حيث: $b \geq 2$.

6.4.3. مبرهنة:

لتكن $f(x,t)$ دالة معرفة ومستمرة على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ و قابلة للاشتقاق n مرة بالنسبة للمتغير x و تحقق شروط الوجود لتحويل ميلين – الزاكي لها عندئذ:

$$ME(x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)) = p \int_0^\infty \int_0^\infty x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dx dt$$

$$= p \int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} dt \int_0^\infty x^s \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dx \qquad (1$$

بالمكاملة بالتجزئة حيث:

$$x^s = u \Rightarrow s x^{s-1} dx = du$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dx = dv \Rightarrow f(x,t) = v$$

نجد :

$$ME(x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)) = p \int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} dt \left\{ \left[x^s f(x,t) \right]_0^\infty - s \int_0^\infty x^{s-1} f(x,t) dx \right\}$$

و من شروط الوجود لتحويل ميلين–الزاكي للدالة $f(x,t)$ نحصل على:

$$ME(x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)) = -ps \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} x^{s-1} f(x,t) dt dx = -s ME(f(x,t)) \qquad (12.3)$$

$$ME(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)) = p\int_0^\infty\int_0^\infty x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dxdt \qquad (2$$

$$x^{s+1} = u \Rightarrow (s+1)x^s dx = du$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t))dx = dv \Rightarrow v = \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$$

$$ME(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)) = p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left\{\left[x^2\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right]_0^\infty - (s+1)\int_0^\infty x^s\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dx\right\}$$

$$= p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}\left[x^2\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right]_0^\infty dt - (s+1)ME(x\frac{\partial}{\partial x}f(x,t))$$

بفرض وجود σ_1,σ_2 من $]a,c[$ و يتحقق $\lim_{x\to 0}x^2\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \;\&\; \lim_{x\to\infty}x^2\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

عندما $\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2$ عندئذ:

$$ME(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)) = s(s+1)ME(f(x,t)) \qquad (13.3)$$

بالمثل و بالمكاملة بالتجزئة أيضاً سنجد :

$$ME(x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x,t)) = -s(s+1)(s+2)ME(f(x,t)) \qquad (14.3) \qquad (3$$

التعميم:

$$ME(x^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x,t)) = (-1)^n s(s+1)(s+2)+.....+(s+n-1)ME(f(x,t)) \qquad (15.3)$$

ملاحظة :

هذه المبرهنة نستفيد منها عند حل المعادلات التفاضلية الجزئية من الشكل:

$$\sum_{q=0}^{m}a_q x^q\frac{\partial^q}{\partial x^q}f(x,t) + \sum_{r=0}^{n}b_r\frac{\partial^r}{\partial t^r}f(x,t) = g(x,t) \qquad (16.3)$$

و التي تسمى معادلات كوشي التفاضلية الجزئية و ذلك كتطبيق لتحويل ميلين– الزاكي.

7.4.3. مبرهنة:

$$ME(\ln^k x\, f(x,t)) = \frac{\partial^k}{\partial s^k} ME(f(x,t)) \qquad (17.3)$$

الإثبات: سنثبت صحة هذه المبرهنة بالاستقراء الرياضي :

1- نثبت صحة العلاقة من أجل $k = 1$:

أي لنثبت صحة العلاقة: $ME(\ln x\, f(x,t)) = \frac{\partial}{\partial s} ME(f(x,t))$

لنأخذ الطرف الأيمن من المعادلة حيث:

$$\frac{\partial}{\partial s} ME(f(x,t)) = \frac{\partial}{\partial s}\left[p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)\, x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dx dt \right]$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)\,(\ln x)\, x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dx dt$$

$$= ME(\ln x\, f(x,t))$$

2- نفرض صحة العلاقة من أجل $k = m$:

$$ME(\ln^m x\, f(x,t)) = \frac{\partial^m}{\partial s^m} ME(f)$$

3- نثبت صحة العلاقة من أجل $k = m+1$:

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial s^{m+1}} ME(f) = \frac{\partial^{m+1}}{\partial s^{m+1}}\left[p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)\, x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dx dt \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^m}{\partial s^m} ME(f(x,t)) \right] = \frac{\partial}{\partial s}\left[ME(\ln^m x\, f(x,t)) \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\, p\int_0^\infty\int_0^\infty \ln^m x\, f(x,t)\, x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dt dx$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty \ln^{m+1} x\, f(x,t)\, x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dt dx$$

$$= ME\left[\ln^{m+1} x\, f(x,t) \right]$$

8.4.3. مبرهنة:

لتكن $f(x,t)$ دالة معرفة ومستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ و تحقق شروط الوجود لتحويل ملين – الزاكي لها عندئذ:

1) $$ME\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right)=-(s-1)ME(f(x,t);s-1,p) \qquad (18.3)$$

الاثبات:

$$ME\left(\frac{\partial}{\partial x}(f(x,t)\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dtdx$$

$$=p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\int_0^\infty x^{s-1}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dx$$

بالمكاملة بالتجزئة:

$$u=x^{s-1}\Rightarrow(s-1)x^{s-2}dx=du$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,t))dx=dv\Rightarrow f(x,t)=v$$

$$ME\left(\frac{\partial}{\partial x}(f(x,t)\right)=p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left\{\left[x^{s-1}f(x,t)\right]_0^\infty-(s-1)\int_0^\infty x^{s-2}f(x,t)dx\right\}$$

من شروط وجود التحويل لدينا : $\lim_{x\to0}x^{s-1}f(x,t)=0\ \&\lim_{x\to\infty}x^{s-1}f(x,t)=0$ عندئذ:

$$ME\left(\frac{\partial}{\partial x}(f(x,t)\right)=-(s-1)p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)x^{(s-1)-1}e^{-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$=-(s-1)ME(f(x,t);s-1,p)$$

2) $$ME\left(\frac{\partial}{\partial t}(f(x,t)\right)=\frac{1}{p}ME(f(x,t)-pM(f(x,t)) \qquad (19.3)$$

الاثبات:

$$ME\left(\frac{\partial}{\partial t}(f(x,t)\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$=p\int_0^\infty x^{s-1}dx\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dt$$

بالمكاملة بالتجزئة:

$$e^{-\frac{t}{p}}=u\Rightarrow-\frac{1}{p}e^{-\frac{t}{p}}dt=du$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(x,t))dt = dv \Rightarrow f(x,t) = v$$

$$ME(\frac{\partial}{\partial t}(f(x,t)) = p\int_0^\infty x^{s-1}dx \left\{ \left[e^{-\frac{t}{p}} f(x,t) \right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty f(x,t)e^{-\frac{t}{p}}dt \right\}$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dxdt - p\int_0^\infty x^{s-1}f(x,0)dx$$

$$= \frac{1}{p}ME(f(x,t) - pM(f(x,0))$$

$$ME\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right) = (s-1)(s-2)ME(f(x,t);s-2,p) \qquad (20.3)$$ (3

الاثبات:

$$ME\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right) = p\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$= p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt \int_0^\infty x^{s-1}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}dx$$

$$x^{s-1} = u \Rightarrow (s-1)x^{s-2}dx = du$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}dx = dv \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}f(x,t) = v$$

$$ME\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right) = p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt \left\{ \left[x^{s-1}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) \right]_0^\infty - (s-1)\int_0^\infty x^{s-2}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dx \right\}$$

$$= p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} \left[x^{s-1}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) \right]_0^\infty dt - (s-1)ME(\frac{\partial}{\partial x}f(x,t);s-1,p)$$

بفرض وجود σ_1,σ_2 من $]a,c[$ و يتحقق $\lim_{x\to 0} x^{s-1}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \;\&\; \lim_{x\to\infty} x^{s-1}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

عندما $\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2$ عندئذ:

$$ME\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right) = -(s-1)p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}x^{s-2}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dxdt$$

$$= -(s-1)ME(\frac{\partial}{\partial x}f(x,t));s-1,p)$$

$$= (s-1)(s-2)ME(f(x,t));s-2,p)$$

$$ME\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{p^2}ME(f(x,t))-M(f(x,0))-pM(f_t(x,0)) \quad (21.3)$$ (4

الاثبات:

$$ME\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t)x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$=p\int_0^\infty x^{s-1}dx\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t)dt$$

$$e^{-\frac{t}{p}}=u\Rightarrow -\frac{1}{p}e^{-\frac{t}{p}}=du$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t)dt=dv\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)=v$$

$$=p\int_0^\infty x^{s-1}dx\left\{\left[e^{-\frac{t}{p}}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right]_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)e^{-\frac{t}{p}}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{p}ME(\frac{\partial}{\partial t}f(x,t))-p\int_0^\infty x^{s-1}\frac{\partial}{\partial t}f(x,0)dt$$

$$=\frac{1}{p^2}ME(f(x,t))-M(f(x,0))-pM(\frac{\partial}{\partial t}f(x,0))$$

(5

$$ME\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\,\partial t}\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\,\partial t}x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$=p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\int_0^\infty\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\,\partial t}x^{s-1}dx$$

$$x^{s-1}=u\Rightarrow(s-1)x^{s-2}dx=du$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\,\partial t}dx=dv\Rightarrow\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=v$$

$$ME\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\,\partial t}\right)=p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left[\left[x^{s-1}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right]_0^\infty-(s-1)\int_0^\infty x^{s-2}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx\right]$$

$$=-(s-1)p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}x^{(s-1)-1}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dxdt+E\left(\left[x^{s-1}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right]_0^\infty\right)$$

بفرض وجود σ_1,σ_2 من $]a,c[$ و يتحقق $\lim_{x\to 0}x^{s-1}\frac{\partial f}{\partial x}=0\ \&\ \lim_{x\to\infty}x^{s-1}\frac{\partial f}{\partial x}=0$

عندما $\sigma_1<\mathrm{Re}(s)<\sigma_2$ عندئذ:

$$ME\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\,\partial t}\right)=-(s-1)p\int_0^\infty x^{(s-1)-1}dx\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dt$$

$$e^{-\frac{t}{p}}=u\Rightarrow -\frac{1}{p}e^{-\frac{t}{p}}dt=du$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt=dv\Rightarrow f(x,t)=v$$

$$=-(s-1)p\int_0^\infty x^{(s-1)-1}dx\quad\left[\left[f(x,t)e^{-\frac{t}{p}}\right]_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty f(x,t)e^{-\frac{t}{p}}\,dt\right]$$

$$=+(s-1)p\int_0^\infty x^{(s-1)-1}f(x,0)dx-(s-1)p\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)e^{-\frac{t}{p}}x^{(s-1)-1}\,dxdt$$

$$=-\frac{(s-1)}{p}ME(f(x,t));s-1,p)+(s-1)pM(f(x,0));s-1)\qquad(22.3)$$

9.4.3 مبرهنة: لتكن $f(x,t)$ دالة مستمرة على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ وقابلة للمكاملة على $]0,a_1[\times]0,a_2[$ عندئذ

$$ME\left(\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right)=-\frac{p}{s}ME(f(x,t));s+1,p)\qquad(23.3)$$

الاثبات:

$$ME\left(\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right]x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}\,dxdt$$

$$=p\int_0^\infty x^{s-1}dx\int_0^x d\zeta\left[\int_0^\infty\left(\int_0^t f(\zeta,\eta)d\eta\right)e^{-\frac{t}{p}}dt\right]$$

