الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

قابلية جمع المتسلسلات و التكاملات المتباعدة بطريقة سيزارو

رسالة أُعدّت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات البحتة

إعداد الطالبة

رنيـــــم نديم فجر

إشراف الدكتور منير مخلوف

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

العام الدراسي:

1441-2019

الفهرس

رقم الفقرة	الموضوع	رقم الصفحة
	مقدمة	**3**
	الفصل الأول تعاريف ومفاهيم أساسية	**7**
	الفصل الثاني قابلية جمع المتسلسلات البسيطة والمضاعفة وفق طريقة سيزارو	**41**
1.2	قابلية جمع متسلسلة والش– فورييه وفق طريقة سيزارو	**41**
2.2	قابلية جمع المتسلسلة المشتقة لمتسلسلة فورييه والمتسلسلة المرافقة وفق طريقة سيزارو	**45**
3.2	قابلية الجمع المحدودة لمتسلسلات فورييه المضاعفة وفق طريقة سيزارو	**52**
4.2	قابلية جمع المتتاليات المضاعفة في المجموعات وفق طريقة سيزارو	**64**
	الفصل الثالث قابلية جمع التكاملات المعتلة المتباعدة وفق طريقة سيزارو	**71**
1.3	قابلية جمع التكاملات المعتلة وفق طريقة سيزارو	**71**
2.3	قابلية جمع سيزارو وهولدر الدالية	**79**
	الفصل الرابع نظرية توبريان وتطبيقاتها	**83**
1.4	نظرية توبريان و قابلية جمع التكاملات وفق طريقة سيزارو	**83**
2. 4	نظرية توبريان و قابلية الجمع الموزون	**91**
3.4	نظريات توبريان حول جداء طريقتي بوريل و هولدر	**96**
	الفصل الخامس قابلية جمع المتسلسلات وفق طريقتي سيزارو وآبل	**103**
1.5	بعض المبرهنات حول طرائق قابلية الجمع وفق سيزارو و آبل معاً	**103**
2.5	العلاقة بين طريقتي قابلية الجمع وفق سيزارو و آبل المعممة	**110**
	الملخص	**113**
	Abstract	**114**

	توصيات ومقترحات	**115**
	المراجع	**116**
	دليل المصطلحات العلميّة	**119**

مقدمة

تهدف دراستُنا إلى إيجاد مجموع متسلسلةٍ متباعدة أو تكاملٍ معتل متباعد ، لأنَّه من الممكن أن تكون هذه المتسلسلة متباعدة ولكن يوجد لها مجموع وفق طريقة جمعٍ ما معينة. سواءً كانت هذه الطريقة خطيّة أم غير خطيّة، وتوجد هناك طرائق عديدة لقابلية جمع المتسلسلات منها: سيزارو و آبل و هولدر و ريمان و ريس و الطريقة المصفوفية وطريقة نيورلند وطريقة نيورلند المعممة وغيرها من الطرائق الخطيّة الأخرى.

كما نسعى من خلال هذه الدراسة لإيجاد مجموع متسلسلةٍ متباعدة أو تكاملٍ معتل متباعد وفق طريقة سيزارو التي تُعتبر من الطرائق الخطيّة النظامية . لأنَّه بشكلٍ عام ليس بالضرورة أن يوجد مجموع لمتسلسلة متباعدة أو قيمة لتكامل معتل بالطريقة العادية.

تمثل نظرية قابلية جمع المتسلسلات المتباعدة فِرعاً رئيساً من التحليل الرياضي والتي تلعب دوراً بارزاً في حل العديد من المسائل والتطبيقات المهمة في نظرية التقريب والعلوم الأُخرى والهندسة وغيرها، وفي إيجاد القيم البسيطة لمجاميع المتسلسلات المتباعدة ؛ حيث تُعد طرائق قابلية جمع آبل، سيزارو، بوريل أمثلة نموذجية عنها.

ونظراً للتقدم العلمي الذي حدثَّ في القرن الثامن عشر، افترض العالم الرياضي غويدو غراندي GuidoGrandi (1742−1671)إمكانية إيجاد مجموع متسلسلات متباعدة، مثل المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}$ (متسلسلة غراندي) وأثبت بأنَّ قيمتها مساوية للصفر ولغير الصفر في آنٍ واحد[4].

فمن جهةٍ أولى، تجميع الحدود في هذه المتسلسلة $(1-1)+(1-1)+.....$ يُعطي قيمة الصفر في المجموع اللانهائي؛ حيث تتعلق هذه القيمة بتجميع الحدود وبوضع الأقواس كما هو واضح، لأنَّه يمكن بإجراء تغيير في ترتيب حدود هذه المتسلسلة للحصول على متسلسلة متباعدة، ومن جهةٍ ثانية ، ظهرت هذه المتسلسلة في نشر ماكلوران الشهير للدالة: $f(x)=(1+x)^{-1}$ ، والتي يمكن أن تساوي $\frac{1}{2}$ ضمن شروطٍ معينة، لأنَّه يمكن لهذه المتسلسلة أن تأخذ قيمة الصفر وقيمة مغايرة للصفر.

بعد مرور قرنٍ تقريباً، درسَ آبل نيلز Abel Niels المتسلسلات المتباعدة؛ حيث ظهرت هذه المتسلسلات كثيراً في فروعٍ عديدة من الرياضيات والعلوم كما هو الحال في التحليل المقارب ومبرهنة الأعداد التحليلية و تحليل فورييه و نظرية حقل الكم[14].

لكـن احيانـاً، يُشـكل تقـارب هـذا النـوع مـن المتسلسـلات صـعوبة فـي تفسـير وتحليـل النتـائج التـي يُمكـن الحصـول عليهـا، ونتيجـة لـذلك دار جـدلٌ حـادٌ فـي المجتمـع الرياضـي لقـرونٍ عديـدة، وخـلال القـرنين السـابع عشـر والثـامن عشـر قـام بعـضُ الرياضـين باسـتخدام المتسلسـلات المتقاربـة بشـكلٍ كبيـر مـع أنَّهـم كـانوا دقيقـين فـي اسـتخدامها، وذلـك لأنَّ الاعتقاد السائد آنذاك كان يقتضي وجود قيمة وحيدة لكل متسلسلة.

فـي مطلـع القـرن التاسـع عشـر، دفـعَ ظهـور الرياضـيات الدقيقـة معظـمَ الرياضـيين البـارزين آنـذاك أمثـال كوشـيCauchy و وايرشـتراسWeierstrass إلـى منـعِ اسـتخدام المتسلسـلات المتباعـدة كُليـاً، وبالتـالي نُشـرت أعمـال قليلـة جـداً حـول المتسلسـلات المتباعـدة مـن 1830إلى1880 [14].

أما في مطلعِ القرن العشرين، سلّط هيجيليانHegelian الضوء إلى دراسة المتسلسلات المتباعدة، وفـي تلك المرحلـة وضـع ايرنسـتو سـيزارو ErnestoCesàro (1859–1906)أولَ تعريفٍ حديثٍ لطريقة قابلية جمع المتسلسلات المتباعدة وعدم إيجاد مجاميع لهذا النوع من المتسلسلات، وقام سيزارو بتعديل هذا التعريف والذي تمّ تعميمه فيما بعد من قِبل كل من فورونويVoronoiو نيورلند Nörlund. أما رامانجان Ramanujan فقد أتى بتعريفٍ مشابهٍ لما سبقَ ثم قام بإيجاد قيمة المجموع اللانهائي 1985. تضمنت دراسة المتسلسلات المتباعدة إسهامات العديد من الرياضيين البارزين آنذاك أمثال ليتلوود Littlewood و رامانجان Ramanujan وهارديHardy و بوريل Borelو فروبينيوس Frobenius. وتمّت صياغة اسم نظرية قابلية الجمع للدلالة على هذا الفرع المنبثق من التحليل الرياضي، والسؤال الجوهري في نظرية قابلية الجمع هو كيف يتمُّ تفسير المتسلسلات المتباعدة، مثل متسلسلة غراندي المذكورة سابقاً. وتمّ افتراض طريقة عادية من قبل هاتن Hutton وتمّ تعميمها لاحقاً من قبل فورونويVoronoiو نيورلندNörlund وسيزارو Cesàro و هولدر Hölder وغيرهم[12].

وتابعَ بعد ذلك كلٌ من زيغموندZygmund وباري Bary وهارديHardy البحثَ في دراسة سلوك هذه المتسلسلات سَواءً في التقارب أو قابلية الجمع[14].

وفيما يتعلق بالتكاملات المعتلة المتباعدة، فقد قام موريس Móricz (2005) بإيجاد قيم هذه التكاملات، كما درسَ مسألة إيجاد قيم التكاملات المضاعفة وفق طريقة سيزارو [11]، كما قام

براون Brown (2007) بإيجاد قيم تكاملات فورييه المضاعفة وفق طريقة سيزارو، كذلك قام كلٌ من كاناك وتوتور Çanak, Totur (2011) باستخدام نظرية توبريان لإيجاد مجموع التكاملات وفق طريقة سيزارو، وبشكلٍ خاص قاما عام (2012) باستخدام نظرية توبريان لإيجاد قيم التكاملات المتباعدة وفق طريقة $(C,1)$ [11]، كما قام ميشرا Mishra (2014) بإيجاد قيم تكاملات فورييه الثلاثية وفق طريقة سيزارو.

الفصل الأول

تعاريف ومفاهيم أساسية

نستعرضُ في هذا الفصلِ بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية والمصطلحات التي نحتاج إليها في دراسةِ قابلية جمع المتسلسلات والتكاملات بطريقة سيزارو منها:

1.1. طريقة سيزارو Cesàro (C,α) ; $\alpha > -1$ [18]:

نقول إنَّ المتتالية $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو من المرتبة α ، أي قابلة للجمع وفق (C,α) إلى s، ونكتب $s_n \to s\,(C,\alpha)$ إذا كانت $t_n^{\alpha} = \dfrac{s_n^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} = \dfrac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k \to s$، عندما $n \to \infty$.

حيث $A_n^{\alpha} = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+n \\ n \end{pmatrix}$ و $A_{n-k}^{\alpha-1} = \begin{pmatrix} n-k+\alpha-1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-k+\alpha-1 \\ n-k \end{pmatrix}$ و t_n^{α} تُشير إلى تحويل طريقة سيزارو المطبق على المتتالية (s_n) .

2.1. طريقة سيزارو Cesàro $(C,1)$ [24]:

نقول إنَّ المتسلسلة $\sum_{K=0}^{\infty} u_k$ قابلة للجمعِ وفق طريقة سيزارو إلى العدد A، إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = A$، حيث إنَّ $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$ و $s_n = \sum_{K=0}^{n} u_k$ هي الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{K=1}^{\infty} u_k$، ونكتب: $\sum_{K=1}^{\infty} u_k = A\,(C,1)$.

ملاحظات:

1. نقول إنَّ طريقة قابلية الجمع نظاميةٌ إذا أدى تطبيقها على متسلسلةٍ متقاربةٍ إلى الحصولَ على المجموع المعتاد لهذه المتسلسلة.

2. مـن المعـروفِ أيضـاً أنَّ طريقـة قابليـة الجمـع وفـق (C,α) نظاميـة. وبصـورةٍ خاصـة، نلاحظُ أنَّ $(C,0)$ تمثل طريقة قابلية الجمع حسب مفهوم التقارب العادي.

3. لدينا دوماً $\sigma_n = \sum_{K=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)u_k$.

ويمكنُ القولُ إنَّ : $\sum_{K=1}^{\infty}u_k = A\,(C,2)$ ، إذا كان $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}t_k = A$

أي $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}s_j = A$

حيث $t_n = \sum_{k=1}^{n}s_k$

وهكذا .....

4. تُعتبـر الطريقـة $(C,\alpha+1)$أقـوى مـن الطريقـة (C,α)حيـث $\alpha > 0$ ، أي مـن الممكـن لمتسلسـلةٍ أن تكـون قابلـة للجمـع وفـق الطريقـة $(C,\alpha+1)$ وغيـر قابلـة للجمـع وفـق الطريقـة (C,α)، أمـا إذا كانـت قابلـة للجمـع وفـق (C,α) فهـي حتمـاً قابلـة للجمـع وفـق $(C,\alpha+1)$.

5. سنرمزُ بـ $(C,1)$ كطريقة قابلية جمع خاصة من الطرائق (C,α).

6. [9] تُعتبـر طريقـة سـيزارو $(C,1)$ حالـة خاصـة مـن الطريقـة المصـفوفية التـي مصفوفتها $A=(a_{nm})$ وذلك إذا كان $\alpha=1$ من أجل $a_{nm}=\frac{1}{n+1}$.