من قاعدة ليبنتز لمشتق تكامل بوسيط حيث $0<t<\infty \ \& \ 0<x<\infty$:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right)=f(x,b(x))\frac{d}{dx}b(x)-f(x,a(x)\frac{d}{dx}a(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{d}{dx}f(x,t)dt$$

بفرض:

$$\int_0^t f(\zeta,\eta)d\eta=u \Rightarrow f(\zeta,t)dt=du$$

$$e^{-\frac{t}{p}}dt=dv \Rightarrow -pe^{-\frac{t}{p}}=v$$

نحصل على :

$$ME\left(\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right)=p\int_0^\infty x^{s-1}dx \ \left\{\int_0^x d\zeta\left[-p\int_0^t f(\zeta,\eta)d\eta e^{-\frac{t}{p}}\right]_{t=0}^{\infty}+p\int_0^\infty f(\zeta,t)e^{-\frac{t}{p}}.dt\right\}$$

$$=p\int_0^\infty x^{s-1}dx\int_0^x d\zeta\,(p\int_0^\infty f(\zeta,t)e^{-\frac{t}{p}}dt)$$

$$=p^2\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left[\int_0^\infty x^{s-1}dx\left(\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta\right)\right]$$

نفرض:

$$\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta=u \Rightarrow f(x,t)dx=du$$

$$x^{s-1}dx=dv \Rightarrow \frac{1}{s}x^s=v$$

$$ME\left(\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right)=p^2\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\ \left\{\underbrace{\left[\frac{1}{s}\int_0^x f(\zeta,t)x^s\right]}_{0}^{\infty}_{x=0}\ \frac{1}{s}\int_0^x f(x,t)x^s dx\right\}$$

حيث : $\mathrm{Re}(s)<0$

$$ME\left(\int_0^x\int_0^t f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\right)=-\frac{p^2}{s}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)x^s e^{-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$=-\frac{p}{s}ME(f(x,t);s+a,p)$$

5.3 تعريف التلاف : يعطى بشكل عام بالعلاقة:

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(x-\zeta)g(\zeta)d\zeta \qquad (24.3)$$

أما ما يدعى بتلاف ميلين فيعطى بالعلاقة:

$$(f *_m g) = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{\zeta}\right) g(\zeta,\eta) \frac{d\zeta}{\zeta} d\eta \qquad (25.3)$$

الآن لتكن $g(x,t), f(x,t)$ دالتين مستمرتين على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ و لنعرف تلاف هاتين الدالتين بالعلاقة :

$$(f *_m *g)(x,t) = \int_0^t \int_0^\infty f\left(\frac{x}{\zeta}, t-\eta\right) g(\zeta,\eta) \frac{d\zeta}{\zeta} d\eta \qquad (26.3)$$

و الأهم هو تحويل ميلين–الزاكي لهذا التلاف فإنّ المبرهنة الآتية ستوضح ذلك.

1.5.3 مبرهنة التلاف:

لتكن $g(x,t), f(x,t)$ دالتين تحققان شروط وجود تحويل ميلين– الزاكي لهما فعندئذ :

$$ME(f **g) = \frac{1}{p} ME(f).ME(g) \qquad (27.3)$$

الإثبات:

$$ME(f *_m *g) = p\int_0^\infty \int_0^\infty (f *_m *g)(x,t) x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dx\, dt$$

$$= p\int_0^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^t \int_0^\infty f\left(\frac{x}{\zeta}, t-\eta\right) g(\zeta,\eta) \frac{d\zeta}{\zeta} d\eta\right] x^{s-1} e^{-\frac{t}{p}} dx dt$$

$$= p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} dt \int_0^t d\eta \left[\int_0^\infty g(\zeta,\eta) \frac{d\zeta}{\zeta} \int_0^\infty f\left(\frac{x}{\zeta}, t-\eta\right) x^{s-1} dx\right]$$

بتغيير المتحول :

$$\frac{x}{\zeta} = z \Rightarrow x = \zeta z \Rightarrow \partial x = \zeta\, dz$$

نحصل على:

$$ME(f *_m *g) = p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\int_0^t d\eta \int_0^\infty g(\zeta,\eta)\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^\infty f(z,t-\eta)(\zeta z)^{s-1}\zeta\, dz$$

$$= p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\int_0^t d\eta \int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,\eta)f(z,t-\eta)\,\zeta^{s-1}z^{s-1}d\zeta dz$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,\eta)\;\zeta^{s-1}z^{s-1}d\zeta dz\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\int_0^\infty f(z,t-\eta)H(z,t-\eta)d\eta$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,\eta)\;\zeta^{s-1}z^{s-1}d\zeta dz\int_0^\infty d\eta\int_0^\infty f(z,t-\eta)H(z,t-\eta)e^{-\frac{t}{p}}dt$$

حيث :

$$H(z,t-\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & ; & \eta \le t \;\;\&\; z \ge 0 \\ 0 & ; & otherwise \end{bmatrix}$$

$$ME(f *_m *g) = p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,\eta)\;\zeta^{s-1}z^{s-1}d\zeta dz\int_0^\infty d\eta\int_\eta^\infty f(z,t-\eta)e^{-\frac{t}{p}}dt$$

$$t-\eta = y \Rightarrow dt = dy, t=\eta \Rightarrow y=0, t\to\infty \Rightarrow y\to\infty$$

$$ME(f *_m *g) = p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,\eta)\;\zeta^{s-1}z^{s-1}d\zeta dz\int_0^\infty d\eta\int_0^\infty f(z,y)e^{-\frac{y-\eta}{p}}dy$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,\eta)\;\zeta^{s-1}e^{-\frac{\eta}{p}}d\zeta d\eta\int_0^\infty\int_0^\infty f(z,y)z^{s-1}e^{-\frac{y}{p}}dzdy$$

$$= \frac{1}{p}ME(g).ME(f)$$

2.5.3 مبرهنة: لتكن $f = f(x,t), g = g(x,t)$ دالتين معرفتين و مستمرتين على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ و ليكن $ME(f) = ME(f;s,p)$ هو تحويل ميلين–الزاكي للدالة $f(x,t)$ و $M(g) = M(g;s,t)$ تحويل ميلين للدالة $g(x,t)$ عندئذ تتحقق:

$$ME\left(\int_0^\infty u^m f(ux,t)\;g(u,t)du\right) = ME(f;s,p)M(g;m-s+1,t) \qquad (28.3)$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty u^m f(ux,t)g(u,t)du\right]x^{s-1}e^{\frac{-t}{p}}dxdt$$

$$= p\int_0^\infty \int_0^\infty u^m \; g(u,t)e^{\frac{-t}{p}}\, du\, dt \int_0^\infty f\,(ux,t)x^{s-1}dx$$

$$udx = dz \Leftarrow ux = z$$

$$= p\int_0^\infty \int_0^\infty u^m g(u,t)e^{\frac{-t}{p}}\, du\, dt \int_0^\infty f\,(z,t)(\frac{z}{u})^{s-1}\frac{dz}{u}$$

$$= p\int_0^\infty \int_0^\infty u^{m-s} g(u,t)e^{\frac{-t}{p}}\, du\, dt \int_0^\infty f\,(z,t)z^{s-1}dz$$

$$= ME(g;m-s+1,p)M(f;s,t) = ME(f;s,p)M(g;m-s+1,t)$$

3.5.3 مبرهنة :

اذا كانت $f\,,g$ دالتين معرفتين عندما $0 \le x < \infty \& 0 \le t < \infty$ وكانتا تحققان شروط الوجود لتحويل ميلين الزاكي لهما وأيضا تلاف ميلين لهما هو:

$$(f *_m g) = \int_0^\infty f\,(\frac{x}{\zeta})g(\zeta,\eta)\frac{d\zeta}{\zeta}d\eta$$

فعندئذ:

$$ME(f *_m g) = ME(g;s;p)M(f;s,t) \qquad (29.3)$$

الإثبات:

$$ME\,(f *_m g) = p\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f\,(\frac{x}{\zeta},t)g(\zeta,t)\frac{d\zeta}{\zeta}\right]x^{s-1}e^{\frac{-t}{p}}\, dxdt$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,t)\frac{d\zeta}{\zeta}\left[\int_0^\infty f\,(\frac{x}{\zeta},t)x^{s-1}dx\right]e^{\frac{-t}{p}}\, dt$$

نفرض $\frac{x}{\zeta} = u \Rightarrow dx = \zeta\, du \Rightarrow$

$$ME(f *_m g) = p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,t)\frac{d\zeta}{\zeta}\left[\int_0^\infty f\,(u,t)(\zeta u)^{s-1}\zeta du\right]e^{\frac{-t}{p}}\, dt$$

$$= p\int_0^\infty\int_0^\infty g(\zeta,t)\zeta^{s-1}e^{\frac{-t}{p}}\, d\zeta\, dt \int_0^\infty f\,(u,t)u^{s-1}du$$

$$= ME(g;s,p).M(f;s,t)$$

4.5.3 مبرهنة : اذا كانت $f\,,g$ دالتين معرفتين عندما $0\le x<\infty \& 0\le t<\infty$ وكانتا تحققان شروط الوجود لتحويل ميلين– الزاكي لهما وكان تلافهما يعطى بالعلاقة :

$$(f\ *g)(x,t)=\int_0^t (x,t-\eta)\,g(u,\eta)\,d\eta$$

عندئذ:

$$ME(f\ *g)=\frac{1}{p}ME(g;s,p).E(f;x,p) \qquad (30.3)$$

الاثبات:

$$ME(p*g)=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^t f\ (x,t-\eta)\,g(x,\eta)d\eta\right]x^{s-1}e^{\frac{-t}{p}}\,dxdt$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f\ (x,t-\eta)H(x,t-\eta)g(x,\eta)d\eta\right]x^{s-1}e^{\frac{-t}{p}}\,dxdt$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty g(x,\eta)x^{s-1}dxd\eta\left[\int_0^\infty f\ (x,t-\eta)H(x,t-\eta)e^{\frac{-t}{p}}\,dt\right]$$

$$H(x,t-\eta)=\begin{bmatrix}1;t\ge\eta\ \&\ x\ \ge 0\\ 0;t<\eta\ \&\ x\ <0\end{bmatrix}$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty g(x,\eta)x^{s-1}dxd\eta\int_\eta^\infty f\ (x,t-\eta)e^{\frac{-t}{p}}\,dt\right]$$

نفرض $t-\eta=v\Rightarrow dt=dv$ وحدود التكامل $t=\eta\Rightarrow v=0\&t\to\infty\Rightarrow v\to\infty$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty g(x,\eta)x^{s-1}dxd\eta\int_0^\infty f\ (x,v)e^{\frac{-v+\eta}{p}}\,dv$$

$$=p\int_0^\infty\int_0^\infty g(x,\eta)x^{s-1}e^{\frac{-\eta}{p}}dxd\eta\int_0^\infty f\ (x,v)e^{\frac{-v}{p}}\,dv$$

$$=\frac{1}{p}ME(g;s,p).E(f;x,p)$$

5.5.3 مبرهنة : إذا كانت $f\ (x,t)$ دالة معرفة ومستمرة على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ و قابلة للمكاملة على $]0,a]\times]0,b]$ عندئذ

$$ME\left[\int_0^x f\ (\zeta,t)\,d\zeta\right]=-\frac{1}{s}ME\ (f\ (x,t);s+1,p) \qquad (31.3)$$