7. [9] تُعتبـر طريقـة سـيزارو (C,α)حيـث $0\le\alpha<1$ حالـة خاصـة أيضـاً مـن الطريقـة المصفوفية من أجل عناصر المصفوفة التي تحقق الشرط:

$$a_{nm} = \frac{\binom{n-m+\alpha-1}{\alpha-1}}{\binom{n+\alpha}{\alpha}}$$

3.1. المتتالية المضاعفة [21]:

نقـول إنَّ المتتاليـة $\{s_{mn}\}_{m,n\geq 0}$مضـاعفة، إذا كـان كـل حـد مـن حـدودها زوج مرتـب مـن الأعـداد الصـحيحة غيـر السـالبة m,n والتـي يمكـن ترتيبهـا وفـق قـانون مـا، ويمكـن تمثيلهـا على شكل مصفوفة لانهائية كما يلي:

$$\begin{array}{l}
s_{00}\ \ s_{01}\ \ s_{02}\ \ s_{03}\ldots\ldots s_{0n}\ldots\\
s_{10}\ \ s_{11}\ \ s_{12}\ \ s_{13}\ldots\ldots s_{1n}\ldots\\
.\\
.\\
.\\
s_{m0}\ \ s_{m1}\ \ s_{m2}\ \ s_{m3}\ldots\ldots s_{mn}\ldots\ldots\\
.\quad .\quad .\quad .\quad \ldots\ldots\ldots\\
.\quad .\quad .\quad .\quad \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

يُسـمى s_{mn} الحـد العـام للمتتاليـة المضـاعفة، فـإذا كانـت s_{mn} أعـداداً حقيقيـة فتسـمى متتاليـة مضـاعفة حقيقيـة، أمـا إذا كانـت s_{mn} أعـداداً عقديـة فتسـمى متتاليـة مضـاعفة عقدية.

4.1. تقارب المتتالية المضاعفة [21]:

لـيكن Eفضـاءً خطيّـاً منظمـاً، نقـول إنَّ العنصـر $s\in E$ نهايـة للمتتاليـة المضـاعفة $\{s_{mn}\}_{m,n\geq 0}$ إذا كان لكل عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي n_0بحيث يكون :

$$\|s_{mn}-s\|<\varepsilon \quad ;\forall m>n_0\ ,\ n>n_0$$

ونكتبُ: $\lim\limits_{m,n\to\infty} s_{mn}=s$.

و نقول في هذه الحالة إنَّ المتتالية المضاعفة المفروضة تتقارب من العنصر s .

ملاحظة: كل فضاء خطي منظم وتام يدعى فضاء باناخ.

مبرهنة1.1.1 [21]: ليكن E فضاء باناخ، إنَّ الشرط اللازم والكافي لتقارب المتسلسلة (u_{mn}) هو أن يكون:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N = N(\varepsilon); \forall n, m > N \Rightarrow \left\| \sum_{i=m+k}^{m+p} \sum_{k=0}^{n+q} u_{ik} + \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=n+1}^{n+q} u_{ik} \right\| < \varepsilon$$

وذلك من أجل أي عددين طبيعين p,q (يسمّى هذا الشرط عادةً شرط كوشي).

5.1. المتسلسلة المضاعفة [21]:

ليكن E فضاءً خطيّاً منظماً، و $(i, k = 0,1,2,.....)$; u_{ik} عناصر من هذا الفضاء. نُسمي المتسلسلة: $\sum_{i,k=0}^{\infty} u_{ik}$ بالمتسلسلة المضاعفة التي حدها العام u_{ik}، كما ونُسمي المجاميع:

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{ik}$$

بالمجاميع الجزئية الموافقة لهذه المتسلسلة، وذلك أياً كان العددين الطبيعيين m,n .

تكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{i,k=0}^{\infty} u_{ik}$ متقاربة من العدد $s \in E$ إذا كان:

$$\lim_{m,n \to \infty} s_{mn} = s$$

وفي هذه الحالة، يُسمّى العدد s مجموع المتسلسلة المضاعفة ونكتب $s = \sum_{i,k=0}^{\infty} u_{ik}$.

أيضاً إذا كانت u_{ik} أعداداً حقيقية فإنَّه من الممكن أن يكون s هو لانهائي.

ملاحظة [21]:

إنَّ الشرطَ اللازم لتقارب المتسلسلة المضاعفة (u_{mn}) هو:

$$\lim_{m,n \to \infty} u_{mn} = 0$$

حيث 0 هو صفر الفضاء الخطيّ المنظم E.

تعريف المسافة بين نقطة ومجموعة [20]: ليكن (X, ρ) فضاءً مترياً، ولتكن A

مجموعة جزئية غير خالية من X، ولنعرف $d(x,A)=\inf_{a\in A}\rho(x,a)$ وذلك لكل نقطة $x\in X$.

ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من X، ولنعرف $d(x,A)=\inf_{a\in A}\rho(x,a)$ وذلك لكل نقطة $x\in X$.

6.1.طريقة وجسمان Wijsman [20]:

نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\{A_{kj}\}$ متقاربة وفق وجسمان إلى A إذا كان:

$$\lim_{k,j\to\infty} d(x,A_{kj})=d(x,A)$$

لكل $x\in X$، ونكتبُ في هذه الحالة $W_2-\lim A_{kj}=A$.

مثال (1) : لتكن $X=\mathbb{R}^2$ ، ولتكن $\{A_{kj}\}$ المتتالية المضاعفة الآتية:

$$A_{kj}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2=\frac{1}{kj}\right\}$$

وتتقاربُ هذه المتتالية المضاعفة للمجموعات وفق وجسمان إلى المجموعة $A=\{(0,1)\}$ عندما $k,j\to\infty$.

7.1. طريقة وجسمان– سيزارو Wijsman-Cesàro [20]:

نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\{A_{kj}\}$ قابلة للجمع وفق طريقة وجسمان– سيزارو إلى A ، إذا كانت $\{d(x,A_{kj})\}$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى $d(x,A)$ لكل $x\in X$، أي أنَّ:

$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum_{k,j=1,1}^{m,n} d(x,A_{kj})=d(x,A)$ ، و نكتب في هذه الحالة $A_{kj}\overset{(W_2\sigma_1)}{\to}A$.

تعاريف [1,20]:

1– المتتالية الفجوية :

تُدعى كل متتالية $\{k_r\};(r=0,1,2,.....)$ حدودها أعداداً صحيحةً موجبةً ومتزايدةً بحيث يكون $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ عندما $r \to \infty$ ، مع الأخذ بعين الاعتبار $k_0 = 0$ ، متتالية فجوية.

2- المتتالية الفجوية المضاعفة:

تُدعى المتتالية المضاعفة $\theta = \{(k_r, j_s)\}$ متتالية فجوية مضاعفة إذا وجدت متتاليتان متزايدتان من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث إنَّ:

$h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ عندما $r \to \infty$ ؛ $k_0 = 0$

و

$\bar{h}_u = j_u - j_{u-1} \to \infty$ عندما $u \to \infty$ ؛ $j_0 = 0$

3-التكرير الفجوي:

نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\theta' = \{(k'_r, j'_u)\}$ تكرير فجوي مضاعف للمتتالية المضاعفة الفجوية $\theta = \{(k_r, j_u)\}$، إذا كانت $\{k_r\} \subseteq \{k'_r\}$, $\{j_u\} \subseteq \{j'_u\}$.

4- نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\{A_{kj}\}$ قابلة للجمع بدرجةٍ ما وفق وجسمان- سيزارو إلى A، إذا كانت $\{d(x, A_{kj})\}$ قابلة للجمع بدرجةٍ ما وفق طريقة سيزارو إلى $d(x, A)$ لكل $x \in X$ أي أنَّ:

$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k,j=1,1}^{m,n} \left| d(x, A_{kj}) - d(x, A) \right| = 0$ ، و نكتبُ في هذه الحالة $A_{kj} \overset{[W_2\sigma_1]}{\to} A$.

5- نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\{A_{kj}\}$ قابلة للجمع بالدرجة p وفق وجسمان- سيزارو إلى A إذا كانت $\{d(x, A_{kj})\}$ قابلة للجمع بالدرجة p وفق طريقة سيزارو إلى $d(x, A)$ ، لكل عدد حقيقي موجب p و لكل $x \in X$، أي أنَّ:

$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k,j=1,1}^{m,n} \left| d(x, A_{kj}) - d(x, A) \right|^p = 0$ ، و نكتبُ في هذه الحالة $A_{kj} \overset{[W_2\sigma_P]}{\to} A$.

6- لتكن $\theta=\{(k_r,j_s)\}$ متتالية مضاعفة فجوية، نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\{A_{kj}\}$متقاربة فجوياً وفق وجسمان إلى A ، إذا تحققت العلاقة الآتية:

$$\lim_{r,u\to\infty}\frac{1}{h_r\bar{h}_u}\sum_{k=k_{r-1}+1}^{k_r}\sum_{j=j_{u-1}+1}^{j_u} d\left(x,A_{kj}\right)=d\left(x,A\right)$$

لكل $x\in X$، و نكتبُ في هذه الحالة $A_{kj}\overset{(W_2N_\theta)}{\to}A$.

7- لتكن $\theta=\{(k_r,j_s)\}$ متتالية مضاعفة فجوية، نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\{A_{kj}\}$متقاربة فجوياً بدرجةٍ ما وفق وجسمان إلى A ، إذا تحققت العلاقة الآتية:

$$\lim_{r,u\to\infty}\frac{1}{h_r\bar{h}_u}\sum_{k=k_{r-1}+1}^{k_r}\sum_{j=j_{u-1}+1}^{j_u}\left|d\left(x,A_{kj}\right)-d\left(x,A\right)\right|=0$$

لكل $x\in X$، و نكتبُ في هذه الحالة $A_{kj}\overset{[W_2N_\theta]}{\to}A$.

8- لتكن $\theta=\{(k_r,j_s)\}$ متتالية مضاعفة فجوية، نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\{A_{kj}\}$متقاربة فجوياً بالدرجة p وفق وجسمان إلى A ، إذا تحققت العلاقة الآتية:

$$\lim_{r,u\to\infty}\frac{1}{h_r\bar{h}_u}\sum_{k=k_{r-1}+1}^{k_r}\sum_{j=j_{u-1}+1}^{j_u}\left|d\left(x,A_{kj}\right)-d\left(x,A\right)\right|^p=0$$

لكل عدد حقيقي موجب p و لكل $x\in X$ ، و نكتبُ في هذه الحالة $A_{kj}\overset{[W_2^pN_\theta]}{\to}A$.

مثال (2) : لتكن $X=\mathbb{R}^2$ ولتكن $\{A_{kj}\}$ متتالية مضاعفة تُعطى كما يلي:

$$A_{kj}=\begin{cases}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+(y-1)^2=k\right\}, & j=1, for\ all\ k\\ \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+(y-1)^2=j\right\}, & k=1, for\ all\ j\\ \{(0,0)\} & , otherwise\end{cases}$$

عندئذٍ $\{A_{kj}\}$ متقاربة وفق وجسمان إلى المجموعة $A=\{(0,0)\}$، لكن النهاية

$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum_{k,j=1,1}^{m,n} d\left(x,A_{kj}\right)$ غير موجودة حسب تعريف طريقة وجسمان– سيزارو.

ومنه $\{A_{kj}\}$ غير قابلة للجمع وفق طريقة وجسمان– سيزارو، وبالتالي $\{A_{kj}\}$ غير قابلة للجمع بدرجةٍ ما وفق طريقة وجسمان– سيزارو أيضاً.

تمهيدية1.1.1 [18] : إذا كانت $b_1,b_2,.....,b_n$ أعداداً حقيقيةً موجبةً، وإذا كانت $a_1,a_2,.....,a_n$ أعداداً حقيقيةً تحققُ:

$$\frac{|a_1+a_2+.....+a_n|}{b_1+b_2+.....+b_n}>\varepsilon>0$$

فإنَّ $\frac{|a_i|}{b_i}>\varepsilon$ لكل i حيث $1\le i\le n$.

مبرهنة2.1.1 [1]: من أجل أيّة متتاليةٍ فجويةٍ مضاعفةٍ θ، إذا كانت:

$1<\liminf_r q_r\le\limsup_r q_r<\infty$ و $1<\liminf_u q_u\le\limsup_u q_u<\infty$ حيث $q_r=\frac{k_r}{k_{r-1}}$ و $q_u=\frac{j_u}{j_{u-1}}$، فإنَّ $[W_2N_\theta]=[W_2\sigma_1]$.

8.1. متتالية الصف T [21]:

نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\{s_{mn}\}_{m,n\ge0}$ التي عناصرها من فضاء باناخ E متتالية من الصف T ، إذا تحقق الشرط الآتي:

يوجد دليل مثل ν_0 بحيث إنَّه لكل $\nu>\nu_0$ يكون:

i. $\sup_{0\le n<\infty}\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{i=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{n}s_{ik}\right\|=p_\nu<+\infty$

ii. $\sup_{0\le m<\infty}\frac{1}{m+1}\left\|\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{i=0}^{m}s_{ik}\right\|=q_\nu<+\infty$

9.1. متسلسلة الصف T [21]:

نقول إنَّ المتسلسلة (a_{mn}) التي عناصرها من فضاء باناخ E متسلسلة من الصف T، إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية المضاعفة الموافقة لها متتالية من الصف T .

ملاحظة [21]:

إنَّ كل متتالية مضاعفة محدودة تكون متتالية من الصف T، كما أنَّه توجد متتالية مضاعفة غير محدودة تكون متتالية من الصف T.