الاثبات :

$$ME\left[\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta\right]=p\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(\zeta,t)d\zeta\right]x^{s-1}e^{\frac{-t}{p}}dxdt$$

$$=p\int_0^\infty e^{\frac{-t}{p}}dt\int_0^\infty\left(\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta\right)x^{s-1}dx$$

وحسب قاعدة ليبنتز $u=\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta \Rightarrow du=f(x,t)dx$ ، $dv=x^{s-1}dx \Rightarrow v=\frac{1}{s}x^s$

$$ME\left[\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta\right]=p\int_0^\infty e^{\frac{-t}{p}}dt\left[\left[\frac{x^s}{s}\int_0^\infty f(\zeta,t)d\zeta\right]_0^\infty-\frac{1}{s}\int_0^\infty x^s f(x,t)dx\right]$$

$$=-\frac{1}{s}ME(f(x,t));s+1,p) \qquad ;\mathrm{Re}(s)<0$$

6.5.3 مبرهنة :

$$ME\left(\frac{1}{x}\int_0^\infty f(\zeta,t)d\zeta\right)=-\frac{1}{s}ME(f(x,t));s,p) \qquad (32.3)$$

الإثبات:

$$ME\left(\frac{1}{x}\int_0^\infty f(\zeta,t)d\zeta\right)=p\int_0^\infty\int_0^\infty x^{s-2}e^{\frac{-t}{p}}(\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta)dxdt$$

$$=ME\left(\int_0^\infty f(\zeta,t)d\zeta;s-1,p\right)$$

اعتمادا على المبرهنة السابقة نحصل على :

$$ME\left(\frac{1}{x}\int_0^\infty f(\zeta,t)d\zeta\right)=-\frac{1}{s}ME(f(x,t));s,p)$$

6.3 تحويل ميلين– الزاكي لبعض الدوال الأساسية:

1) الدالة الأسية : $f(x,t)=e^{-\alpha x-bt}$

$$ME(e^{-(\alpha x+bt)})=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha x-bt}x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$=p\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{s-1}dx\int_0^\infty e^{-bt}e^{-\frac{t}{p}}dt$$

بفرض: $z = ax \Rightarrow dx = \frac{dz}{a}$ و منه :

$$ME(e^{-(\alpha x+bt)}) = p\int_0^\infty e^{-z}\left(\frac{z}{a}\right)^{s-1}\frac{dz}{a}\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{p}+b)t}\,dt$$

$$= a^{-s}\Gamma(s)\left[\frac{-1}{\frac{1}{p}+b}\;e^{-(\frac{1}{p}+b)t}\right]_0^\infty = \frac{a^{-s}p}{1+bp}\Gamma(s) \qquad (33.3)$$

حيث $\mathrm{Re}(s) > 0$

2) دالة هيفيسايد(الدرجية):

$$f(x,t) = H(x-x_0\;t-t_0)$$

$$ME(f) = P\int_0^\infty\int_0^\infty H(x-x_0\;t-t_0)\,x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dx\,dt$$

$$H(x-x_0\;t-t_0) = \begin{cases} 0 & ;x \le x_0\;\&\,t \le t_0 \\ 1 & ;x \ge x_0\;\&\,t \ge t_0 \end{cases}$$

$$ME(f) = p\int_{t_0}^\infty\int_{x_0}^\infty x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dx\,dt$$

في حال $\mathrm{Re}(s) < 0$:

$$ME(f) = \left[\frac{x^s}{s}\right]_{x_0}^\infty\left[-p\;e^{-\frac{t}{p}}\right]_{t_0}^\infty = -\frac{x_0^{\,s}}{s}(p\,e^{-\frac{t_0}{p}}) \qquad (34.3)$$

3) $$f(x,t) = H(x-x_0)x^a t^b$$

$$ME(f) = P\int_0^\infty\int_0^\infty H(x-x_0)x^a t^b\;x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dx\,dt$$

حسب تعريف دالة هيفيسايد :

$$= P\int_0^\infty H(x-x_0)x^{(s+a)-1}dx\int_0^\infty t^b\;e^{-\frac{t}{p}}\,dt$$

بفرض $z = \frac{t}{p} \Rightarrow dt = pdz$ نحصل على :

$$= p \int_{x_0}^{\infty} x^{(s+a)-1} dx \int_{0}^{\infty} (pz)^b e^{-z} p\, dz$$

$$= \left[\frac{x^{s+a}}{s+a} \right]_{x_0}^{\infty} \left[p^{b+2} \Gamma(b+1) \right]$$

بفرض $\mathrm{Re}(s) < -a$ عندئذ:

$$= -\frac{x_0^{s+a}}{s+a} p^{b+2} \Gamma(b+1)$$

$$= -\frac{p^{b+2}}{s+a} x_0^{s+a} \Gamma(b+1) \qquad (35.3)$$

نتيجة : عند إيجاد تحويل ميلين الزاكي للدالة الاسية وجدنا:

$$ME(e^{-(ax+bt)}) = \frac{a^{-s} p}{1+bp} \Gamma(s)$$

ومنه:

$$ME(e^{(ax+bt)i}) = ME(e^{aix+bit})$$

$$= \frac{(-ai)^{-s} p}{1-ibp} \Gamma(s) \qquad (36.3)$$

وأيضاً:

$$ME(e^{-(ax+bt)i}) = \frac{(+ia)^{-s} p}{1+ibp} \Gamma(s) \qquad (37.3)$$

4) الدوال المثلثية:

1) $f(x,t) = \sin(ax+bt)$

نعلم أنّ:

$$\sin(ax+bt) = \frac{e^{(ax+bt)i} - e^{-(ax+bt)i}}{2i} \qquad (38.3)$$

واعتماداً على خاصة الخطية لتحويل ميلين- الزاكي نجد:

$$ME(\sin(ax+bt)) = ME\left(\frac{e^{(ax+bt)i} - e^{-(ax+bt)i}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[ME\,(e^{(ax+bt)i}) - ME\,(e^{-(ax+bt)i})\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(-ai)^{-s}\,p}{1-ibp}\Gamma(s) - \frac{(+ai)^{-s}\,p}{1+ibp}\Gamma(s)\right]$$

حيث $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$= \frac{a^{-s}}{2i}\,p\,\Gamma(s)\left(\frac{(-i)^{-S}}{1-ibp} - \frac{(+i)^{-S}}{1+ibp}\right)$$

$$= \frac{a^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{2i\,(1+b^2p^2)}\left[(-i)^{-s}\,(1+ibp) - (+i)^{-s}\,(1-ibp)\right]$$

$$= \frac{a^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{2i\,(1+b^2p^2)}\left[\left[(-i)^{-s} - (i)^{-s}\right] + ibp\left[(-i)^{-s} + (+i)^{-s}\right]\right]$$

$$= \frac{a^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{(1+b^2p^2)}\left[\frac{(-i)^{-s} - (i)^{-s}}{2i} + bp\,\frac{(-i)^{-s} + (+i)^{-s}}{2}\right]$$

$$= \frac{a^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{(1+b^2p^2)}\left[\frac{e^{-s\ln(-i)} - e^{-s\ln(+i)}}{2i} + bp\,\frac{e^{-s\ln(-i)} + e^{-s\ln(+i)}}{2}\right]$$

نعلم أن:

$$\ln(-i) = \ln(1) + i\,(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}i$$

$$\ln(i) = \ln(1) + i\,(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}i$$

ومنه نجد:

$$= \frac{a^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{1+b^2p^2}\left[\frac{e^{+s\frac{\pi}{2}i} - e^{-s\frac{\pi}{2}i}}{2i} + pb\,\frac{e^{+\frac{s\pi i}{2}} + e^{-\frac{s\pi i}{2}}}{2}\right]$$

$$= \frac{a^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{1+b^2p^2}\left[\sin(\frac{\pi s}{2}) + bp\cos(\frac{\pi s}{2})\right] \qquad (39.3)$$

2) $f(x,t)=\cos(ax+bt)$

أيضا من النتيجة السابقة و كون:

$$\cos(ax+bt)=\frac{e^{(ax+bt)i}+e^{-(ax+bt)}}{2} \qquad (40.3)$$

من خاصة الخطية لتحويل ميلين الزاكي نجد :

$$ME(\cos(ax+bt))=\frac{1}{2}\left[ME(e^{(ax+bt)i})+ME(e^{-(ax+bt)i})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(-ai)^{-s}\,p}{1-ibp}\Gamma(s)+\frac{(ai)^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{1+ibp}\right]$$

حيث $\mathrm{Re}(s)>0$

$$=\frac{1}{2}\frac{(a)^{-s}\,p}{1+b^2p^2}\Gamma(s)\left[(-i)^{-s}(1+ibp)+(i)^{-s}(1-ibp)\right]$$

$$=\frac{(a)^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{1+b^2p^2}\left[\frac{e^{-s\ln(-i)}+e^{-s\ln i}}{2}+ibp\,\frac{e^{-s\ln(-i)}-e^{-s\ln(i)}}{2}\right]$$

$$=\frac{(a)^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{1+b^2p^2}\left[\frac{e^{+\frac{s\pi}{2}i}+e^{\frac{-s\pi}{2}i}}{2}+ibp\,\frac{e^{+\frac{s\pi}{2}i}-e^{\frac{-s\pi}{2}i}}{2}\right]$$

$$=\frac{(a)^{-s}\,p\,\Gamma(s)}{1+b^2p^2}\left[\cos(\frac{s\pi}{2})+i\,bp\sin(\frac{s\pi}{2})\right] \qquad (41.3)$$

3) $f(x,t)=e^{-ax-bt}\sin(cx+dt)$

$$ME(e^{-ax-bt}\sin(cx+dt))=ME\left(e^{-ax-bt}\,\frac{e^{(cx+dt)i}-e^{-(cx+dt)i}}{2i}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left[ME\left(e^{(-a+ci)x+(-b+di)t}\right)-ME\left(e^{-(a+ci)x-(-b+di)t}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{(a-ci)^{-s}p}{1-(-b+di)p}\Gamma(s)-\frac{(a+ci)^{-s}p\Gamma(s)}{1+(b+di)p}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{(a-ci)^{-s}p\Gamma(s)}{(1+b)-idp}-\frac{(a-ci)^{-s}p\,\Gamma(s)}{(1+b)+idp}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{p\,\Gamma(s)}{(1+b)^2+d^2p^2}\left[(a-ci)^{-s}((1+b)+idp))-(a-ci)^{-s}((1+b)-idp)\right]$$

$$=\frac{p\,\Gamma(s)}{(1+b)^2+d^2p^2}\left[(1+b)\left(\frac{e^{-s\ln(a-ci)}-e^{-s\ln(a+ci)}}{2i}\right)+dp\left(\frac{e^{-s\ln(a-ci)}+e^{-s\ln(a+ci)}}{2}\right)\right]$$

بفرض $\theta=\arctan\frac{c}{a}\,,r=\sqrt{a^2+c^2}$ عندئذ:

$$=\frac{p\,\Gamma(s)}{(1+b)^2+d^2p^2}\left[(1+b)\left(\frac{e^{-s(\ln r-i\theta)}-e^{-s(\ln r+i\theta)}}{2i}\right)+dp\left(\frac{e^{-s(\ln r-i\theta)}+e^{-s(\ln r+i\theta)}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{p\,\Gamma(s)}{(1+b)^2+d^2p^2}\left[(1+b)e^{-s\ln r}\sin(s\theta)+pd\;e^{-s\ln r}\cos(s\theta)\right]\qquad(42.3)$$

مما سبق نجد بسهولة أن :

$$4)\,ME(e^{-ax-bt}\cos(cx+dt))=\frac{p\,\Gamma(s)}{(1+b)^2+d^2p^2}\left[(1+b)e^{-s\ln r}\cos(s\theta)+ipd\;e^{-s\ln r}\sin(s\theta)\right]\quad(43.3)$$

حيث $\mathrm{Re}(s)>0$

$$5)\;f(x,t)=\begin{cases}\sin(a\ln x+bt)\,;0<x<1\&t\geq 0\\ 0\qquad\qquad\qquad\;;x>1\;or\;\;t<0\end{cases}$$

$$ME(f)=p\int_0^\infty\int_0^1\sin(a\ln x+bt)x^{s-1}e^{\frac{-t}{p}}dxdt$$

نفرض $\ln x=-z\;\;\Rightarrow x=e^{-z}\;,\;dx=-e^{z}dz$ أما حدود التكامل:

$$x\to 0\Rightarrow z\to\infty,x=1\Rightarrow z=0$$

$$ME(f)=p\int_0^\infty\int_0^\infty\sin(az+bt)e^{-(s-1)z}e^{\frac{-t}{p}}e^{-z}dzdt$$

$$= p\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin(az+bt)e^{-sz}\, e^{\frac{-t}{p}}\, dzdt$$

$$= LE\,(\sin(ax+bt)) = \frac{ap^2+sbp^3}{(s^2+a^2)(1+b^2p^2)} \qquad (44.3)$$

وذلك من الفصل الثاني.

$$f\,(x,t) = \begin{cases} \cos(a\ln x+bt); 0<x<1 \& t\geq 0 \\ 0 \qquad\qquad ; x>1\ or\ t<0 \end{cases}$$

$$ME\,(f\,) = LE\,(\cos(ax+bt)) = \frac{sp^2-abp^3}{(s^2+a^2)(1+b^2p^2)} \qquad (45.3)$$

7.3 التحويل العكسي لتحويل ميلين–الزاكي:

سنوجد الصيغة العكسية لتحويل ميلين الزاكي من خلال علاقته مع تحويل لا بلاس –الزاكي حيث إنه اعتمادا على صيغة بروميتش [26] تصبح الصيغة العكسية لتحويل لا بلاس–الزاكي هي

$$f\,(x,t) = LE^{-1}(LE\,f\,(x,t)) = LE^{-1}(\overline{\overline{f}}\,(s,p)) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} pe^{sx+pt}\,\overline{\overline{f}}\,(s,\frac{1}{p})dsdp \qquad (46.3)$$

و بما أن

$$F(s,p) = ME\,(f\,(x,t)) = LE\,(f\,(-\ln x,t))$$

$$\Rightarrow f\,(x,t) = ME^{-1}\left[ME\,f\,(x,t)\right] = LE^{-1}\left[LE\,f\,(-\ln x,t)\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} p\,e^{s\ln x+pt}\,\overline{\overline{f}}\,(s,\frac{1}{p})dsdp$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} p\,x^s e^{pt}\,\overline{\overline{f}}\,(s,\frac{1}{p})dsdp$$

حيث إن المكاملة تتم على كفاف بروميتش و $\mathrm{Re}(s)>0$

<u>نتيجة(1)</u> :لتكن $f = f\,(x,t)$ دالة فصولة المتغيرات أي $f\,(x,t) = f_1(x).f_2(t)$ لكن هذه الدالة محققة لشروط وجود تحويل ميلين–الزاكي لها عندئذ :

$$ME\,(f\,(x,t)) = M\left(f_1(x)\right).E\left(f_2(t)\right) \quad \Rightarrow \quad \overline{\overline{f}}\,(s,p) = \overline{f_1}(s).\overline{f_2}(p)$$

نتيجة(2): اذا تحققت شرط النتيجة السابقة عندئذ يمكن إيجاد التحويل العكسي لتحويل ميلين–الزاكي للدالة باستخدام مبرهنة الرواسب كالآتي:

$$f(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_i}(x^{-s}\overline{f_1}(s))\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_i}(pe^{-pt}\overline{f_2}(\frac{1}{p}))$$

حيث: $s_1,s_2,....,s_{n,}$ & $p_1,p_2,....,p_{n,}$ نقاط شاذة للدوال $\overline{f_2}(\frac{1}{p})$ و $\overline{f_1}(s)$ على الترتيب .

8.3 تطبيقات تحويل ميلين الزاكي:

1.8.3 حل معادلات تفاضلية جزئية ذات أمثال متغيرة:

قام العديد من الباحثين بحل معادلات تفاضلية جزئية بأمثال متغيرة باستخدام بعض التحويلات التكاملية البسيطة و المضاعفة و لكن كانت جميع هذه الطرق غير فعالة حيث إن استخدام تلك التحويلات كتحويل لابلاس البسيط و المضاعف و كذلك الزاكي وغيرها .

كل تلك التحويلات كان تطبيقها لحل هذا النوع من المعادلات ينقلنا إلى معادلات تفاضلية معقدة و صعبة الحل و سنلاحظ ان استخدام التحويل المضاعف الجديد سيجعل حل هذا النوع من المعادلات ابسط و أسهل و سينقلنا تطبيقه مباشرة على بعض المعادلات إلى معادلات جبرية سهلة الحل

كتطبيق: لتكن المعادلة التفاضلية الآتية

$$ax^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bx\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+d\frac{\partial u}{\partial t}+eu(x,t)=f(x,t) \quad (47.3)$$

مع الشروط الابتدائية :

$$u(x,0)=g_1(x)$$
$$u_t(x,0)=g_2(x)$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية ذات أمثال متغيرة و غير متجانسة لحل هذه المعادلة نطبق تحويل ميلين الزاكي على طرفيها مع خاصة الخطية بهذا التحويل نجد:

$$a\,ME(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})+b\,ME(x\frac{\partial u}{\partial x})+c\,ME(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})+d\,ME(\frac{\partial u}{\partial t})+e\,ME(u)=ME(f)$$

بتطبيق مبرهنة الاشتقاق نحصل على:

$$as(s+1)\,ME(u)-b\,s\;ME(u)+\frac{c}{p}ME(u)-M(g_1)-pM(g_2)$$

$$+\frac{d}{p}ME(u)-pM(g_1)+e\,ME(u)=ME(f)$$

وهي معادلة جبرية سهلة الحل بحلها نحصل على:

$$ME(u)=\frac{1}{(as^2+(a-b)+\frac{c+d}{p}+e)}\left[M(g_1)+pM(g_2)+pM(g_1)+ME(f)\right] \quad (48.3)$$

نأخذ تحويل ميلين الزاكي العكسي لطرفي المعادلة الأخيرة نحصل على $u(x,t)$ حل المعادلة المعطاة.

تعميم : يمكن حل المعادلة من الشكل: $\sum_{k=0}^{n}a_k\,x^k\,\frac{\partial^k u}{\partial x^k}+\sum_{l=0}^{m}b_l\,\frac{\partial^l u}{\partial t^l}=F(x,t);u=u(x,t)$

مع شروط ابتدائية وهذه المعادلة تسمى معادلة كوشي

مثال(1): لتكن $a=b=c=1;d=e=0$ أيضاً $f(x,t)=0,u=u(r,\theta)$ عندئذ يكون

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

مع الشروط الابتدائية $u(r,0)=0,u_\theta(r,0)=r \quad ;r\in[r_0,\infty[$

وهي معادلة لا بلاس مع الشروط الابتدائية لحلها نطبق التحويل المدروس على طرفيها مع خاصة الخطية ومبرهنات الاشتقاق

$$s(s+1)\,ME(u)-s\;ME(u)+\frac{1}{p}ME(u)-M(u,r,0)-pM(u_\theta,(r,0))=0$$

$$s^2\,ME(u)+\frac{1}{p}ME(u)=-p\,s\,\frac{r_0^{s+1}}{s+1}$$

$$(\frac{s^2p+1}{p})ME(u)=-p\,s\,\frac{r_0^{s+1}}{s+1}\Rightarrow ME(u)=-\frac{p^2s}{s^2p+1}\,\frac{r_0^{s+1}}{s+1}$$

$$\overset{ME^{-1}}{\Rightarrow} u(r,\theta)=r\sin\theta$$

مثال (2): عندما $b=r, e=-r$ و $d=1, c=0, a=\frac{1}{2}\sigma^2$

عندئذ نحصل على معادلة **بلاك– سكولز** التفاضلية الجزئية:

$$u_t+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}+r x u_x-ru=0$$

مع الشروط: $u(x,0)=h(x) \qquad ;x\in]0,\infty[$

بتطبيق تحويل ME مع خاصة الخطية على طرفي المعادلة نحصل على :

$$ME(u_t)+\frac{1}{2}\sigma^2 ME(x^2u_{xx})+r\,ME(xu_x)-rME(u)=0$$

بالاستفادة من مبرهنات الاشتقاق نجد :

$$\frac{1}{p}ME(u)-pM(h(x))+\frac{1}{2}\sigma^2 s(s+1)ME(u)-rs\,ME(u)-rME(u)=0$$

$$\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2+\frac{1}{2}\sigma^2 s-rs-r\right]ME(u)=pM(h(x))$$

لتكن $M(h(x))=\bar{h}(s)$

$$\left[\frac{2+p\,\delta^2 s^2+p\,\delta^2 s-2rps-2rp}{2p}\right]ME(u)=p\bar{h}(s)$$

$$u(x,t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} px^{-s}e^{-pt}\,\frac{2}{p^2}\bar{h}(s)\left[2+\frac{\sigma^2 s^2}{p}+\frac{\sigma^2 s}{p}-\frac{2rs}{p}-\frac{2r}{p}\right]dsdp$$

حالات خاصة: عندما $\sigma=\sqrt{2}, r=1$ أما الشرط الابتدائي

$$u(x,0)=\begin{cases}\ln x & ;x\in[0,1]\\ 0 & ;1<x<\infty\end{cases}$$

وتكون المعادلة هي: $u_t+x^2u_{xx}+xu_x-u=0$

بأخذ التحويل ميلين–الزاكي لطرفي المعادلة وتحويل ميلين البسيط للشرط الابتدائي كذلك بالاستفادة من خاصة الخطية ومبرهنات الاشتقاق نجد:

$$\frac{1}{p}ME(u)-\frac{p}{s^2}+s(s+1)ME(u)-s\,ME(u)-ME(u)=0$$

$$(\frac{1}{p}+s^2-1)ME(u)=\frac{p}{s^2}$$

$$(\frac{1+ps^2-p}{p})ME(u)=\frac{p}{s^2}$$

$$ME(u)=\frac{p^2}{s^2(1+ps^2-p)}$$

تطبيق التحويل العكسي للتحويل المطبّق نحصل على الحل :

$$u(x,t)=ME^{-1}\left[\frac{p^2}{s^2(1+ps^2-p)}\right]=e^t\ln x$$

2.8.3 إيجاد مجموع متسلسلات مضاعفة :