مثال (3): لتكن:

$$s_{0k} = (-1)^k (k+1) \qquad (k = 0,1,2,....)$$

$$s_{ik} = 0 \quad ; i \geq 1 \qquad (k = 0,1,2,....)$$

نلاحظ أنَّ:

$$\sum_{k=0}^{n} s_{0k} = (-1)^n \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right)$$

هي متتالية مضاعفة غير محدودة ولكنها متتالية من الصف T.

لنأخذ الأنَّ المتسلسلة المضاعفة التي حدها العام (a_{mn}) في فضاء باناخ ولنضع:

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} s_{ik}$$

حيث s_{ik} متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة التي حدها العام (a_{ik})، و تسمى عناصرها σ_{mn} متوسطات المتتالية المضاعفة s_{ik} حيث $k \geq 0$ ، و تكون المتسلسلة (a_{ik}) قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو أوقابلة

للجمع إلى العدد s إذا كان:

$$\lim_{m,n \to \infty} \sigma_{mn} = s$$

نتيجة (1) [24]:

إذا كان $a-2>\alpha\geq 0$, $b-2>\beta\geq 0$ ، وإذا كانت $\phi_{a,b}(u,v)$ محدودة في $(0,0;\delta,\delta)$ من أجل δ عدد موجب، و إذا كانت $\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\to s$ عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$ ، فإنَّ $\phi_{a,b}(u,v)\to s$ عندما $(u,v)\to(0,0)$.

ملاحظة:

إنَّ عكسَ هذه النتيجة غير صحيح بشكل عام ولكن إذا كانت $\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}$ تتعلق بـ a,b,α,β و $\phi_{a,b}(u,v)\to s$ وكانت محدودة من أجل m,n كبيرين بقدرٍ كافٍ فإنَّ $\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\to s$ عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$ (وهذا قيد الدراسة– مسألة مفتوحة).

نتيجة (2) [24]:

إذا كان $0\leq a<\xi, 0\leq\alpha<\xi-1; 0\leq b<\eta, 0\leq\beta<\eta-1$ ، وكانت $\sigma_{mn}^{\alpha,\eta},\sigma_{mn}^{\xi,\beta}$ محدودتين من أجل n,m كبيرين بقدرٍ كافٍ، وإذا كانت $\phi_{a,b}(u,v)\to s$ عندما $(u,v)\to(+0,+0)$ ، فإنَّ $\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\to s$ عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$.

تعريف [31]:

نقول إنَّ المتتالية المضاعفة $\{b_{mn}\}$ تتقارب بشكل محدود إلى s ، ونكتب $b_{mn}\to s(R)$ عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$، إذا كان لكل $\lambda\geq 1$ و $b_{mn}\to s$ عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$ من أجل $\lambda^{-1}\leq mn^{-1}\leq\lambda$. الآن إذا كان $\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\to s(R)$ عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$ فإننا نقول إنَّ $S[\phi]$ قابلة للجمع وفق $(C;\alpha,\beta)(R)$ إلى s، حيث $S[\phi]=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}$.

مبرهنة 3.1.1 [31]: إذا كانت $\phi(u,v)\to s$ عندما $(u,v)\to(+0,+0)$ ، فإنَّ $S[\phi]$ قابلة للجمع وفق $(C;\alpha,\beta)(R)$ إلى s أياً كان $\alpha\geq 1,\beta\geq 1$.

تمهيدية 2.1.1 [23]: تعتمد قابلية الجمع وفق $(C;\alpha,\beta)(R)$ لـ $S[\phi]$ فقط على

سلوك الدالة $\phi(u,v)$ في جوار ما على $(0<\delta<\pi)$; $(0,0;\delta,\delta)$، وفقاً لـ هيريوت Herriot[20].

تعاريف [21]:

يمكن تعريف (O-الكبيرة) (Big-Oh) و(o-الصغيرة) (Little-Oh) كما يأتي:

1. لتكن v_n, u_n متتاليتين عدديتين، عندئذٍ:

$$lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=0 \iff v_n=o(u_n)$$

$$v_n=O(u_n) \iff \text{المتتالية } \left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq 0} \text{ محدودة}$$

2. لتكن لدينا الدالة: $f:X\to Y$، حيث إنَّ: X،Y مجموعتان من الأعداد الحقيقية، عندئذٍ يكون:

$$O(f)=\{\, g:X\to Y\,;\ \exists\, x_0, c>0; \forall x\geq x_0 \Longrightarrow cf(x)\geq g(x)\geq 0\,\}$$

ونكتب: $g=O(f)$ أو $g\in O(f)$.

$$o(f)=\{\, g:X\to Y\,;\ \forall\, c>0\ \exists x_0>0; \forall x\geq x_0 \Longrightarrow cf(x)>g(x)\geq 0\}$$

ونكتب: $g=o(f)$ أو $g\in o(f)$.

ولنكتب بعض خواص هذه المراتب:

1. إذا كان $g=o(f)$ فإن $g=O(f)$.
2. إذا كان $h=O(g)$ و $g=O(f)$ فإن $h=O(f)$.
3. إذا كان $h=o(g)$ و $g=o(f)$ فإن $h=o(f)$.
4. إذا كان $\acute{f}=O(f)$ و $\acute{g}=O(g)$ فإن $\acute{f}\acute{g}=O(fg)$ أو

   $O(f)O(g)=O(fg)$.

5. إذا كان $g=O(f)$ و $h=O(f)$ فإن $g+h=O(f)$ أو

   $O(f)+O(f)=O(f)$.

6. إذا كان $g = O(f)$ فإن $ag = O(f)$ من أجل أي ثابت a، و

$O\big(O(f)\big) = O(f)$.

7. $o\big(o(f)\big) = o(f)$ و $o(f) + o(f) = o(f)$.

8. $O\big(o(f)\big) = o\big(O(f)\big) = o(f)$ و $O(f) + o(f) = O(f)$.

9. $o(fg) = O(f)o(g) = o(f)O(g)$.

10.1.المجموعة من الصف H [19]: لنأخذ في المستوي xoy المجموعة النقطية E التي تقع في الربع الأول، تُسمى هذه المجموعة من الصف H إذا كان من أجل أي عددين موجبين a,b تكون المجموعات الآتية:

$$E \cap]a < x < +\infty, 0 < y < b[$$
$$E \cap]0 < x < a, b < y < +\infty[$$
$$E \cap]a < x < +\infty, b < y < +\infty[$$

غير محدودة.

11.1.المصفوفات من الصف R [19]: لتكن الدوال المعرّفة على المجموعة E من الصف H معطاة بالشكل : $a_{ik}(x,y), (i,k = 0,1,....)$، تُسمى المصفوفة غير المنتهيّة $A(x,y) = \left[a_{ik}(x,y)\right]$ مصفوفة من الصف R إذا تحققت الشروط الآتية:

a. المتسلسلة المضاعفة $\sum_{i,k=0}^{\infty} \left|a_{ik}(x,y)\right|$ متقاربة على المجموعة E .

b. يوجد أعداد مثل $x_0 > 0, y_0 > 0, M > 0$؛ بحيث يكون $\sum_{i,k=0}^{\infty} \left|a_{ik}(x,y)\right| \le M$ لكل نقطة $(x,y) \in E$ و $x > x_0, y > y_0$.

c. $\lim_{(x,y)E \to \infty} \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}(x,y) = 1$.

d. $\lim_{(x,y)E \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left|a_{ik}(x,y)\right| = 0$ لكل عدد مثبت k .

e. $\lim_{(x,y)E \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_{ik}(x,y)\right| = 0$ لكل عدد مثبت i .

ملاحظات $[8]$:

1. نرمز لفضاء الدوال المعتلة بـ E^1 حيث عناصره دوال معتلة.

2. تُدعى $[u]_\alpha$ مجموعة من المرتبة α حيث $u \in E^1$، وتُعرّف كالآتي:

$$[u]_\alpha := \begin{cases} \{t \in \mathbb{R} : u(t) \geq \alpha\} & , \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \{t \in \mathbb{R} : u(t) > \alpha\} & , \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

3. لكل $r \in \mathbb{R}$، تُدعى $\bar{r}$ دالة معتلة وتُعرّف كالآتي:

$$\bar{r}(x) := \begin{cases} 1 & ; if \quad x = r \\ 0 & ; if \quad x \neq r \end{cases}$$

4. ليكن $u,v \in E^1$ و $k \in \mathbb{R}$. الجمع والضرب العددي يُعرّف كالآتي:

$$[u+v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha = \left[u_\alpha^- + v_\alpha^- \ , u_\alpha^+ + v_\alpha^+\right] \qquad , \quad [ku]_\alpha = k[u]_\alpha$$

حيث $[u]_\alpha = \left[u_\alpha^-, u_\alpha^+\right]$ لكل $\alpha \in [0,1]$.

5. المسافة D المُعرّفة على E^1 مُعرّفة كالآتي:

$$D(u,v) := \sup_{\alpha \in [0.1]} d\left([u]_\alpha, [v]_\alpha\right) := \sup_{\alpha \in [0.1]} \max\left\{\left|u_\alpha^- - v_\alpha^-\right|, \left|u_\alpha^+ - v_\alpha^+\right|\right\}$$

حيث d مسافة هاوسدورف Hausdorff وتعطى بالعلاقة:

$$d(X,Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x,y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x,y)\right\}$$

حيث X,Y مجموعات جزئية غير خالية من فضاء متري.

تعاريف $[17]$:

1–نقول إنَّ الدالة المعتلة $f : [a,b] \to E^1$ مستمرة عند $x_0 \in [a,b]$، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ ؛ بحيث إنَّه $D(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ لكل $x \in [a,b]$ وطالما $|x - x_0| < \delta$.

إذا كانت $f(x)$ مستمرة لكل $x \in [a,b]$، عندئذٍ نقول إنَّ $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$.

2- نقول إنَّ الدالة المعتلة $f:[a,b] \to E^1$ قابلة للمكاملة حسب مفهوم ريمان على $[a,b]$ إذا وجدَ $I \in E^1$ مع الخاصية $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$، وبحيث إنَّه من أجل كل تجزئة p من المجال $[a,b]$ حيث $p: a = x_0 < x_1 < ..... < x_n = b$ و نظيم التجزئة $\lambda(p) < \delta$، وباختيار النقاط $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]\ ;\ i = 0, n-1$، يكون لدينا:

$$D\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), I\right) < \varepsilon$$

حيث $I = \int_a^b f(x)dx$.

3- بفرض $f(x)$ دالة معتلة معرّفة على المجال غير المحدود $[a,\infty)$، عندئذٍ نُعرّف:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

بشرط أنَّ النهاية على الجانب الأيمن موجودة في E^1. في هذه الحالة، نقول إنَّ التكامل متقارب و تساوي قيمته قيمة النهاية، خلاف ذلك نقول إنَّ التكامل متباعد.

تعريف[22]: لكل دالة $f \in L^1(0,1)$ يمكن نشرها وفق متسلسلة فورييه- والش بالشكل :

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) w_n(x)$$

تعطى المعاملات $c_n(f)$ بالشكل: $c_n(f) = \int_0^1 f(x) w_n(x) dx$.

تمهيدية 3.1.1 [22]: لتكن $D_n(t), K_n(t)$ و $K_n^{(\alpha)}(t)$ تدل على نوى فيجر Fejér و ديرخليه Dirichlet و سيزارو (C,α) على الترتيب بالنسبة لمتسلسلة والش- فورييه، إذا كان، من أجل الثابت x و $f \in L$، و

$$\int_0^1 D_{2^n}(t)\left|f(x+t)-f(x)\right|dt \to 0 \qquad (1,1)$$

$$\int_0^1 K_{2^n}(t)\left|f(x+t)-f(x)\right|dt \to 0 \qquad (2,1)$$

عندئذٍ من أجل كل $\alpha > 0$، فإنَّ:

$$\int_0^1 \left|K_n^{(\alpha)}(t)\right|\left|f(x+t)-f(x)\right|dt \to 0$$

و

$$\sigma_n^{(\alpha)}(x;f) \to f(x)$$

حيث $\sigma_n^{(\alpha)}(x;f)$ مجموع سيزارو النوني من المرتبة α .

تمهيدية 4.1.1 [22]: من أجل $n \geq 0$، فإنَّ:

$$K_{2^n}(t) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)D_{2^n}(t)+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}2^{j-n}D_{2^n}\left(t+2^{-j}\right) \qquad (3,1)$$

تمهيدية 5.1.1 [8]: إنَّ القضايا الآتية صحيحة:

i. $\overline{0} \in E^1$ عنصر محايد بالنسبة لـ+، أي ، $u+\overline{0}=\overline{0}+u=u$ لكل من $u \in E^1$.

ii. بالنسبة لـ $\overline{0}$. لايملك كل من $u \neq \overline{r}, r \in \mathbb{R}$ نظيراً في E^1.

iii. من أجل $a,b \in \mathbb{R}$ ، حيث $a,b \geq 0$ أو $a,b \leq 0$ وأي $u \in E^1$. لدينا $(a+b)u = au+bu$، حيث $a,b \in \mathbb{R}$.

iv. من أجل $a \in \mathbb{R}$ وأياً كان $u,v \in E^1$ ، لدينا $a(u+v)=au+av$.