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f(m,n,u,v)$$

تتلخص الطريقة بإيجاد تحويل ميلين–الزاكي للدالة $f(m,n)=f(x,t)$ الحد العام للمتسلسلة حيث $t\in]0,\infty[,x\in]0,\infty[$ ليكن: $\overline{\overline{f}}(s,p)=ME(f(x,t))$

$$f(x,t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}px^{-s}e^{pt}\,\overline{\overline{f}}(s,\frac{1}{p})ds\,dp$$

$$\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}pm^{-s}e^{+pn}\overline{\overline{f}}(s,\frac{1}{p})dsdp$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}p\,\overline{\overline{f}}(s,\frac{1}{p})\sum_{m=1}^{\infty}m^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}e^{+pn}\,dsdp$$

و لكن نعلم أن $\sum_{m=1}^{\infty}m^{-s}=\varsigma(s)$ وهي دالة زيتا و أيضاً:

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{pn}=\sum_{n=1}^{\infty}(e^p)^n=\frac{e^p}{1-e^p};|e^p|<1$$

عندئذ يصبح لدينا

$$S=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} p\,\overline{\overline{f}}(s,\frac{1}{p})\,\varsigma(s)\,\frac{e^p}{1-e^p}\,ds\,dp \qquad (49.3)$$

بإيجاد هذا التكامل العقدي سنحصل على مجموع المتسلسلة سنوضح ذلك بالمثال الآتي.

مثال: إيجاد مجموعة المتسلسلة المضاعفة

$$S(v,w)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos v e^{-nw}}{m^2 w^n}$$

لإيجاد مجموع هذه المتسلسلة باستخدام تحويل ميلين–الزاكي نأخذ الدالة :

$$f(x,t)=\frac{\cos xve^{-tw}}{x^2 w^t}$$

نأخذ تحويل ميلين الزاكي لهذه الدالة

$$\overline{\overline{f}}(s,p)=ME(f(x,t))=ME\left(\frac{\cos xve^{-tw}}{x^2 w^t}\right)$$

$$=-v^{2-s}\,\Gamma(s-2)\cos(\frac{\pi s}{2})\frac{p^2}{1+(w+\ln w)p}$$

نأخذ تحويل ميلين–الزاكي العكسي حسب العلاقة:

$$S(v,w)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} p\,\overline{\overline{f}}(s,\frac{1}{p})\varsigma(s)\frac{e^p}{1-e^p}ds\,dp \qquad ;\ \left|e^p\right|<1$$

$$=\frac{-1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} v^{2-s}\,\Gamma(s-2)\cos(\frac{\pi s}{2})\varsigma(s)\frac{e^p}{\left[p+(w+\ln w)\right]\left[1-e^p\right]}\,ds\,dp$$

هناك علاقة لدالة زيتا يمكن الاستفادة منها و هي :

$$\pi^s\varsigma(1-s)=2^{1-s}\Gamma(s)\cos(\frac{\pi s}{2})\varsigma(s)$$

$$\Rightarrow\Gamma(s-2)\cos(\frac{\pi s}{2})\varsigma(s)=2^{s-1}\pi^s\,\frac{\varsigma(1-s)}{(s-1)(s-2)}$$

$$S=\left[\frac{-1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} v^{2-s}\,2^{s-1}\pi^{s}\,\frac{\varsigma(1-s)}{(s-1)(s-2))}ds\right]\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{e^{p}}{[p+(w+\ln w)][1-e^{p}]}dp\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{l}\operatorname*{Res}_{s=s_i}\left[v^{2-s}\,2^{s-1}\pi^{s}\,\frac{\varsigma(1-s)}{(s-1)(s-2))}\right].\sum_{j=1}^{r}\operatorname*{Res}_{p=p_j}\left[\frac{e^{p}}{[p+(w+\ln w)][1-e^{p}]}\right]$$

و ذلك اعتماداً على مبرهنة الرواسب إنّ الدالة:

$$F(s)=v^{2-s}\,2^{s-1}\pi^{s}\,\frac{\varsigma(1-s)}{(s-1)(s-2))}$$

النقاط الشاذة لهذه الدالة هي $s=1\,,\,s=2$ و هي أقطاب بسيطة وقيمة الراسب عندها

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left[v^{2-s}\,2^{s-1}\pi^{s}\,\frac{\varsigma(1-s)}{(s-1)(s-2))}\right]=\lim_{s\to 1}\left[v^{2-s}\,2^{s-1}\pi^{s}\,\frac{\varsigma(1-s)}{(s-2)}\right]=\frac{v\,\pi}{2}$$

حيث :

$$\varsigma(0)=\frac{-\beta_1}{1}=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=2}\left[v^{2-s}\,2^{s-1}\pi^{s}\,\frac{\varsigma(1-s)}{(s-1)(s-2)}\right]=\lim_{s\to 2}\left[v^{2-s}\,2^{s-1}\pi^{s}\,\frac{\varsigma(1-s)}{(s-1)}\right]=\frac{-\pi^{2}}{6}$$

حيث: $\varsigma(-1)=-\frac{\beta_2}{2}=\frac{-1}{12}$ ، في حين أن β_i هي أعداد برنولي .

أما الدلة $\varsigma(s)$ فهي تحليلية في جميع نقاط المستوى العقدي ما عدا النقطة s=1 وهو قطب بسيط وقيمة الراسب عنده تساوي الواحد وبالتالي بأجراء انسحاب $1-s\to s$ نجد أن $\varsigma(1-s)$ لها قطب بسيط هو $s=0$ وقيمة الراسب عنده تساوي الواحد أيضاً و يكون راسب الدالة $F(s)$ عند $s=0$ هو:

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left[v^{2-s}\,2^{s-1}\pi^{s}\,\frac{\varsigma(1-s)}{(s-1)(s-2))}\right]=\frac{v^{2}}{4}$$

وبالتالي

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)ds=\frac{-v^{2}}{4}-\frac{\pi v}{2}+\frac{\pi^{2}}{6}$$

أما لإيجاد رواسب الدالة :

$$G(p)=\left[\frac{e^{p}}{[p+(w+\ln w)][1-e^{p}]}\right]$$

أما النقاط الشاذة لهذه الدالة : $p_2=-(w+\ln w)\quad,\quad p_1=0$

$$\operatorname*{Res}_{p_1=0}\left[G(p)\right]=\frac{1}{w+\ln w}$$

$$\operatorname*{Res}_{p_2=-(w+l\ln w)}\left[G(p)\right]=\frac{e^{-w-\ln w}}{1-e^{-w-\ln w}}=\frac{1}{e^{w+\ln w}-1}=\frac{1}{we^{w}-1}$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}G(p)dp=\frac{1}{w+\ln w}+\frac{1}{we^{w}-1}$$

ومنه مجموع المتسلسلة المعطاة :

$$S(v,w)=-v^2-\frac{\pi v}{2}+\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{w+\ln w}+\frac{1}{we^{w}-1}\qquad ;\ \mathrm{Re}(w)>0,\left|we^{w}\right|>1$$

3.8.3 حل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية:

قمنا بدمج تحويل تكاملي مضاعف وهو تحويل ميلين – الزاكي مع طريقة التغاير التكرارية للحصول على طريقة لحل صف كبير من المعادلات التفاضلية الخطية و غير الخطية و بأمثال ثابتة و متغيرة و هي طريقة ميلين – الزاكي التكرارية هذا و لم يتم دمج تحويل ميلين البسيط و المضاعف مع أي طريقة تقريبية سابقاً ولم يُستخدم لحل معادلات تفاضلية غير خطية و تتخلص طريقة ميلين – الزاكي التكرارية **(MEVIM)** بالآتي:

3.8.3 . 1 طريقة ميلين – الزاكي التكرارية (MEVIM) :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية الآتية :

$$Lu(x,t)+Ru(x,t)+Nu(x,t)=f(x,t)\qquad(50.3)$$

حيث:

$L=\delta_x^n=x^n\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}$ و N مؤثر تفاضلي غير خطي ، R مؤثر تفاضلي خطي لبقية الحدود ذات أمثال متغيرة مختلفة، لحل هذا النوع من المعادلات بطريقة MEVIM ولشرح الطريقة سنأخذ $n=2$ و منه:

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial n^2}+Ru+Nu=f(x,t)$$

نطبّق تحويل ميلين–الزاكي على طرفي المعادلة مع خاصتي الخطية و الاشتقاق :

$$s(s+1)\,ME(u)=ME(f)-ME(Ru-Nu)$$

$$ME(u)=\frac{1}{s(s+1)}\left[ME(f)-ME(Ru-Nu)\right]$$

نأخذ ME^{-1} لطرفي المعادلة الأخيرة نجد : $u(x,t)=ME^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\left[ME(f)-ME(Ru-Nu)\right]\right]$

ولنشكل حدود المتتالية $u_n=u_n(x,t)$ حيث :

نفرض $$u_0(x,t)=ME^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}ME(f)\right] \qquad (51.3)$$

عندئذ : $$u_{n+1}(x,t)=ME^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}ME(f)-\frac{1}{s(s+1)}ME(Ru_n-Nu_n)\right]$$

بشكل آخر : $$u_{n+1}(x,t)=u_0(x,t)+ME^{-1}\left[\frac{-1}{s(s+1)}ME(Ru_n-Nu_n)\right] \qquad (52.3)$$

و بالتالي يكون حل المعادلة هو : $$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t) \qquad (53.3)$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$x^2uu_t-2xu_x-u_x=t \qquad ;x\in\left]0,1\right[\ \&\ t\in\left]0,\infty\right[$$

مع الشرط الحدي: $u(1,t)=\frac{1}{2}t$

لحلها باستخدام طريقة MEVIM في البداية نطبّق تحويل ميلين-الزاكي على طرفيها فنجد

$$2sME(u)-2E(u(1,t))=ME(u_x-x^2uu_t+t)$$

$$u(x,t)=ME^{-1}(\frac{p^3}{2s})+ME^{-1}\left[\frac{1}{2s}ME(u_x-x^2uu_t+t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}t+ME^{-1}\left[\frac{1}{2s}ME(u_x-x^2uu_t+t)\right]$$

بفرض $u_0(x,t)=\frac{1}{2}t$

$$u_{n+1}(x,t)=u_0+ME^{-1}\left[\frac{1}{2s}ME\,(u_{nx}-x^2u_nu_{nt}+t)\right]$$

$$\Rightarrow u_1(x,t)=\frac{1}{2}t+ME^{-1}\left[\frac{1}{2s}ME\,(\frac{-x^2}{4}t+t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}ME^{-1}\left[ME\left(\frac{1}{x}\int_0^x(\frac{\zeta^2}{4}t+t)d\zeta\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{12}t+xt\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{24}x^2t+\frac{1}{2}t\ =t+\frac{1}{24}x^2t$$

$$u_2(x,t)=t+\frac{1}{24}x^2t+ME^{-1}\left[\frac{1}{2s}ME\,(\frac{xt}{12}-x^2(1+\frac{1}{24}x^2)^2t+t\right]$$

$$=t+\frac{1}{24}x^2t+\frac{1}{2}ME^{-1}\left[ME\left(\frac{1}{x}\int_0^x\left\{\frac{\zeta t}{12}-\zeta^2(1+\frac{1}{12}\zeta^2+\frac{1}{24}\zeta^4)t+td\zeta\right\}\right)\right]$$

$$=t+\frac{1}{24}x^2t+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}(\frac{x^2}{24}t-\frac{x^3}{3\times12}t-\frac{x^5}{12\times5}-\frac{1}{24\times7}x^7t+xt)\right]$$

$$=t-\frac{1}{24}x\,t+\frac{1}{24\times3}x^2t+\frac{x^4}{24\times5}+\frac{1}{24\times7}x^6t$$

ومنه بإيجاد حدود أيضاً سنجد: $u_{n+1}(x,t)=t\sum_{k=0}^{n}(-x)^k$

و بالتالي :

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)=t\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k=\frac{t}{1+x}\qquad ;\ |x|<1\ \&\ x\in\,]0,1[$$

9.3 حالات خاصة من تحويل ميلين–الزاكي:

1.9.3 تحويل ميلين المنتهي – الزاكي :

1.1.9.3 استنتاج علاقة تحويل ميلين المنتهي – الزاكي

من الفصل الثاني في الأطروحة كان لدينا تحويل لابلاس – الزاكي و الذي يعطى بالعلاقة

$$LE\,(f\,(x,t)) = p\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx}\, e^{\frac{-t}{p}}\, f\,(x,t)\,dx\,dt$$

تغير المتحول $e^{-x} = z$ عندئذ $-e^{-x}\,dx = dt$ و $dx = \frac{-dz}{z}$

وأيضاً $x \to 0 \Rightarrow z \to 1$ و $x \to \infty \Rightarrow z \to \infty$ ومنه

$$LE\,(f\,(x,t)) = p\int_0^{\infty}\int_0^{1} z^{x}\, e^{\frac{-t}{p}}\, f\,(-\ln z,t)\,\frac{dz}{z}\,dt$$

$$LE\,(f\,(x,t)) = p\int_0^{\infty}\int_0^{1} z^{s-1} e^{\frac{-t}{p}}\, f\,(-\ln z,t)\,dz\,dt$$

وهذا ما يسمى تحويل ميلين المنتهي – الزاكي و يرمز له أحيانا

$${}_f ME\,(f\,(x,t)) = {}_f ME\,(f\,(x,t);s,0,1,p,0,\infty) = p\int_0^{\infty}\int_0^{1} x^{s-1} e^{\frac{-t}{p}}\, f\,(x,t)\,dx\,dt \qquad (54.3)$$

2.1.9.3 أهم خواص هذا التحويل الخاص :

1– خاصة أولى(الخطية):

$${}_f ME\,(\alpha f\,(x,t) + \beta g\,(x,t)) = \alpha\,{}_f ME\,(f\,) + \beta\,{}_f ME\,(g) \qquad (55.3)$$

ملاحظة : بشكل عام اذا فرضنا تحويلاً بالمتغير في تحويل لابلاس–الزاكي نحصل على

$$e^{-x} = \frac{z}{a} \;\Leftarrow\; x = -\ln(\frac{z}{a})$$

نحصل على تحويل ميلين المنتهي–الزاكي بشكله الأعم :

$${}_f ME\,(f\,(x,t)) = {}_f ME\,(f\,(x,t);s,0,a,p,0,\infty) = p\int_0^{\infty}\int_0^{a} a^{-s} x^{s-1} e^{\frac{-t}{p}}\, f\,(x,t)\,dx\,dt$$

2- خاصة ثانية :

$$_f ME(f(x^n,t)) = p\int_0^\infty \int_0^1 x^{s-1} e^{\frac{-t}{p}} f(x^n,t)\,dx\,dt$$

$$x^n = z \Rightarrow x = \sqrt[n]{z}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$$

حدود التكامل ذاتها وبالتالي:

$$_f ME(f(x^n,t)) = p\int_0^\infty \int_0^1 z^{\frac{s}{n}-\frac{1}{n}} e^{\frac{-t}{p}} f(z,t)\frac{1}{n} z^{\frac{1-n}{n}}\,dz\,dt$$

$$= \frac{p}{n}\int_0^\infty \int_0^1 z^{\frac{s}{n}-1} e^{\frac{-t}{p}} f(z,t)\,dz\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\,_f ME(f(x,t);\frac{s}{n},p) \qquad (56.3)$$

3- خاصة ثالثة (التدرج scaling)

$$_f ME(f(\alpha x,\beta t)) = p\int_0^\infty \int_0^1 f(\alpha x,\beta t)\, e^{\frac{-t}{p}} x^{s-1} dx\,dt$$

$$\beta t = v \Rightarrow dt = \frac{dv}{\beta}\ ,\alpha x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{\alpha}$$

$$= p\int_0^\infty \int_0^1 f(u,v)\, e^{\frac{-v}{\beta p}} (\frac{u}{\alpha})^{s-1} \frac{du}{\alpha}\frac{dv}{\beta}$$

$$= \frac{\alpha^{-s}}{\beta} ME(f(x,t)s,0,\alpha,\beta p,0,\infty) \qquad (57.3)$$

4- خاصة رابعة (الانسحاب):

$$_f ME(x^a e^{-bt} f(x,t)) = {}_f ME(f(x,t);s+a,\frac{p}{1+bp}) \qquad (58.3)$$

الاثبات :
$$ {}_f ME\,(x^a e^{-bt} f(x,t);s,p) = p\int_0^\infty \int_0^1 f(x,t)\, x^{(s+a)-1} e^{-t(\frac{1}{p}+b)}\, dx\, dt $$

بفرض:
$$ \frac{1}{q} = \frac{+p}{1+bp} \Leftarrow q = \frac{1}{p} + b = \frac{1+bp}{p} $$

يكون:
$$ {}_f ME\,(x^a e^{-bt} f(x,t);s,p) = {}_f ME\,(f(x,t);s+a,0,1,\frac{p}{1+bp},0,\infty) $$

3.1.9.3 تحويل ميلين المنتهي – الزاكي العكسي :

لتكن $f(x,t)$ دالة مستمرة قطعيا $]0,\infty[\times]0,\infty[$ وليكن ${}_f ME\,(f(x,t))$ هو تحويل ميلين المنتهي – الزاكي عندئذ لنعرف تحويل ميلين المنتهي – الزاكي العكسي بالعلاقة :

$$ f(x,t) = {}_f ME^{-1}\left[{}_f ME\,(f(x,t))\right] = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} p\,\frac{x^{-s}}{s} e^{pt}\, {}_f ME\,(f(x,t);s,\frac{1}{p})\,ds\,dp \qquad (59.3) $$

حيث $\mathrm{Re}(s) > 0$

4.1.9.3 مبرهنة: لتكن $f = f(x,t)$ دالة معرفة و مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ و $ME(f)$ موجود عندئذ:

$$ 1)\, ME\,(\frac{\partial}{\partial x} f(x,t));s,0,1,p,0,\infty) = p\int_0^\infty\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)}_{du}\, \underset{u}{x^{s-1}} e^{-\frac{-t}{p}}\, dx\, dt $$

$$ v = f(x,t), du = (s-1)x^{s-2}dx $$

$$ = p\int_0^\infty e^{-\frac{-t}{p}}\, dt\left[\left[x^{s-1} f(x,t)\right]\Big|_0^1 - (s-1)\int_0^1 f(x,t)\, x^{s-2} dx\right] $$

$$ = p\int_0^\infty e^{-\frac{-t}{p}}\, dt\left[f(1,t) - (s-1)\int_0^1\int_0^1 f(x,t)\, x^{s-2} dx\right] $$

$$ = E(f(1,t)) - (s-1)\, ME\,(f(x,t);s-1,0,1,p,0,\infty) \qquad (60.3) $$

$$ 2)\; ME\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)) = p\int_0^1\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)}_{dv}\, \underset{u}{x^{s-1}}\, e^{-\frac{t}{p}}\, dx\, dt $$

$$ du = (s-1)x^{s-2}dx, v = \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) $$

$$= p\int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{p}}\, dt \left\{\left[x^{s-1}\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\int_0^1 -(s-1)\right]\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, x^{s-2} dx\right\}$$

$$= E(f_x(1,t)) - (s-1)_f ME(\frac{\partial}{\partial x} f(x,t); s-1, 0, 1, p, 0,$$

$$= E(f_x(1,t)) - (s-1)\left[E(f(1,t)) - (s-2)_f ME(f(x,t); s-2, p)\right]$$

$$= E(f_x(1,t)) - (s-1)\left[E(f(1,t)) + (s-1)(s-2)_f ME(f(x,t); s-2, p)\right] \quad (61.3)$$

3) $${}_f ME(x\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)) = p\int_0^{\infty}\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)}_{dv}\, \underset{u}{x^s}\, e^{\frac{-t}{p}} dx dt$$

$$v = f(x,t)\ ,\ du = sx^{s-1}dx$$

$$= p\int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{p}} dt\left[x^s f(x,t)\int_0^1 - s\int_0^1 f(x,t)\, x^{s-1} dx\right]$$

$$= E(f(1,t)) - s_f ME(f(x; s, p) \qquad (62.3)$$

4) بالمثل نجد:

$${}_f ME(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)) = E(f_x(1,t)) - s\, E(f(1,t)) + s(s+1)_f ME(f; s, p) \qquad (63.3)$$

ملاحظة: في الحالة العامة تحويل لابلاس ثنائي الجانب يعطى بالعلاقة :

$$L(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

و هذا التحويل يقسم لتحويلين أحاديي الجانب هما:

$$L^+(f(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx\ ,\ L^-(f(x)) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sx} f(x) dx \qquad (64.3)$$

ومنه:

$$L(f(x)) = L^-(f(x)) + L^+(f(x)) \qquad (65.3)$$

و يرتبط تحويل ميلين بتحويل لابلاس ثنائي الجانب بالعلاقة:

$$L(f(x)) = M(f(-\ln(z)) \quad ; z = e^{-x}$$

و أما من علاقة تحويل لابلاس أحادي الجانب L^+ فاستنتجنا حالة خاصة هي تحويل ميلين المنتهي و ذلك بتغيير المتحول :

$$L^+(f(x)) = {}_f M(f(-\ln(z)) \quad ; z = e^{-x}$$

كذلك نتج لدينا حالة خاصة أخرى مرتبطة بدالة غاما غير التامة و هو تحويل ميلين غير التام حيث

$$L^-(f(x)) = M_I(f(-\ln(z)) = \int_1^\infty z^{s-1} f(z)dz \quad ; z = e^{-x} \qquad (66.3)$$

و سنتطرق أولاً لدراسة تحويل ميلين غير التام و من ثم ميلين غير التام–الزاكي.