V. من أجل $a,b \in \mathbb{R}$ وأياً كان $u \in E^1$ لدينا $a(bu)=(ab)u$.

تمهيدية 6.1.1 [8]: لتكن $u,v,w,z \in E^1$ و $k \in \mathbb{R}$، عندئذٍ القضايا الآتية صحيحة:

i. (E^1,D) فضاء متري تام .

ii. $D(ku,kv)=|k|D(u,v)$

iii. $D(u+v,w+v)=D(u,w)$

iv. $D(u+v,w+z)\le D(u,w)+D(v,z)$

v. $\left|D(u,\bar{0})-D(v,\bar{0})\right|\le D(u,v)\le D(u,\bar{0})+D(v,\bar{0})$

العلاقة $\le$ علاقة مرتبة جزئياً على E^1 تُعرف كالآتي:

$u\le v \Leftrightarrow [u]_\alpha \le [v]_\alpha \Leftrightarrow u_\alpha^- \le v_\alpha^-\ ,\ u_\alpha^+ \le v_\alpha^+$ لكل $\alpha\in[0.1]$.

تمهيدية 7.1.1 [8]: لتكن $u,v,w,e\in E^1$ و $\varepsilon>0$. عندئذٍ تكون القضايا الآتية صحيحة:

i. $D(u,v)\le\varepsilon \Leftrightarrow u-\bar{\varepsilon}\le v\le u+\bar{\varepsilon}$.

ii. إذا كان $u\le v+\bar{\varepsilon}$ لكل $\varepsilon>0$ ، فإنَّ $u\le v$.

iii. إذا كان $u\le v$ و $v\le w$ ، فإنَّ $u\le w$.

iv. إذا كان $u\le w$ و $v\le e$ ، فإنَّ $u+v\le w+e$.

v. إذا كان $u+w\le v+w$ ، فإنَّ $u\le v$.

مبرهنة 4.1.1 [17] :إذا كانت الدالة المعتلة $f:[a,b]\to E^1$ مستمرة (بالنسبة للمسافة D)، ومن أجل كل $x\in[a,b]$ تُعطى الإحداثيات المترية للدالة $f(x)$ بالشكل:

$$[f(x)]_\alpha=[f_\alpha^-(x),f_\alpha^+(x)]$$

فإنَّ $\int_a^b f(x)dx$ موجود، وينتمي إلى E^1 ويُعبر عن ذلك بالعلاقة الآتية:

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]_\alpha=\left[\int_a^b f_\alpha^-(x)dx,\int_a^b f_\alpha^+(x)dx\right]$$

مبرهنة 5.1.1 [5] :إذا كانت $f:[a,b]\to E^1$ و $g:[a,b]\to E^1$ دالتين مستمرتين فإنَّ:

i. $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$ حيث α,β أعداداً حقيقية.

ii. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ حيث $a<c<b$.

iii. الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ معرفة بـ $F(x)=D(f(x),g(x))$ مستمرة على $[a,b]$ و

$$D\left(\int_a^b f(x)dx,\int_a^b g(x)dx\right)\le\int_a^b F(x)dx$$

iv. $\int_a^x f(t)dt$ مستمر في $x\in[a,b]$.

v. $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$ أياً كان $f(x)\le g(x)$ لكل $x\in[a,b]$.

12.1. التذبذب ببطء [10]:

نقول إنَّ المتتالية $\{s_n\}$ متذبذبة ببطء إذا كانت:

$$\lim_{\lambda\to1^+}\limsup_n\max_{n+1\le k\le[\lambda_n]}|s_k-s_n|=0$$

الرمز $[\lambda_n]$ يعني الجزء الصحيح للعدد λ_n. تكون المتتالية $\{s_n\}$ متذبذبة ببطء وفق (C,α) إذا كانت $\{s_n^\alpha\}$ متذبذبة ببطء.

13.1. التذبذب باعتدال [10]:

نقول إنَّ المتتالية $\{s_n\}$ متذبذبة باعتدال إذا كان ، لكل $\lambda>1$ ، تتحقق العلاقة:

$$\limsup_n\max_{n+1\le k\le[\lambda_n]}|s_k-s_n|<\infty$$

ملاحظات [2]:

1- نقول إنَّ الدالة المعتلة $s(x)$ تتناقص ببطء إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $t_0\ge0$ و $\lambda>1$ بحيث إنَّه $s(x)\ge s(t)-\bar{\varepsilon}$، لكل $t_0<t<x\le\lambda t$.

2-نقول إنَّ الدالة المعتلة $s(x)$ تتناقص ببطء إذا وفقط إذا كانت أسرة الدوال الحقيقية

$$\{s_\alpha^-(x)\mid\alpha\in[0,1]\}$$
$$\{s_\alpha^+(x)\mid\alpha\in[0,1]\}$$

متناقصة ببطءٍ متساوٍ، أي $\forall\varepsilon>0$ يوجد $t_0\ge0$ و $\lambda>1$، حيث إنَّه من أجل كل $\alpha\in[0,1]$

يكون:

$$s_{\alpha}^{-}(x)-s_{\alpha}^{-}(t)\geq-\varepsilon$$
$$s_{\alpha}^{+}(x)-s_{\alpha}^{+}(t)\geq-\varepsilon$$

لكل $t_0<t<x\leq\lambda t$.

مبرهنة 6.1.1 [30]: إذا كان المشتق المتناظر $f^{(r)}(x)$ للدالة $f(x)$ موجوداً، عندئذٍ تكون المتسلسلة المشتقة من المرتبة r لمتسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ قابلة للجمع وفق (C,α) إلى المجموع $f^{(r)}(x)$ حيث $\alpha>r$.

لنفترض أنَّ f معرفة في جوار النقطة x وتملك مشتقاً غير متناظر من المرتبة$r-1$ ولتكن $\alpha_0,\alpha_1,.....,\alpha_{r-1}$ ثوابت، ونُعرّف $w_r(x,t)$ من خلال:

$$f(x_0+t)=\alpha_0+\alpha_1t+.....+\alpha_{r-1}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}+w_r(x,t)\frac{t^r}{r!} \qquad (4,1)$$

إذا كانت الدالة $w_r(x,t)$ تملك نهاية عندما $t\to0$ ، فإنَّ للدالة f مشتق من المرتبة r، وليكن $f^{(r)}(x)$. إذا كان rعدداً فردياً. عندئذٍ من (4,1)نجد:

$$\chi(t)=\alpha_0+\alpha_2\frac{t^2}{2!}+.....+\alpha_{r-1}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{1}{2}\delta_r(x,t)\frac{t^r}{r!} \qquad (5,1)$$

وإذا كان r عدداً زوجياً، فإنَّ:

$$\psi(t)=\alpha_1t+\alpha_3\frac{t^3}{3!}+.....+\alpha_{r-1}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{1}{2}\delta_r(x,t)\frac{t^r}{r!} \qquad (6,1)$$

بفرض أنَّه توجد ثوابت α_j وذلك بدون إضافة أي شرط على الدالة$w_r(x,t)$، بحيث يكون لدينا من (5,1) أو (6,1) باعتبار r عدداً فردياً أو زوجياً، و:

$$\delta_r(x)=\lim_{t\to+0}\delta_r(x,t) \qquad (7,1)$$

موجودة، فعندئذٍ يمكن اعتبار $\delta_r(x)$ قفزة للمشتق من المرتبة r ، حتى لو كان هذا المشتق غير موجود عند x .

مبرهنة7.1.1 [27]: إذا كانت f تحقق $\delta_r(x)=0$ ، و إذا كانت $r<\alpha\le r+1$ ، فإنَّ:

$$\left\{\tilde{\sigma}_n^{\alpha}(x)\right\}^{(r)}-\frac{(-1)}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\infty}\frac{\delta_r(x,t)}{t}dt\to 0 \qquad (8,1)$$

عندما $n\to\infty$ حيث $\tilde{\sigma}_n^{\alpha}(x)$ تحويل طريقة سيزارو النونية من المرتبة α للمتسلسلة المرافقة للدالة $f(x)$.

تمهيدية8.1.1 [26]: ليكن $S_n^{\alpha}\left(\sum_0^{\infty}u_k\right)$ يرمزُ إلى مجموع سيزارو من المرتبة α لـ $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ ، بمعنى آخر:

$$S_n^{\alpha}\left(\sum_0^{\infty}u_k\right)=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha}u_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+\alpha}{n-k}u_k$$

إذا كانت $\alpha\ge 1$ ، فإنَّ:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\pi}t^2S_n^{\alpha}\left(\sum_1^{\infty}v^2\cos vt\right)dt=-2\int_0^{\pi}u\,du\int_0^{u}S_n^{\alpha}\left(\sum_1^{\infty}v^2\cos vt\right)dt\\&=-2\int_0^{\pi}t\,S_n^{\alpha}\left(\sum_1^{\infty}v\sin vt\right)dt\simeq-\frac{\pi n^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\simeq-\pi A_n^{\alpha}\qquad;n\to\infty\end{aligned}\right\} \qquad (9,1)$$

تمهيدية9.1.1 [26]: لتكن $K_n^{\alpha}(x)$ ترمز إلى تحويل طريقة (C,α) من المرتبة n المطبق على المتسلسلة $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+.....$ عندئذٍ:

$$\left|\frac{d^r}{dt^r}K_n^{\alpha}(t)\right|\le Cn^{r+1}\qquad;(0\le t\le\pi) \qquad (10,1)$$

$$\left|\frac{d^r}{dt^r}K_n^{\alpha}(t)\right|\le\frac{C}{n^{\alpha-r}t^{\alpha+1}}\qquad;\left(\frac{1}{n}\le t\le\pi\right) \qquad (11,1)$$

حيث $-1 \le \alpha \le r+1 \ , \ n = 1,2,.....$

مبرهنة 8.1.1 [30]: إذا كان r عدداً زوجياً وإذا وجدت ثوابت $\beta_0, \beta_2, ..., \beta_r$ ، بحيث إنَّ:

$$\frac{1}{t^{r+1}} \int_0^t \left| \chi(u) - \left(\beta_0 + \beta_2 \frac{u^2}{2!} + ... + \beta_r \frac{u^r}{r!} \right) \right| du = o(1) \qquad (12,1)$$

عندما $t \to 0$ حيث $\chi(t) = \left(\frac{1}{2}\right)\{f(x+t) + f(x-t)\}$ فإنَّ المتسلسلة المشتقة من المرتبة r لمتسلسلة فورييه لـ $f(x)$ تكون قابلة للجمع وفق (C,α)حيث $\alpha > r$ إلى β_r .

تمهيدية 10.1.1 [27]: إذا كانت $\tilde{K}_n^{\alpha}(t)$ نواة (C,α) المرافقة ولتكن:

$$H_n(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}t - \tilde{K}_n^{\alpha}(t) \qquad (13,1)$$

إذا كانت $0 \le \alpha \le r+1$ يكون لدينا:

$$\left| \left\{ \tilde{K}_n^{\alpha}(t) \right\}^{(r)} \right| \le Cn^{r+1} \qquad ;(0 \le t \le \pi) \qquad (14,1)$$

$$\left| H_n^{(r)}(t) \right| \le Cn^{r-\alpha} t^{-\alpha-1} \qquad ;\left(\frac{1}{n} \le t \le \pi\right) \qquad (15,1)$$

مبرهنة 9.1.1 [28]: لنفرض أنَّ rعدد صحيح فردي وتوجد ثوابت $\alpha_0, \alpha_2, ..., \alpha_{r-1}$ بحيث إنَّ:

$$\int_0^t u^{-r} \left| \psi(u) - \alpha_0 u - \alpha_2 \frac{u^2}{2!} - ..... - \alpha_{r-1} \frac{u^{r-1}}{(r-1)!} \right| du = o(1) \qquad (16,1)$$

عندما $t \to 0$. عندئذٍ المتسلسلة المرافقة لمشتقة متسلسلة فورييه من المرتبة r للدالة $f(x)$ قابلة للجمع وفق(C,α) ; $r < \alpha \le r+1$ إلى التكامل:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{\delta_r(x,t)}{t} dt \qquad (17,1)$$

حيث إنَّ: $\delta_r(x,t) = 2\left\{ \psi(t) - \alpha_0 - \alpha_2 \frac{t^2}{2!} - ..... - \alpha_{r-1} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right\}$

و $\psi(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)-f(x-t)\}$

مبرهنة10.1.1 [28]: لنفرض أنَّ r عدداً زوجياً، وتوجد أعداد صحيحة $\alpha_1,\alpha_3,.....,\alpha_{r-1}$ بحيث إنَّ:

$$\int_0^t u^{-r}\left|\psi(u)-\alpha_1 u-\alpha_3\frac{u^3}{3!}-.....-\alpha_{r-1}\frac{u^{r-1}}{(r-1)!}\right|du=o(1) \qquad (18,1)$$

عندما $t\to 0$، عندئذٍ مرافقة المتسلسلة المشتقة لمتسلسلة فورييه من المرتبة r لـ $f(x)$ قابلة للجمع وفق (C,α) حيث $r<\alpha\le r+1$ إلى التكامل $(17,1)$.