<u>تحويل ميلين غير التام :</u>

تعريف: لتكن *f(x)* دالة معرفة ومستمرة على $]0,\infty[$ و تحقق الشرط

عندما $x \to \infty$: $f(x) = o(x^{-n})$

أي $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{-n}} = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)x^n\right] = 0$$

و من أجل كل $x \in \mathbb{R}^+$ عندئذ تحويل ميلين غير التام لها يعطى بالعلاقة :

$$M_I(f(x)) = \int_1^\infty x^{s-1} f(x)dx \quad (67.3)$$

حيث $s \in \mathbb{C}$ هو وسيط هذا التحويل .

مبرهنة (1) : إن تحويل ميلين غير التام يتمتع بخاصة الخطية أي :

$$M_I(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) = \alpha M_I\left(f_1(x)\right) + \beta M_I\left(f_2(x)\right) \qquad (68.3)$$

الإثبات : ينتج مباشرة من خطية التكامل .

مبرهنة (2) : لتكن $f(x)$ دالة معرفة و مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0,\infty[$ عندئذ:

$$(1) \quad M_I(f'(x)) = -(s-1)M_I(s-1) - f(1) \quad (69.3)$$

$$(2) \quad M_I(f''(x)) = (s-1)(s-2)M_I(s-2) + (s-1)f(1) - f'(1) \quad (70.3)$$

الإثبات:

$$(1)\quad M_I(f'(x)) = \int_1^\infty f'(x)x^{s-1}dx = \int_1^\infty x^{s-1}df(x)$$

بالمكاملة بالتجزئة نجد :

$$M_I(f'(x)) = -(s-1)M_I(s-1) - f(1)$$

$$(2)\quad M_I(f''(x)) = \int_1^\infty f''(x)x^{s-1}dx = \int_1^\infty x^{s-1}df'(x)$$

بالمكاملة بالتجزئة :

$$M_I(f''(x)) = -f'(1) - (s-1)\int_1^\infty f'(x)x^{s-2}dx$$

$$= -f'(1) - (s-1)\int_1^\infty x^{s-2}df(x)$$

بالمكاملة مرة ثانية بالتجزئة :

$$M_I(f''(x)) = (s-1)(s-2)M_I(s-2) + (s-1)f(1) - f'(1)$$

<u>تحويل ميلين غير التام لبعض الدوال الأساسية :</u>

إن تحويل ميلين غير التام لدوال أساسية ستمر بنا في هذا البحث هو :

$$(1)\quad M_I(x^a) = -\frac{1}{s+a} \quad ; \quad \mathrm{Re}(s) < -a \qquad (71.3)$$

$$(2)\quad M_I(e^{-ax}) = a^{-s}\,\Gamma(s,a) \qquad (72.3)$$

$$(3)\quad M_I(\ln x) = \frac{1}{s^2} \quad ; \quad \mathrm{Re}(s) < 0 \qquad (73.3)$$

إثبات العلاقات السابقة :

$$(1)\quad M_I(x^a)=\int_1^\infty x^a x^{s-1}dx$$

$$=\int_1^\infty x^{(s+a)-1}dx=\left.\frac{x^{(s+a)}}{s+a}\right|_1^\infty$$

$$=-\frac{1}{s+a}\qquad ;\quad \mathrm{Re}(s)<-a$$

$$(2)\quad M_I(e^{-ax})=\int_1^\infty e^{-ax}x^{s-1}dx$$

و بتغيير المتحول $ax=t$ نحصل على :

$$M_I(e^{-ax})=\int_a^\infty e^{-t}(\frac{t}{a})^{s-1}\frac{dt}{a}$$

$$=a^{-s}\,\Gamma(s,a)$$

$$(3)\quad M_I(\ln x)=\int_1^\infty \ln x\;\; x^{s-1}dx$$

بالمكاملة بالتجزئة حيث : $u=\ln x\;\;,\;dv=x^{s-1}dx$

$$\Rightarrow M_I(\ln x)=\left.\frac{x^s\ln x}{s}\right|_1^\infty-\frac{1}{s}\int_1^\infty x^{s-1}dx$$

$$=\frac{1}{s^2}\qquad ;\quad \mathrm{Re}(s)<0$$

2.9.3 تحويل ميلين غير التام–الزاكي :

إن تحويل ميلين غير التام–الزاكي لدالة $f(x,t)$ بمتغيرين x,t حيث $x\in]0,\infty[$ و $t\in]0,\infty[$ يعطى على شكل التكامل لثنائي الآتي :

$$\overline{\overline{f}}(p,q)=M_IE(f(x,t))=p\int_0^\infty\int_1^\infty x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}f(x,t)dxdt\qquad(74.3)$$

و واضح أن هذا التحويل الأخير يتمتع بخاصة الخطية حيث :

$$M_I E(\alpha f_1(x,t)+\beta f_2(x,t)) = \alpha M_I E\left(f_1(x,t)\right)+\beta M_I E\left(f_2(x,t)\right) \qquad (75.3)$$

حيث : α,β ثوابت .

أما تحويله العكسي فيعطى بالعلاقة :

$$f(x,t) = \left(M_I E\right)^{-1}\left[M_I E(f(x,t))\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}\overline{\overline{f}}(s,p)dsdp \qquad (76.3)$$

حيث $\overline{\overline{f}}(s,p)$ هي دالة تحليلية في جميع النقاط s,p من المنطقة :

$$\mathrm{Re}(s)\geq c \ , \ \mathrm{Re}(p)\geq d$$

توطئة : إن تحويل ميلين غير التام–الزاكي العكسي يتمتع بخاصة الخطية .

1.2.9.3 مبرهنة : لتكن $f(x,t)$ دالة قابلة للاشتقاق جزئياً بالنسبة للمتغيرين $x\,,t$ على $]0,\infty[\times]0,\infty[$ و ليكن :

$$\overline{\overline{f}}(s,p) = M_I E(f(x,t))$$

موجوداً عندئذ :

$$(1)\ M_I E(f_x) = (s-1)\overline{\overline{f}}(s-1,p) - E(f(1,t)) \qquad (77.3)$$

$$(2)\ M_I E(f_{xx}) = (s-1)(s-2)\overline{\overline{f}}(s-2,p) - (s-1)E(f(1,t)) - E(f_x(1,t)) \qquad (78.3)$$

$$(3)\ M_I E(tf_t) = -q\,\overline{\overline{f}}(p,q) - L(f(x,1)) \qquad (79.3)$$

$$(4)\ M_I E(t^2 f_{tt}) = q(q+1)\overline{\overline{f}}(p,q) + (q+1)L(f(x,1)) - L(f_t(x,1)) \qquad (80.3)$$

الاثبات

$$M_I E(f_x(x,t)) = p\int_0^\infty\int_1^\infty x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}f_x(x,t)dxdt$$

$$= p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\int_1^\infty f_x(x,t)x^{s-1}dx$$

بفرض $u = x^{s-1}$, $dv = f_x(x,t)dx$ وبمكاملة $\int_1^\infty f_x(x,t)x^{s-1}dx$ بالتجزئة نجد:

$$M_I E(f_x(x,t)) = p\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}dt\left[x^{s-1}f(x,t)\Big|_1^\infty + (s-1)\int_1^\infty f(x,t)x^{s-2}dx\right]$$

$$= p(s-1)\int_0^\infty\int_1^\infty x^{s-2}e^{-\frac{t}{p}}f(x,t)dx\,dt - E(f(1,t))$$

$$= (s-1)M_I E(f(x,t);s-1,p) - M_I(f(1,t))$$

$$= (s-1)\overline{\overline{f}}(s-1,p) - M_I(f(1,t))$$

و بنفس الأسلوب السابق يمكن إثبات العلاقات (4),(3),(2) و ذلك باستخدام طريقة التجزئة إما لمرة واحدة أو مرتين حسب مرتبة المشتق الذي داخل التحويل .

2.2.9.3 مبرهنة : إذا كانت الدالة : $f(x,t) = f_1(x).f_2(t)$

عندئذ :

$$M_I E(f(x,t)) = M_I(f_1)(s).E(f_2)(p) \qquad (81.3)$$

الإثبات :

$$M_I E(f(x,t)) = M_I E(f_1(x)f_2(t))$$

$$= \int_0^\infty\int_1^\infty f_1(x)f_2(t)x^{s-1}e^{-\frac{t}{p}}dxdt$$

$$= \int_0^\infty f_1(x)x^{s-1}dx\ \int_1^\infty f_2(t)e^{-\frac{t}{p}}dt$$

$$= M_I(f_1(x))E(f_2(t))$$

مثال : إن تحويل ميلين غير التام -الزاكي للدالة :

$$u(x,t) = \ln x.\sin t$$

هو :

$$M_I E(\sin x.\ln t) = M_I(\ln x).E(\sin t) = \frac{p^2}{(p^2+1)s^2}$$

أهم النقاط التي وردت في الفصل الثالث:

1. دراسة تحويل مضاعف مختلط نواته خليط من كثير حدود و تابع أسي فنتج شيء من الاختلاف في الخواص و النتائج و التلاف عن التحويل الوارد في الفصل الثاني.
2. تطرقنا إلى خواص و تعاريف و مبرهنات عديدة كانت محور أساسي في تطبيقات هذا التحويل و نتج لدينا حالات خاصة من تحويل ميلين–الزاكي و هما ميلين المنتهي–الزاكي و ميلين غير التام.

الاستنتاجات :

سيتم ذكر أهم الاستنتاجات التي يمكن استنباطها من هذه الأطروحة وهي كما يلي:

1. دمج تحويلين مختلفين في تحويل تكاملي مضاعف له فاعلية أكثر من مضاعفة التحويل ذاته في بعض التطبيقات
2. استخدام التحويلات التكاملية المضاعفة يعتبر الأسرع والأسهل لحل معادلات تفاضلية جزئية و تكاملية مضاعفة وجملها
3. جميع التحويلات التكاملية الخطية البسيطة و المضاعفة عاجزة عن حل المسائل غير الخطية لذلك لا بد من دمجها مع طرق تقريبية
4. أثبتت التحويلات التكاملية الخطية المضاعفة فاعليتها في الحسابين الكلاسيكي و الكسري

التوصيات

1) دراسة تحويل ميلين مع طريقة تقريبية لحل معادلات تفاضلية غير خطية .
2) دراسة تحويلات تكاملية مضاعفة مختلطة أخرى لتطبيقات أوسع.
3) تطبيق تحويل ميلين – الزاكي على المشتقات الكسرية لحل معادلات تفاضلية ذات مراتب كسرية

المراجع باللغة الإنجليزية

1. A.Alderremy, Tarig.M.Elzaki, "On The New Double Integral Transform for Solving Singular System of Hyperbolic Equations", Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 1207-1214, (2018).
2. A.Kilicman, H. Eltayeb, P.R.Agarwal , On Sumudu transform Differential Equations , Abstract and Applied Analysis, (2010), 11 pages.
3. A.M. Wazwaz , The variational iteration method for solving linear and nonlinear ODEs and scientific models with variable coefficients, Central European Journal of Engineerin ,Vol. 4, 64-71, (2014).
4. A.S.J.Al-Saif, T.A.K.Hattim, Variation Iteration Method for Solving Some Models of Nonlinear Partial Differential Equations, International Journal of Pure and Applied science and Technology, Vol.4, 30-40, (2011).
5. Abdon Atanganaa, Badr Saad T. Alkaltanib, A novel double integral transform and its applications, Journal of Nonlinear Sciences and Applications, (2016), 424-434.
6. Adem Kilicman, Hassan Eltayeb, On the Partial Differential Equations With Non-constant Coefficients and Convolution Method, European Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 3, No.1,(2010), 45-50 .
7. Aghili And B. Parsa Moghaddam, Certain Theorems On Two Dimensional Laplace Transform And Non-Homogeneous Parabolic Partial Differential Equations, Surveys In Mathematics And Its Applications, Volume 6 (2011), 165 – 174 .
8. Aghili and B. Salkhordeh Moghaddam, Laplace transform pairs of n-dimensions and a Wave equation, Int. Math. Forum, 5 (2004), 377-382.
9. Aghili and B. Salkhordeh Moghaddam, Laplace transform pairs of N-dimensions and second order linear differential equations with constant coefficients, Annales Mathematicae et informaticae 35 (2008), 3-10.
10. Aghili and B. Salkhordeh Moghaddam, Multi-Dimensional Laplace Transform and systems of partial differential equations, Int. Math. Forum, 1 (2006), 21-24.
11. Andrei D. Polyanin, Alexander V. Manzhirov, Handbook Of Mathematics For Engineers And Scientists, CRC press, Chapman& Hall, Boca Raton, (2007).