14.1.طريقة بوريلBorel [15]:

نقول إنَّ المتتالية $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق طريقة بوريل إلى s، ونكتبُ $s_n\to s(B)$ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n!}x^n$ متقاربة من أجل كل x و $e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n!}x^n\to s$ عندما $x\to\infty$.

إنَّ طريقة بوريل في قابلية الجمع هي طريقة نظامية[15].

15.1. طريقة هولدر Hölder [33]:

نقول إنَّ المتتالية $\{s_n\}$قابلة للجمع وفق طريقة هولدر (H,k) إلى s ونكتبُ:

$s_n\to s(H,k)$ إذا كانت $\sigma_n^{(k)}\to s$ عندما $n\to\infty$.

نُعرّف $\sigma_n^{(1)}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}s_j$ لكل $n\ge 0$ ، بتكرار عملية الحساب المتوسط ، يكون:

$\sigma_n^{(k)}=\frac{\sigma_0^{(k-1)}+.....+\sigma_n^{(k-1)}}{n+1}$ لكل $k\ge 0$ و $\sigma_n^{(0)}=s_n$ و $\sigma_n^{(k+1)}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sigma_j^{(k)}$.

تكون طريقة هولدر (H,k) نظامية بالنسبة لـk . من المعروف أنَّه إذا كانت $s_n\to s(H,k)$ حيث $k\ge 0$ و $k'>k$، فإنَّ $s_n\to s(H,k')$ [17].

إذا كانت $\left(\sigma_n^{(k)}\right)$ قابلة للجمع وفق طريقة بوريل إلى s ، نقول إنَّ $\{s_n\}$ قابلة للجمع

وفق $B(H,k)$ إلى s ونكتبُ $s_n \to s(B)(H,k)$.

نُعرّف الفرق العكسي للمتتالية (s_n) لكل $n \geq 0$ من خلال $\Delta s_0 = s_0$ و $\Delta s_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ لكل $k \geq 0$ و يكون لدينا $\sigma_n^{(k)} - \sigma_n^{(k+1)} = V_n^{(k)}$.

حيث:

$$V_n^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} V_j^{(k-1)} & ;k \geq 1 \\ \dfrac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} j\,\Delta s_j & ;k = 0 \end{cases}$$

ويمكننا التعبير عن $\sigma_n^{(k+1)}$ بالصيغة الآتية:

$$\sigma_n^{(k+1)} = s_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{V_j^{(k)}}{j}$$

ويمكن إعادة كتابة العلاقة $\sigma_n^{(k)} - \sigma_n^{(k+1)} = V_n^{(k)}$ بالشكل $\sigma_n^{(k)} = V_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{V_j^{(k)}}{j} + s_0$.

ملاحظة:

1.العلاقة $s_n = o(1)$ تعني $s_n \to 0$ عندما $n \to \infty$.

2. العلاقة $s_n = O(1)$ تعني أنَّ s_n محدودة عندما $n \to \infty$.

مبرهنة11.1.1 [14]: إذا كانت $s_n \to s(B)$ و $n\Delta s_n = o\left(\sqrt{n}\right)$ $(n \to \infty)$ ، فإنَّ $\{s_n\}$ تتقارب إلى s.

مبرهنة12.1.1 [14]: إذا كانت $s_n \to s(B)$ و $n\Delta s_n = O\left(\sqrt{n}\right)$;$n \to \infty$، فإنَّ $\{s_n\}$ تتقارب إلى s.

تمهيدية11.1.1 [10]: من أجل أي $k \geq 0$ تكون: $V_n^{(k)} = n\Delta\sigma_n^{(k+1)}$.

تمهيدية12.1.1 [10] : من أجل أي $k \geq 0$ تكون:

$$n\Delta V_n^{(k+1)} = V_n^{(k)} - V_n^{(k+1)} \qquad (19,1)$$

تمهيدية13.1.1 [33]: إذا كانت $s_n \to s(H,1)$ و (s_n) متذبذبة ببطء، فإنَّ $\{s_n\}$ تتقارب إلى s.

تمهيدية14.1.1 [15]: إذا كانت $s_n \to s(B)$، فإنَّ $s_n \to s(B)(H,1)$.

ملاحظات [14]:

1- إذا كانت $\Gamma(\delta+1)x^{-\delta}f_\delta(x) \to \sigma$ ؛ حيث $f_\delta(x) = \{\Gamma(\delta)\}^{-1}\int_0^x (x-t)^{\delta-1} f(t)dt$ و Γ هي دالة التابع غاما عندما $x \to \infty$ و $\delta > 0$، عندئذٍ نقول إنَّ σ نهاية الدالة $f(x)$ وفق طريقة (C,δ)، ونكتبُ: $f(x) \to \sigma(C,\delta)$.

2- إذا كانت $e^{-x}g_\delta(x) \to \sigma$ عندما $x \to \infty$،عندئذٍ نقول إنَّ σنهاية الدالة $f(x)$ وفق طريقة $\left(\hat{C},\delta\right)$ ، ونكتبُ $f(x) \to \sigma\left(\hat{C},\delta\right)$.

نُلاحظ أنَّ (C,δ) تكون طريقة سيزارو القياسية بالنسبة لقابلية الجمع، حيث :

$$e^{-x}g_\delta(x) = \{\Gamma(\delta)\}^{-1}e^{-x}\int_0^x (x-t)^{\delta-1}e^t f(t)dt$$
$$= \{\Gamma(\delta)\}^{-1}X^{-1}\int_1^X \left(\log\frac{X}{T}\right)^{\delta-1} f(\log T)dT$$

وأنَّ التكامل الأخير عبارة عن تحويل هولدر الدالي للدالة $f(\log T)$.

3- بفرض أنَّ $\lambda > 0$ و أنَّ μ عدد حقيقي و N عدد صحيح موجب أكبر من $\frac{-\mu}{\lambda}$

ليكن ρ و s_n (n=0,1,2,.....) أعداداً عقدية. نُعرّف:

$$S_{\lambda,\mu}(x) = \lambda e^{-x}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{s_n x^{\lambda\mu+\mu-1}}{\Gamma(\lambda n+\mu)} .$$

4- إذا كانت $S_{\lambda,\mu}(x)\to\rho$ عندما $x\to\infty$، عندئذٍ نقول إنَّ ρ نهاية المتتالية $\{s_n\}$ وفق طريقة (B,λ,μ)، ونكتب $s_n\to\rho(B,\lambda,\mu)$.

تمهيدية15.1.1 [33]:من أجل $x>t>0$ ، $0<\delta<1$، يكون لدينا:

$$\Gamma(1-\delta)\int_0^t (x-v)^{\delta-1} f(v)dv$$
$$=\delta\int_0^t f_\delta(v)dv\int_t^x (x-w)^{\delta-1}(w-v)^{-\delta-1}dw$$

مبرهنة13.1.1 [19]: التحويل $\left(\hat{C},\alpha\right)(B,\lambda,\mu)$ للمتتالية $\{s_n\}$ يساوي التحويل $(B,\lambda,\mu+\delta)$ للمتتالية $\{s_n\}$. أي:

$$e^{-x}\int_0^x (x-t)^{\delta-1}e^t S_{\lambda,\mu}(t)dt=S_{\lambda,\mu+\delta}(x)$$

وهذا ينتج من كون $s_n\to\rho\left(\hat{C},\delta\right)(B,\lambda,\mu)$ إذا وفقط إذا كانت $s_n\to\rho(B,\lambda,\mu+\delta)$.

مبرهنة14.1.1 [19]: إذا كانت $s_n\to\rho(B,\lambda,\mu)$ ، فإنَّ $s_n\to\rho(C,\delta)(B,\lambda,\mu)$،

وهذا بديهيٌ لأنَّ (C,δ) نظامية.

مبرهنة15.1.1 [19]:

(i) إذا كانت $s_n\to\rho(B,\lambda,\mu+\delta)$، فإنَّ $s_n\to\rho(C,\delta)(B,\lambda,\mu)$.

(ii) يوجد للمتتالية نهاية وفق $(C,\delta)(B,\lambda,\mu)$، لكن نهايتها وفق $(B,\lambda,\mu+\delta)$ غير موجودة.

16.1.طريقة نيورلند Nörlund [23]:نقول إنَّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ قابلة للجمع وفق طريقة نيورلند (N,p_n) إلى المجموع s إذا كانت $lim_{n\to\infty}t_n=s$ حيث:

$$t_n=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}s_k$$

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_{n-k}}{P_n} & ;\ 0 \le k \le n \\ 0 & ; k > n \end{cases}$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad , P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

و$\{p_n\}$ هي متتالية من الثوابت الحقيقية أو العقدية وإذا كانت المتسلسلة قابلة للجمع بطريقة نيورلند (N, p_n) فإننا نكتب: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s\ (N, p_n)$.

ويمكننا أن نكتب:

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{P_n} s_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{P_n} s_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_{n-k}}{P_n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k}{P_n} u_{n-k}$$

17.1.طريقة نيورلند– سيزارو Nörlund-Cesàro [23]:

يُعـرِّفُ جـداءُ قابليـةِ الجمـعِ وفـق (N, P_n) وقابليـةِ الجمـعِ وفـق $(C,1)$، قابليـة الجمـع وفـق $(N, P_n)(C,1)$ ونرمزُ له بالرمزِ $N_n^p C_n^1$.

إذا كان:

$$N_n^p C_n^1 = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} s_v \to s \qquad (20,1)$$

عندما $n \to \infty$.

حيث N_n^p هو تحويل (N, P_n) لـ s_n و C_n^1 هو تحويل $(C,1)$ لـ s_n .

عندئـذٍ نقـول إنَّ المتسلسـلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ قابلـة للجمـع وفـق $(N, P_n)(C,1)$ إلـى العـدد المحـدود s.

نقول إنَّ المتتالية $\{x_n\}$ قابلة للجمع وفق نيورلند– سيزارو إلى العدد L وفق الطريقة الموزونة العادية والمحددة للمتتالية $\{p_n\}$ أو باختصار قابلة للجمع وفق $(N, P_n)\ (C,1)$ إذا كان:

$$\lim_n N_n^p C_n^1 (x) = L \qquad (21,1)$$

و نكتبُ $L = N_n^p C_n^1 - \lim_n x_n$.

سنرمز بـ $N_n^p C_n^1$ إلى مجموعة كل المتتاليات القابلة للجمع وفق $N_n^p C_n^1$. إذا كانت:

$$\lim_n x_n = a \qquad (22,1)$$

موجودة. عندئذٍ تكون $(21,1)$ أيضاً موجودة. على أيّة حال، العكس غير صحيح دائماً. نستطيع أنَّ نُبيّن ذلك من خلال المثال الآتي:

مثال (4): لنأخذ $p_n = 1$ لكل $n \in N$، ولنعرّف أيضاً المتتالية الآتية $x = (x_k) = (-1)^k$، عندئذٍ لدينا:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{v=0}^{k}(-1)^v \to 0 \quad \text{عندما} \quad n \to \infty$$

علماً أنَّ $x = \{x_k\}$ غير متقاربة.

نلاحظ أنَّه يمكن أن تقتضي العلاقة $(21,1)$ العلاقة $(22,1)$ تحت شرط معين.

مثال (5): لتكن لدينا المتتالية $\{n\}$، عندئذٍ $N_n^p C_n^1$ تؤول إلى طريقة نيورلند.

18.1. طريقة ريس $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p_n})$ (Riesz Method) [14]:

نقول إنَّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع وفق طريقة ريس $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p_n})$ إلى المجموع s إذا كانت $lim_{n\to\infty} t_n = s$ حيث إنَّ:

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} s_k$$

و

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{P_n} & ;\ 0 \le k \le n \\ 0 & ;k > n \end{cases}$$

ويُرمز لطريقة ريس أيضاً بالرمز: $(\overline{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{p_n})$، ويمكننا أن نكتب:

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{P_n} s_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{P_n} s_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{P_n - P_{k-1}}{P_n}\right) u_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{P_n - P_{n-k-1}}{P_n}\right) u_{n-k}$$

ملاحظة:

طريقة ريس $(\overline{N}, p_n) = (R, p_n)$ عندما يكون $a_{nk} = \frac{p_k}{P_n}$ حيث $\{p_n\}$ متتالية غير سالبة ومتناقصة وتحقق: $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty$ عندما $n \to \infty$.

- **مبرهنة هاردي:**

إنَّ مبرهنة هاردي تُعتبر تعميماً لكل من المبرهنات الآتية:

نحتاج في هذه المبرهنات إلى عدة رموز منها:

$$w_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = n(u_n - u_{n-1})$$

$$\sigma_{n,p}^{(1)}(u) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} u_v$$

$$w_{n,p}^{(1)}(u) = w_{n,p}^{(0)}(u) - \sigma_{n,p}^{(1)}\left(w_{n,p}^{(0)}(u)\right)$$

مبرهنة 16.1.1 [14]: إذا كانت $\{x_n\}$ قابلة للجمع وفق طريقة $(\overline{N}, p)$ إلى x و $w_{n,p}^{(0)}(x) = 0(1)$ ، فإنَّ $\{x_n\}$ تتقارب إلى x .