12. E.A.Elnour, T.M.Elzaki, Solution of Nonlinear Partial Differential Equations by the Combined Laplace Transform and The new Modified Variational Iteration Method, Wulfenia Journal , (I JRASET),, (2013).
13. Edmundo Capelas de Oliveira , Jose Antonio Tenreiro Machado, A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral , Mathematical Problems in Engineering, 6 Pages,(2014).
14. G. J. O. Jameson, The incomplete gamma functions, Math. Gazette 100,298-306, (2016).
15. G.Adomain, "Solving Frontier Problems of Physics : The Decomposition Method", Dordrecht:Kluwer, (1994).
16. G.K. Watugala, Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology ,Vol.24, 35–43, (1993)
17. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products Seventh Edition*, (2007).
18. Hassan Eltayeb Gadain, Imed Bachar, "On The Nonlinear Singular One-dimensional Parabolic Equation and Double Laplace Decomposite Method"، Advances in Mechanical Engineering، 9، 1-7، (2017).
19. Hassan Eltayeb, Adem Kilicman, A Note On Mellin Transform And Partial Differential Equations, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol .34, 457-467, (2007).
20. Hassan Eltayeb, "Anote on Double Decomposition Method and Nonlinear Partial Differential Equations", New Trends in Mathematical Sciences، 156-164، (2017).
21. J. H. He, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytic technique, Appl.Math. Comput., Vol.135, 73-79, (2003).
22. J. Manafianheris, Solving the Integro-Differential Equations Using the Modified Laplace Adomian Decomposition Method, Journal of Mathematical Extension, Vol. 6, 65-79, (2012).
23. J.L.Schiff, *The Laplace Trasform Theory and Applications*, Springer, New York, 1999.
24. J.M.Tchuenche, N.S.Mbare, An Application of the Double Sumudu Transform, Applied Mathematical Science, Vol. 1, (2007), no.1, 31-39.
25. L. Debnath, "The Double Laplace Transforms and Their properties with Applications to Functional, Integral and Partial Differential equations,"*Int. J. Appl. Comput. Math*, 2,223-241, (2016).

26. L.Debnath, D.Bhatta, *Integral Transforms and Their Applications Third Edition*, CRC press, Chapman& Hall, Boca Raton, 2015
27. Li Kexue, Peng Jigen, Laplace transform and fractional differential equations, Applied Mathematics Letters, 2019-2023, (2011).
28. M.A. Asiru, Further properties of the Sumudu transform and its applications, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol(33), (2002), 441–449.
29. M.A. Asiru, Sumudu transform and the Solution of Integral Equations of Convolution type, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology ,Vol.32, 906–910, (2001).
30. R. S. Dahiya and J. Saberi-Nadjafi, Theorems on N - dimensional Laplace transforms and their applications, 15th annual Conference of Applied Mathematics, Univ. of Central Oklahoma. Electronic Journal of Differential Equations, Conference 02, 1999, 61-74.
31. R.Churchill, *Operational Mathematics Third Edition*, McGraw- Hill, New York, 1972.
32. R.S.Dahiya and M.Vinayagamoorty, Laplace Transform pairs of N–dimensions and heat conduction problem, Math. Comput. Modelling, 13 No. 10 (1990), 35-50.
33. Rahmatullah Ibrahim Nuruddeen , "Elzaki Decomposition Method and It's Applications in Solving Linear and Nonlinear Schrödinger Equations", Sohag Journal of Mathematics, 31-35,(2017).
34. Ranjit R.Dhunde , G.L.Waghmare , Solutions of Some Linear Fractional Partial Differential Equations In Mathematical Physics, Vol.85, 313-327, (2018).
35. Ranjit R.Dhunde, C.L.Waghmare, Double Laplace transform Method in Mathmatical physics, International Journal of Theoretical and Mathematical physics, 14-20, (2017).
36. Saeed Kazem, Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform, International Journal of Nonlinear Sciences, Vol.16,3-11, (2013)
37. Shraddha S.Chavan, M.M.Panchal, Solution of Third Order Korteweg-De Vries Equation by Homotopy Perturbation Method Using Elzaki Transform, International Journal for Research In Applied Science and Engineering Technology (I JRASET), Vol .2 ,(2014).
38. Suheil A. Khuri, A Laplace decomposition algorithm applied to a class of nonlinear differential equations**,** Journal of Applied Mathematics, Vol.1, 141-155, (2001).

39. Sunil Shrivastava, Introduction of Laplace and Elzaki Transform with Application (Electrical Circuits), International Research Journal of Engineering Technology, V0l. 5, (2018).
40. T. M. Elzaki, S. M. Elzaki and E. A. Elnour, On the New Integral Transform “ELzaki Transform” Fundamental Properties Investigations and Applications, Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical, Vol.4, 1-13, (2012).
41. T. M.Elzaki , The new integral transform "Elzaki transform" , Global Journal of Pure and Applied Mathematics , Vol 7, 57-64, (2011).
42. T.M.Elzaki, E.M.A.Hilal, "Solution of telegraph Equation by Modified of Double Sumudu Transform "Elzaki Transform" ", *Mathematical Theory and Modeling*,Vol. 2, 95-103, (2012).
43. T.M.Elzaki, S.M.Elzaki, E.M.A.Hilal, "Elzaki and Sumudu Transforms for Solving Differential Equations," *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.8, 167-173,(2012)
44. Luis Fernando Plaza Gálvez, Solution of the equation Cauchy – Euler by the Mellin Transform, Scientia et Technica Año XV, 300-303, (2009).

المراجع باللغة العربية

45. د. ابراهيم ابراهيم : الدوال الخاصة – جامعة البعث (2004 -2005) .
46. د. م. دريد عزوز، "ميكانيك الموائع"، جامعة حلب، كلية الهندسة، (1979).

المصطلحات العلمية

Laplace Transform	تحويل لابلاس
Elzaki Transform	تحويل الزاكي
Mellin Transform	تحويل ميلين
Double Laplace Transform	تحويل لابلاس المضاعف
Linear Deferential Equations	المعادلات التفاضلية الخطية
Nonlinear Deferential Equations	المعادلات التفاضلية غير الخطية
Partial Deferential Equations	المعادلات التفاضلية الجزئية
Integral Equations	المعادلات التكاملية
Integro- Deferential Equations	المعادلات التفاضلية - التكاملية
Gamma Function	دالة غاما
Incomplete Gamma Function	دالة غاما غير التامة
Prym's Function	دالة برايم
Riemann Zeta Function	دالة ريمان-زيتا
Mittag-Leffler Function	دالة ميتاغ-ليفلر
Riemann-Liouville Fractional Operator	مؤثر ريمان-ليوفيل الكسري
Caputo Operator Fractional	مؤثر كابوتو الكسري
Exponential Order	المرتبة الأسية
Piecewise Continuous	الدالة المستمرة قطعياً
Heaviside Function	الدالة الدرجية(هيفيسايد)
Convolution	تلاف(طي)
Adomin Decomposition Method	طريقة أدومين التفكيكية
Variation Iteration Method	طريقة التغاير التكرارية
Correction Function	دالة التصحيح
Laplace-Elzaki Transform	تحويل لابلاس-الزاكي

Delta –Dirac Function	دالة النبضة الواحدية
Laplace–Elzaki Decomposition Method	طريقة لابلاس– الزاكي التفكيكية
Laplace–Elzaki Variation Iteration Method	طريقة لابلاس– الزاكي التكرارية
Shroodinger Equation	معادلة شرودينغر
Fibonacci Sequence	متتالية فيبوناتشي
The Pochhammer Symbol	رموز بوخامر
Burger's Equation	معادلة برغر
Fisher – Fredholm Equation	معادلة فيشر– فريدهولم
Singular Kernels	نواة شاذة
Fractional Diffusion–Wave Equation	معادلة انتشار الموجة الكسرية
Fractional Telegraph Equation	معادلة التلغراف الكسرية
Mellen–Elzaki Transform	تحويل ميلين – الزاكي
Bromwich Contour	كفاف بروميتش
Mellen–Elzaki Variation Iteration Method	طريقة ميلين – الزاكي التكرارية
Shifting	الانسحاب
Scaling	التدرج

Summary

This study has been done as a requirements of fulfilling the philosophy of doctor in pure mathematics .throughout three chapters beside summaries This dissertation shed light mainly on the doubled integral transforms and their applications .

The first chapter dealt with the single integral transforms with special function .in particular the single Laplace and Elzaki and Mellin transforms have been integrated to derivative new doubled transforms, as well as the basic special functions namely , Gamma and Zeta and Mitag-Lefler , and approximation methods to solve the nonlinear equation have been discussed.

The second chapter showed up the definition of double integral transform " Laplace - Elzaki ",which is a result of integration of kernel of the different single of Laplace and Elzaki transforms, as well as its applications in the field of partial linear and nonlinear differential equations of both types integer and fractional ,Moreover the linear and nonlinear integral equations of both types of continuous and irregular kernel have been studied ,On the other hand the above mentioned double integral transform has been integrated with approximation methods to solve the nonlinear differential equations.

The third chapter mainly dealt with mixed double transform , Mellin and Elzaki transform (ME), of which its kernel is a mixed of polynomial and exponential functions so that this resulted in a different properties and findings of the double transform of chapter two. Based on the relation between " Laplace - Elzaki and Mellin- Elzaki the special transforms of finite and incomplete Mellin and Elzaki have been figured out with its definitions and properties and fundamental theorems .

Key words : Laplace Transform- Elzaki Transform- Mellin Transform- Deferential Equations – Adomin Decomposition Method.

Syrian Arab Republic
Al- Baath University
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

Double Integral Transforms And Their Applications

Dissertation prepared for a PhD degree in Pure Mathematics

Submitted by:

Safaa Adnan Shaikh Al-Sook

Main Sciences department- Faculty of Mechanic and Electricity Engineering –Al-Baath University

Supervision by:

Dr. Mohammad Amer

Assistant Professor in Department of Mathematics
Faculty of Sciences - Al- Baath University

Academic year

1441 – 2019