مبرهنة 17.1.1 [14]: إذا كانت $\left(\sigma_{n,p}^{(1)}(u)\right)$ قابلة للجمع وفق $(\overline{N}, p)$ إلى s والشرط $w_{n,p}^{(m)}(u) = 0(1)$ محقق، فإنَّ $\{u_n\}$ تتقارب إلى s .

تمهيدية 16.1.1 [14]: يُكافئ الشرط المعطى في العلاقة $\liminf_n \frac{P_{t_n}}{P_n} > 1 \quad , t > 1$ العلاقة:

$$\liminf_n \frac{P_n}{P_{t_n}} > 1 \quad , 0 < t < 1$$

19.1.طريقة آبل Abel [34]:

نقول إنّ المتتالية $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق طريقة آبل إلى s، ونكتب $s_n \to s(A)$ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة من أجل $0 \le x < 1$ وتسعى إلى s عندما $x \to 1^-$، ونعلم أنَّه إذا كانت المتتالية قابلة للجمع وفق (C,α) إلى s حيث $\alpha > -1$ ، فإنّها قابلة للجمع وفق طريقة آبل إلى s.

مبرهنـــة18.1.1 [21]: نقـول إنَّ المتسلسـلة العدديـة $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ قابلـة للجمـع وفـق طريقـة آبـل إلى العدد s، إذا كانت $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ متقاربة من أجل $0 \le x < 1$ ويكون:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = s \qquad (23,1)$$

وهذا الشرط مُكافئ للشرط الآتي:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k \qquad (24,1)$$

الإثبات:

فـي الواقـع، لـتكن $0 \le x < 1$ والمتسلسـلة فـي الطـرف الأيسـر مـن العلاقـة $(24,1)$ متقاربـة، لنأخـذ العـدد r ؛ حيـث $x < r < 1$، عندئـذٍ بمـا أنَّ $\sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k$ متقاربـة فإنَّـه يوجـد عـدد c بحيث يكون $\left|u_k r^k\right| \le c \quad ; k = 0,1,2,....$ ولذلك يكون:

$$\left|s_n x^n\right| \le c x^n \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + ... + \frac{1}{r^n}\right) < \frac{c}{1-r} x^n \frac{1}{r^n}$$

و تسعى هذه العبارة إلى الصفر عندما $n \to \infty$ ولكن باستخدام تحويل آبل نجد:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k \left(x^k - x^{k+1}\right) + s_n x^n = (1-x) \sum_{k=0}^{n} s_k x^k + s_n x^n$$

وبما أنَّ $s_n x^n \to 0$ فإنَّ $(24,1)$ صحيحة، وتُبرهن بنفس الطريقة إذا افترضنا تقارب

المتسلسلة الموجودة في الطرف الأيمن من العلاقة $(24,1)$ ، ولهذا أيضاً، يمكن التعبير عن الشرط $(23,1)$ كما يلي:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}s_k x^k = s \qquad (25,1)$$

ونقول بأنَّ هذه المتسلسلة قابلة للجمع إلى العد s وفق طريقة آبل إذا تحققت العلاقة $(25,1)$.

يمكن أيضاً إثبات صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة فروبينيوس $[21]$:

إذا كانت المتسلسة قابلة للجمع وفق طريقة $(C,1)$ إلى العدد s، فتكون قابلة للجمع وفق طريقة آبل إلى s أيضاً.

الإثبات :

في الواقع ، بما أنَّ $(n+1)\sigma_n = s_0+s_1+s_2+.....+s_n$، فيُعطى الطرف الأيمن من $(24,1)$ بالشكل:

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k x^k = (1-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k x^k \qquad (26,1)$$

وذلك باستخدام تحويل آبل.

ولكن من أجل $0<x<1$ لدينا:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

أو

$$1 = (1-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

و بضـرب طرفـي العلاقـة السـابقة بالعـدد s مـع الاخـذ بعـين الاعتبـار العلاقـة $(26,1)$ نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - s = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - s) x^k$$
$$= (1-x)^2 \sum_{k=0}^{N} (k+1)(\sigma_k - s) x^k + (1-x)^2 \sum_{N+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - s) x^k \qquad (27,1)$$

وإذا كان ε عدداً ما موجباً، فإنَّه يمكن اختيار عدد طبيعي N بحيث يكون:

$|\sigma_{k+1} - s| < \varepsilon$ لكل $k \geq N$.

فعندئذٍ المجموع الثاني في الطرف الأيمن من العلاقة $(27,1)$ أصغر من ε. أما بالنسبةِ للمجموع الأول من تلك العلاقة فهو يسعى إلى الصفر باعتبار أنَّ عدد الحدود فيه ثابت ومن هذا ينتج أنَّ العلاقة $(23,1)$ محققة.

20.1. طريقة آبل– سيزارو Abel -Cesàro [21]:

نقول إنَّ المتتالية $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق $(A)(C,\alpha)$ إلى s ونكتب $s_n \to s\,(A)(C,\alpha)$ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (s_n^{\alpha} - s_{n-1}^{\alpha}) x^n$ متقاربة لأجل كل $0 \leq x < 1$ وتسعى إلى s عندما $x \to 1^-$ حيث $s_{-1}^{\alpha} = 0$ ، نُلاحظ أنَّ قابلية الجمع وفق $(A)(C,\alpha)$ تؤول إلى قابلية الجمع وفق آبل عندما $\alpha = 0$.

- **مبرهنة آبل** [34] :

تنص على أنَّه إذا كانت $\{s_n\}$ متقاربة وفق طريقة سيزارو إلى s، عندها تكون قابلة للجمع وفق آبل إلى s أيضاً، عكس هذه المبرهنة غير صحيح بالضرورة. في حين أنَّ العكس الجزئي من مبرهنة آبل حصل عليه Tauber [32] وهذا يتضح من خلال المبرهنات الآتية:

نحتاج إلى هذه الرموز في المبرهنات:

$\tau_n = na_n$ ، وتشير τ_n^{α} إلى تحويل طريقة (C,α) لـ (τ_n) .

مبرهنة19.1.1: إذا كانت $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق آبل إلى s و $\tau_n = o(1)$ فإنَّ $\{s_n\}$ تتقارب إلى s.

مبرهنة20.1.1: إذا كانت $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق آبل إلى s و $\tau_n^1 = o(1)$، حيث $\tau_n^1 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} ka_k$ ، فإنَّ $\{s_n\}$ تتقارب إلى s.

مبرهنة21.1.1: إذا كانت $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق آبل إلى s و $\tau_n \geq -H$ لكل ثابت غير سالب H، فإنَّ $\{s_n\}$ تتقارب إلى s .

مبرهنة22.1.1 : إذا كانت $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق آبل إلى s و $\tau_n^1 \geq -H$ لكل ثابت غير سالب H، فإنَّ $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق $(C,1)$ إلى s.

مبرهنة23.1.1: إذا كانت $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق $(A)(C,\alpha)$ إلى s حيث $\alpha > 0$ و $\tau_n^\alpha \geq -H$ لكل ثابت غير سالب H، فإنَّ $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق (C,α)إلى s .

مبرهنة24.1.1: الشرط اللازم والكافي لقابلية جمع $\{s_n\}$وفق $(A)(C,\alpha+1)$إلى s حيث $\alpha > -1$،هو أن تكون $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق (C,α) إلى s و $\tau_n^{\alpha+1} = o(1)$.

مبرهنة25.1.1: لتكن $\alpha > -1$، إذا كانت $\{s_n\}$قابلة للجمع وفق $(A)(C,\alpha)$ إلى s و $(n\Delta)_m \tau_n^{\alpha+m-1} \geq -H$ لكل عدد صحيح $m \geq 2$وكل عدد صحيح $n \geq 1$، فإنَّ $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق (C,α) إلى s.

مبرهنة26.1.1: إذا كانت $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق آبل إلى s و $(n\Delta)_m \tau_n^{m-1} \geq -H$ لكل عدد صحيح $m \geq 2$وكل عدد صحيح $n \geq 1$، فإنَّ $\{s_n\}$ تتقارب إلى s .

تمهيدية17.1.1 [29]: إذا كانت $\alpha > -1$، فإنَّ $\tau_n^\alpha = n\Delta s_n^\alpha = n\left(s_n^\alpha - s_{n-1}^\alpha\right)$.

تمهيدية18.1.1 [14]: إذا كانت $\alpha > -1$ ، فإنَّ $\tau_n^{\alpha+1} = (\alpha+1)\left(s_n^\alpha - s_n^{\alpha+1}\right)$.

تمهيدية19.1.1 [6]: إذا كانت $\alpha > -1$ ، فإنَّ $n\Delta\tau_n^{\alpha+1} = (\alpha+1)\left(\tau_n^\alpha - \tau_n^{\alpha+1}\right)$.

تمهيدية20.1.1 [32]: إذا كانت $-1 < \alpha < \beta$ ، فإنَّ $(A)(C,\alpha) \subset (A)(C,\beta)$.

تمهيدية21.1.1 [7]: إذا كانت $\alpha > -1$ ، ومن أجل أي عدد صحيح $m \geq 2$ فإنَّ:

$$(n\Delta)_m \tau_n^{\alpha+m} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} A_m^{(j)}(\alpha) n\Delta \tau_n^{(\alpha+j)}$$

حيث إنَّ:

$$A_m^{(j)}(\alpha) = a_m^{(j-1)}(\alpha) + a_m^{(j)}(\alpha) \quad , \quad a_m^{(0)}(\alpha) = 0$$

و

$$a_m^{(j)}(\alpha) = \prod_{k=j+1}^{m} (\alpha+k) \left[\sum_{\substack{j+1 \leq t_1, t_2, \ldots, t_{j-1} \leq m \\ r<s \Rightarrow t_r \leq t_s}} (\alpha+t_1)(\alpha+t_2) \ldots\ldots\ldots (\alpha+t_{j-1}) \right]$$

حيث $j = 1, 2, \ldots\ldots, m$.

تمهيدية22.1.1 [7]: لتكن $\alpha > -1$ من أجل أي عدد صحيح $m \geq 2$ يكون:

$$A_{m+1}^{(j)}(\alpha) = (\alpha + j) A_m^{(j-1)}(\alpha+1) + (\alpha + j + 1) A_m^{(j)}(\alpha+1)$$

حيث $A_m^{(j)}(\alpha)$ معرفة في التمهيدية21.1.1.

- **تمهيدية آبل الأولى** [21]: بفرض أن $\{a_n\}$ متتالية متناقصة تماماً و $a_n \geq 0$ من أجل n عندئذٍ:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \right| \leq a_0 \max_{0 \leq k \leq n} \left| \acute{S}_k \right|$$

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k b_k \right| \leq a_p \max_{p \leq k \leq q} \left| \acute{S}_k \right|$$

حيث إن: $\acute{S}_k = \sum_{j=p}^{k} b_j \; ; k \geq p$ و $\sum_{j=p}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) \acute{S}_k + a_q \acute{S}_q$.

- **تمهيدية آبل الثانية** [21]:

بفرض أن $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتان حقيقيتان غير سالبتين، عندئذٍ:

1. إذا كانت $\{a_n\}$ متناقصة فإن: $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \le a_0 \max_{0\le k\le n}\left|\sum_{j=0}^{k} b_j\right|$.
2. إذا كانت $\{a_n\}$ متزايدة فإن: $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \le 2a_n \max_{0\le k\le n}\left|\sum_{j=0}^{k} b_j\right|$.

مبرهنة27.1.1 : (مبرهنة ليبيغ)Lebesgue Theorem [35] : لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية الدوال المنتهيّة والقيوسة و المتقاربة تقريباً في كل مكان بالنسبة لـ μ إلى الدالة القيوسة f، عندئذٍ يكون $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

مبرهنة28.1.1: مبرهنة ريمان- ليبيغ (Riemann-Lebesgue theorem) [35]: لتكن الدالة f مستمرة قِطَعِيّاً (جزئياً) على الفترة المحدودة (α,β) ولتكن $\{\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_n,\dots\}$ أسرة لانهائية من الدوال المتعامدة والمستمرة قِطَعِيّاً (جزئياً) على الفترة (α,β) وتحقق هذه الأسرة من أجل ثابت ما منتهٍ c ومن أجل أي عدد صحيح موجب k العلاقة: $\|\phi_k\| < c$، عندئذ يكون $\lim_{k\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\phi_k^*(t)dt = 0$، حيث $\phi_k^*(t)$ هي الدالة المرافقة العقدية للدالة $\phi_k(t)$، ونظيم الدالة ϕ_k يُعطى بالشكل: $\phi_k = \left\{\int_{\alpha}^{\beta}\phi_k(t)\phi_k^*(t)dt\right\}^{\frac{1}{2}}$.

مبرهنة29.1.1 : مبرهنة إيغوروفEgoroff Theorem [35]: لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الدوال القيوسة و المتقاربة تقريباً في كل مكان بالنسبة للقياس μ إلى الدالة f، عندئذٍ من أجل أي عدد $\delta > 0$ توجد مجموعة مقيسة مثل R_δ بحيث إنَّ :

i. $\mu(X \setminus R_\delta) < \delta$.
ii. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى f بانتظام على R_δ.

مبرهنة 30.1.1: مبرهنة لوزينLusin Theorem [35]: لتكن $X \subseteq R^n$ مجموعة مقيسة، وفق قياس ليبيغ المنتهيّ ولتكن الدالة $f: X \to \overline{R}$ قيوسة وفق ليبيغ ومحدودة تقريباً في كل مكان عندئذٍ من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مغلقة مثل $F_\varepsilon \subset X$ بحيث إنَّ مقصور الدالة f

على F_ε هو $f|_{F_\varepsilon}$ دالة مستمرة ويكون تبعاً لذلك :

$$m\left(X \setminus F_\varepsilon\right) < \varepsilon$$

(حيث m قياس ليبيغ على R^n)

مبرهنة31.1.1 : مبرهنة فيجر Fejér Theorem [16]: لتكن $f : R \to \mathbb{C}$ دالة مستمرة ودورية بدورٍ قدره 2π عندئذٍ التحويل (σ_n) لطرائق سيزارو المطبق على متتالية المجاميع الجزئية (s_n) لمتسلسلات فورييه لـ f تتقارب جميعها إلى f على المجال $[-\pi,\pi]$

حيث:

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt$$

حيث F_nنواة فيجر من المرتبة n.

الفصل الثاني

قابلية جمع المتسلسلات البسيطة والمضاعفة وفق طريقة سيزارو

1.2. قابلية جمع متسلسلة والش- فورييه وفق طريقة سيزارو:

تُبيّن مبرهنة فيجر ليبيغ أنَّ متسلسلة فورييه المثلثية للدالة الكمولة تكون قابلة للجمع وفق طريقة $(C,1)$ تقريباً في كل مكان، ومن ثمّ تمّ تعميم هذه النتيجة من أجل $\alpha > 0$.

تمهيدية1.1.2 [22]: لتكن C مجموعة جزئية مقيسة على $[0,1]$ و $D(x) = \rho(x,C)$ بُعد النقطة x عن C، ولتكن $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq ..... \geq 0$ متتالية متناقصة ذات حدود غير سالبة وتحقق الشروط الآتية:

$$\sum_{h_j \leq \delta} h_j \leq M\,\delta \qquad (1,2)$$

$$\sum_{h_j > \delta} \frac{1}{h_j} \leq \frac{M}{\delta} \qquad (2,2)$$

بالنسبة للثابت M ولكل $\delta > 0$.

عندئذٍ، من أجل $x \in C$ ، يكون لدينا :

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D(x \pm h_j)}{h_j} < \infty \qquad (3,2)$$

الإثبات :

دون أن يؤثر على عمومية المسألة، يمكن أن نأخذ C مجموعة مغلقة . وبفرض أنَّ:

$$V = (-h_1, 1+h_1) - C = \sum_{n \geq 1} I_n$$

حيث I_n تجزئة من المجالات المفتوحة بطول δ_n، من أجل أي $0 < |h| \leq h_1$، يكون لدينا:

$$\int_C D(x+h)dx = \int_{C+h} D(x)dx = \int_{(C+h)V} D(x)dx$$

$$= \sum_{n\geq 1} \int_{(C+h)I_n} D(x)dx = \left(\sum_{\delta_n<|h|} + \sum_{\delta_n\geq|h|} \right)\left(\int_{(C+h)I_n} D(x)dx \right) = T_1(h)+T_2(h)$$

ومن أجل $\left|(C+h)I_n\right| \leq \delta_n$, $\delta_n < |h|$ وعلى هذه المجموعة $D(x) \leq \delta_n$ يكون لدينا:

$$T_1(h) \leq \sum_{\delta_n<|h|} \delta_n^{\,2}$$

وبالتالي يكون:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{h_j} T_1(\pm h_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{h_j} \sum_{\delta_n<h_j} \delta_n^{\,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{\,2} \sum_{h_j>\delta_n} \frac{1}{h_j} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

و من أجل $\left|(C+h)I_n\right| \leq |h|$, $\delta_n \geq |h|$ وعلى هذه المجموعة $D(x) \leq |h|$ يكون لدينا:

$$T_2(h) \leq h^2 \sum_{\delta_n\geq|h|} (1)$$

وبالتالي:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{h_j} T_2(\pm h_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sum_{\delta_n\geq h_j} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\delta_n\geq h_j} h_j \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

لذلك فإنَّ:

$$\int_c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D(x\pm h_j)}{h_j} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{h_j} \left(T_1(\pm h_j) + T_2(\pm h_j) \right) < \infty$$

بما أنَّ الدالة التكاملية $\varphi(x)$ متقاربة على C، فإننا نُلاحظ أنَّ كل من الصيغ $(1,2),(2,2)$ تُكافئ وجود $r \geq 1$ و q بحيث $0<q<1$ ولذلك $(j \geq 1)$ $h_{j+r} \leq q h_j$

بشكلٍ خاص، التمهيدية تكون صحيحة لأجل $h_j = 2^{-j}$.

مبرهنة1.1.2 [22]: من أجل $\alpha > 0$. تكون متسلسلة والش–فورييه للدالة الكمولة $f(x)$ قابلة للجمع وفق (C,α) إلى $f(x)$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات :

ليكن $\alpha_n(x) = r.2^{-n} \le x < (r+1)2^{-n} = \beta_n(x)$ ، عندئذٍ تكون المساواة الآتية:

$$\int_0^1 D_{2^n}(t)\left|f(x+t)-f(x)\right|dt = 2^n \int_{\alpha_n(x)}^{\beta_n(x)} \left|f(t)-f(x)\right|dt = o(1)$$

محققة تقريباً في كل مكان. نُلاحظ أنَّه، وحسب التمهيدية3.1.1، فالعلاقة $(2,1)$ تكون محققة. أي أنه لأجل الثابت $\eta > 0$الوارد في مبرهنة لوزين، توجد مجموعة C_1 قياسها أكبر من $1-\frac{\eta}{2}$ حيث تكون الدالة f مستمرة تقريباً في كل مكان، ويكون لدينا ايضاً حسب مبرهنة ليبيغ العلاقة:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left|f(t)-f(x)\right|dt = 0 \qquad (a.e.) \qquad (4,2)$$

الآن بتطبيق مبرهنة إيغوروف توجد مجموعة C_2 قياسها أكبر من $1-\frac{\eta}{2}$ ،وهذا يقضي تحقق $(4,2)$ بانتظام. و بفرض أنَّ $C \subseteq C_1 \cap C_2$حيث قياسها أكبر من $1-\eta$. فتكون الدالة f محدودة ومستمرة بانتظام ، أي $\left|f(x)\right| \le B$ ، وإذا كان:

$$w(h) = \sup_{|u|\le h}\sup_{y\in C}\frac{1}{u}\int_y^{y+u}\left|f(t)-f(y)\right|dt \qquad (5,2)$$

لدينا $w(h)\to 0$ عندما $h\to 0$. من أجل $x\in C$ ، بضرب المعادلة $(3,1)$ بـ $\left|f(x+t)-f(x)\right|$وبالمكاملة، نحصل على :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 K_{2^n}(t)\left|f(x+t)-f(x)\right|dt \\
&= o(1) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} 2^{j-n}\int_0^1 D_{2^n}\left(t+2^{-j}\right)\left|f(x+t)-f(x)\right|dt \\
&= o(1) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} 2^{j-n}\int_0^1 D_{2^n}(t)\left|f\left(x+2^{-j}+t\right)-f(x)\right|dt
\end{aligned}$$

وبالتالي، لإثبات صحة $(2,1)$ يكفي أن يكون:

$$\Delta_n(x)=\sum_{j=1}^{n}2^j\int_{\alpha_n(x+2^{-j})}^{\beta_n(x+2^{-j})}\left|f(t)-f(x)\right|dt \qquad (6,2)$$

تسعى للصفر تقريباً في كل مكان على C، وذلك بحكم اختيارية η.

الآن ، مقابل كل $\varepsilon>0$،عندئذٍ باختيار $p=p(\varepsilon)$ ؛ بحيث إنَّه $w\left(2^{-p}\right)<\varepsilon$ وبالتالي فإنَّ $\left|f(y)-f(x)\right|<\varepsilon$، لكل $x,y\in C$ ؛ حيث $\left|x-y\right|\le 2^{-p}$، نكتب :

$$\Delta_n(x)=\left(\sum_{j=1}^{p}+\sum_{j=p+1}^{n}\right)\left(2^j\int_{\alpha_n(x+2^{-j})}^{\beta_n(x+2^{-j})}\left|f(t)-f(x)\right|dt\right)=S_1+S_2 \qquad (7,2)$$

لدينا:

$$S_1\le 2^{p+1}[\max_{0\le r<2^n}\int_{r.2^{-n}}^{(r+1)2^{-n}}\left|f(t)\right|dt+B.2^{-n}]<\varepsilon \qquad (8,2)$$

من أجل $x\in C, n>n_0$.

من أجل $x\in C$ و $p<j\le n$ نُعرّف $y_j=y_j(x)$ ليكون عنصراً من C ؛ بحيث يكون هو الأقرب إلى $z_j=x+2^{-j}$ عندئذٍ:

$$\int_{\alpha_n(z_j)}^{\beta_n(z_j)}\left|f(t)-f(x)\right|dt\le\int_{\alpha_n(z_j)}^{\beta_n(z_j)}\left|f(t)-f(y_j)\right|dt+\int_{\alpha_n(z_j)}^{\beta_n(z_j)}\left|f(y_j)-f(x)\right|dt \qquad (9,2)$$

بما أن $x,y_j\in C$ و $\left|x-y_j\right|\le 2\left|x-z_j\right|=2^{1-j}\le 2^{-p}$

والتكامل الثاني على يمين الصيغة $(9,2)$ أصغر من $2^{-n}\varepsilon$. التكامل الأول مساوٍ لـ:

$$\int_{\alpha_n(z_j)}^{y_j}dt+\int_{y_j}^{\beta_n(z_j)}\left|f(t)-f(y_j)\right|dt\le$$

$$\left|y_j-\alpha_n(z_j)\right|w\left(\left|y_j-\alpha_n(z_j)\right|\right)+\left|\beta_n(z_j)-y_j\right|w\left(\left|\beta_n(z_j)-y_j\right|\right)\le 2v_j w(v_j)$$

حيث: $v_j = \max\left(\left|y_j - \alpha_n(z_j)\right|, \left|\beta_n(z_j) - y_j\right|\right)$

الآن :

$$v_j \le \rho(z_j, C) + 2^{-n} \le 2^{1-j} \le 2^{-p}$$

فإنَّ $w(v_j) < \varepsilon$ و بما أن التكامل الأول متعلق بـ:

$2\varepsilon\left(\rho(z_j, C) + 2^{-n}\right)$ و

$$\int_{\alpha_n(z_j)}^{\beta_n(z_j)} \left|f(t) - f(x)\right| dt < 3\varepsilon\left(\rho(z_j, C) + 2^{-n}\right) \qquad (10,2)$$

بضرب $(10,2)$ بـ 2^j والجمع، نحصل على:

$$S_2 < 6\varepsilon + 3\varepsilon \sum_{j=P+1}^{n} 2^j \rho(z_j, C)$$

وبالتالي:

$$\Delta_n(x) < 7\varepsilon + 3\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \rho\left(x + 2^{-j}, C\right)$$

من أجل $x \in C, n > n_0$ ، باستخدام التمهيدية 1.1.2، مع الأخذ بعين الاعتبار أنَّ $h_j = 2^{-j}$

نستنتج أنَّ $x \in C$; $\Delta_n(x) \to 0$ تقريباً في كل مكان على C .

2.2. قابلية جمع المتسلسلة المشتقة لمتسلسلة فورييه والمتسلسلة المرافقة وفق طريقة سيزارو:

إذا كانت $f(x)$ دالة دورية بدورٍ قدره 2π وقابلة للمكاملة وفق ليبيغ. فإنَّ متسلسلة ليبيغ فورييه للدالة $f(x)$ تعطى بالشكل:

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-x)dt \qquad (11,2)$$

و المتسلسلة المشتقة لـ $(11,2)$ تعطى بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n(t-x) dx \qquad (12,2)$$

من المعلوم أنَّه إذا كانت:

$f(x+t)+f(x-t)-2A \to 0$ عندما $t \to 0$، عندئذٍ المتسلسلة $(11,2)$ قابلة للجمع وفق (C,α)إلى العدد A ؛ حيث $\alpha > 0$. هذا الشرط يمكن أن يُعدّل إلى شرط ليبيغ

$\int_0^t \left| f(x+u)+f(x-u)-2A \right| du = o(t)$ عندما $t \to 0$.

وفيما يتعلق بـ$(11,2)$، إذا كان:

$$f(x+t)-f(x-t)-2At = o(t) \qquad (13,2)$$

عندما $t \to 0$، عندئذٍ المتسلسلة $(12,2)$ قابلة للجمع وفق (C,α) و $\alpha > 1$ إلى العدد A. تمَّ تعميم هذه النتيجة من قبل K. K. Chen لتصبح على الشكل الآتي [26]:

$$\int_0^t \left| \frac{f(x+u)-f(x-u)}{u} - 2A \right| du = o(t) \qquad (14,2)$$

عندما $t \to 0$، عندئذٍ المتسلسلة $(12,2)$ قابلة للجمع وفق (C,α) إلى العدد A ؛ حيث $\alpha > 1$. لنفرض أن الدالة $f(x)$ معرفة في جوار النقطة x ، وأنَّه توجد ثوابت $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_r$ بالنسبة للعدد الصغير $|t|$ ؛ حيث:

$$f(x+t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_{r-1} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + (\alpha_r + \varepsilon_t) \frac{t^r}{r!}$$

حيث ε_t تسعى إلى الصفر بالنسبة لـ t ، عندئذٍ نقول إنَّ f تملك مشتقاً معمماً من المرتبة r (مشتق غير متناظر) $f^{(r)}(x)$ بالنسبة لـ x ، و نُعرّف الدالة $f^{(r)}(x) = \alpha_r$ ، يُنسب هذا التعريف إلى بيانو Peano [26]. بالنسبة للتطبيقات على المتسلسلة المثلثية فإنه بإجراء تعديل معين تؤول هذه الطريقة إلى طريقة بواسون. ولكن هذه النتيجة لا تتعلق بكون r عدد فردي أو

زوجي.

لنكتب:

$$\chi(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}$$

$$\psi(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)-f(x-t)\}$$

لنفرض أن r عدد زوجي، و إذا كانت $\beta_0,\beta_2,\beta_4,.....,\beta_r$ ثوابت؛ بحيث إنَّ:

$$\chi(t)=\beta_0+\beta_2\frac{t^2}{2!}+.....+\beta_{r-2}\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}+(\beta_r+\varepsilon_t)\frac{t^r}{r!}$$

حيث ε_t تسعى إلى الصفر بالنسبة لـ t. ندعو β_r المشتق المتناظر المعمم أو ندعوه المشتق المتناظر من االمرتبة r لـ f بالنسبة لـ x .

تعريف المشتق المتناظر من المرتبة r بالنسبة للعدد الصحيح الفردي يكون مشابهاً . نَرمز للمشتق المتناظر بنفس الرمز $f^{(r)}(x)$.

مبرهنة 1.2.2 [26]: إذا كان $\Delta_t^2 f(x)$ الفرق المتناظر الثاني لـ $f(x)$ يُعطى بالشكل:

$$2\varphi(t)=\Delta_t^2 f(x)=f(x+t)-2f(x)+f(x-t)$$

وإذا كان:

$$\int_0^t\left|\frac{\Delta_u^2 f(x)}{u^2}-A\right|du=o(t) \quad \text{عندما} \quad t\to 0 \qquad (15,2)$$

فإنَّ المتسلسلة المشتقة الثانية لمتسلسلة فورييه $(11,2)$ للدالة $f(x)$ تُعطى بالشكل:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n(t-x)dt=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos ntdt$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\}\cos ntdt \qquad (16,2)$$

وتكون قابلة للجمع وفق (C,α) ؛ حيث $\alpha > 2$، إلى القيمة A.

الإثبات:

لنرمز بـ $\sigma_n^\alpha\left(\sum_0^\infty u_k\right)$ إلى الحد النوني لتحويل طريقة سيزارو النونية من المرتبة αالمطبق على المتسلسلة $\sum_{k=0}^\infty u_k$.

من $(16,2)$ والتمهيدية8.1.1 $(\alpha > 2)$، يكون الفرق ، عندما $n \to \infty$، بين تحويل طريقة سيزارو النونية من المرتبة α للمتسلسلة المشتقة الثانية لمتسلسلة فورييه لـ $f(x)$ و Aمُعطى بالشكل:

$$\left.\begin{aligned}
R_n &= \sigma_n^\alpha\left\{-\sum_1^\infty \frac{\nu^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\nu(t-x)dt\right\} - A \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{\Delta_t^2 f(x) - At^2\right\}\sigma_n^\alpha\left(\sum_1^\infty \nu^2 \cos\nu t\right)dt + o(1) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{2\varphi(t) - At^2\right\}\sigma_n^\alpha\left(\sum_1^\infty \nu^2 \cos\nu t\right)dt + o(1) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\right) + o(1) = -\frac{1}{\pi}\left(I_n + J_n + T_n\right) + o(1)
\end{aligned}\right\} \qquad (17,2)$$

باستخدام التمهيدية9.1.1 لأجل $r = 2$، نحصل على:

$$\left|-\sigma_n^\alpha\left(\sum_1^\infty \nu^2 \cos\nu t\right)\right| = \left|\frac{d^2}{dt^2}K_n^\alpha(t)\right| \le \frac{K}{n^{\alpha-2}t^{\alpha+1}} \qquad \left(\frac{1}{n} \le t \le \pi\right) \qquad (18,2)$$

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}K_n^\alpha(t)\right| \le Kn^3 \qquad (0 \le t \le \pi) \qquad (19,2)$$

وبذلك فإنَّ:

$$\left.\begin{aligned}|T_n| &= \left|\int_{\varepsilon}^{\pi}\left[2\varphi(t)-At^2\right]\left\{\frac{d^2}{dt^2}K_n^{\alpha}(t)\right\}dt\right| \le K\int_{\varepsilon}^{\pi}\left|2\varphi(t)-At^2\right|n^{2-\alpha}t^{-\alpha-1}dt \\ &\le Kn^{2-\alpha}\varepsilon^{-(1+\alpha)}\int_0^{\pi}\left|2\varphi(t)-At^2\right|dt \\ &= o(1) \qquad ; n\to\infty \end{aligned}\right\} \qquad (20,2)$$

من $(19,2)$ و $(15,2)$لدينا الفرض:

$$\begin{aligned}|I_n| &= \left|\int_0^{\frac{1}{n}}\left[2\varphi(t)-At^2\right]\left\{\frac{d^2}{dt^2}K_n^{\alpha}(t)\right\}dt\right| \\ &\le Kn^3\int_0^{\frac{1}{n}}\left|2\varphi(t)-At^2\right|dt \\ &\le Kn\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\frac{2\varphi(t)}{t^2}-A\right|dt \\ &= o(1) \qquad ; n\to\infty \end{aligned} \qquad (21,2)$$

لنقدر $|J_n|$: باستخدام التكامل بالتجزئة و $(18,2)$ نجد أنَّ:

$$\left.\begin{aligned}|J_n| &\le Kn^{2-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}\left|\frac{2\varphi(t)}{t^2}-A\right|t^{1-\alpha}dt \\ &\le n^{2-\alpha}\left\{\delta(\varepsilon)\varepsilon^{2-\alpha}+\delta(n)n^{-2+\alpha}\right\}+Kn^{2-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}t^{-\alpha}dt\int_0\left|\frac{2\varphi(u)}{u^2}-A\right|du \\ &\le n^{2-\alpha}\left\{\delta(\varepsilon)\varepsilon^{2-\alpha}+\delta(n)n^{-2+\alpha}\right\}+\delta(\varepsilon)\left\{n^{2-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}t^{1-\alpha}dt\right\} \\ &= o(1) \end{aligned}\right\} \qquad (22,2)$$

وذلك عندما $\varepsilon\to 0$ و $n\to\infty$ ، وبجمع $(17,2),(20,2),(21,2),(22,2)$ نحصل على:

$$R_n = \sigma_n^{\alpha}\left\{-\sum_{1}^{\infty}\frac{\nu^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\ (t)\cos\nu(t-x)dt\right\} - A = o(1)$$

عندما $n \to \infty$ ، وبهذا يكون الإثبات قد تم.

مبرهنة2.2.2 [30] :إذا كان rعدداً فردياً، وإذا وجدت ثوابت $\beta_1, \beta_3, ..., \beta_r$ بحيث إنَّ:

$$\frac{1}{t^{r+1}}\int_0^t \left|\psi(u) - \left(\beta_1 u + \beta_3\frac{u^3}{3!} + ... + \beta_r\frac{u^r}{r!}\right)\right| du = o(1) \qquad (23,2)$$

عندما $t \to 0$؛ حيث $\psi(t) = \left(\frac{1}{2}\right)\{f\ (x+t) - f\ (x-t)\}$ ، فإنَّ المتسلسلة المشتقة من المرتبة r لمتسلسلة فورييه لـ $f\ (x)$ تكون قابلة للجمع وفق (C,α) ؛ حيث $\alpha > r$ إلى β_r.

الإثبات:

إذا كانت $f\ (x)$ كثيرة حدود مثلثية، وبدون أنَّ يؤثر على عمومية المسألة . يمكن أخذ $\beta_1 = \beta_3 = ... = \beta_r = 0$. مجموع سيزارو النوني من المرتبة α للمتسلسلة المشتقة من المرتبة r لـ $(11,2)$ يُعطى بالشكل:

$$\left\{\sigma_n^{\alpha}(x)\right\}^{(r)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\ (x+t)\left\{K_n^{\alpha}(t)\right\}^{(r)} dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\chi(t)\left\{K_n^{\alpha}(t)\right\}^{(r)} dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[I_1 + I_2 + I_3\right]$$

من التمهيدية 9.1.1 و $(23,2)$ نجد أنَّ:

$$|I_1| = O\left(n^{r+1}\right)\int_0^{\frac{1}{n}}|\chi(t)|dt = o(1)$$

عندما $n \to \infty$. من $(11,1)$ وباستخدام التكامل بالتجزئة نجد:

$$|I_2| \le Kn^{r-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} t^{-1-\alpha}|\chi(t)|dt$$

$$\leq n^{r-\alpha}\left\{\delta(\varepsilon)\varepsilon^{r-\alpha}+\delta(n)n^{-(r-\alpha)}+\delta(\varepsilon)\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}t^{r+1-2-\alpha}dt\right\}$$

والتي تسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$ و $\varepsilon\to 0$. من $(11,1)$ في التمهيدية9.1.1 نحصل على:

$$\begin{aligned}|I_3| &\leq \int_{\varepsilon}^{\pi}|\chi(t)|\left|\left\{K_n^{\alpha}(t)\right\}^{(r)}\right|dt\\ &\leq K\int_{\varepsilon}^{\pi}|\chi(t)|n^{r-\alpha}t^{-\alpha-1}dt\\ &\leq Kn^{r-\alpha}\varepsilon^{-\alpha-1}\int_{\varepsilon}^{\pi}|\chi(t)|dt\\ &=o(1)\end{aligned}$$

من أجل ε ثابت اختياري و $n\to\infty$. بجمع العلاقات الثلاثة السابقة نحصل على النتيجة المطلوبة:

$$\left\{\sigma_n^{\alpha}(x)\right\}^{(r)}=o(1)\qquad ;n\to\infty$$

مبرهنة3.2.2 [26] : في المبرهنة1.2.2: الشرط $(15,2)$يُمكن أن يُستبدل بـ:

$$\int_0^t\left\{\frac{\Delta_u^2 f(x)}{u^2}-A\right\}du=o(t)$$
$$\int_0^t\left|\frac{\Delta_u^2 f(x)}{u^2}-A\right|du=O(t)$$

عندما $t\to 0$.

إنَّ إثبات المبرهنة3.2.2 يحتاج فقط إلى أن نُغير قليلاً في إثبات المبرهنة1.2.2.

نُغير $(17,2)$ إلى:

$$R_n=-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{m}{n}}+\int_{\frac{m}{n}}^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi}\right)+o(1)=-\frac{1}{\pi}\left(I_n'+J_n'+T_n\right)+o(1)$$

بما أنَّ $T_n = o(1)$ من المبرهنة 1.2.2.

لاستنتاج I_n'، نضع:

$$\phi(t) = \int_0^t \left\{ \frac{\varphi(u)}{u^2} - A \right\} du$$

عندئذٍ لدينا من $(10,1)$ وباستخدام التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} I_n' &= \int_0^{\frac{m}{n}} \left\{ \frac{2\varphi(t)}{t^2} - A \right\} t^2 \frac{d^2}{dt^2} \left\{ K_n^{\alpha}(t) \right\} dt \\ &= \left[\phi(t) t^2 \frac{d^2}{dt^2} \left\{ K_n^{\alpha}(t) \right\} \right]_0^{\frac{m}{n}} + o\left\{ \int_0^{\frac{m}{n}} \left[t^2 n^3 + t^3 n^4 \right] dt \right\} \\ &= o(1) \end{aligned}$$

وذلك عندما m ثابت اختياري و $n \to \infty$. بقي أن نُعبر عن J_n'. بشكلٍ مشابه لـ $(22,2)$ لدينا:

$$\begin{aligned} \left| J_n' \right| &\le K n^{2-\alpha} \int_{\frac{m}{n}}^{\varepsilon} \left| \frac{2\varphi(t)}{t^2} - A \right| t^{1-\alpha} dt \\ &\le K n^{2-\alpha} \left\{ \varepsilon^{2-\alpha} + \left(\frac{m}{n} \right)^{2-\alpha} \right\} + K n^{2-\alpha} \int_{\frac{m}{n}}^{\varepsilon} t^{-\alpha} dt \int_0^t \left| \frac{2\varphi(u)}{u^2} - A \right| du \\ &\le K m^{2-\alpha} \end{aligned}$$

تسعى إلى الصفر عندما $m \to \infty$. وبهذا نحصل على المطلوب.

3.2. قابلية الجمع المحدودة لمتسلسلات فورييه المضاعفة وفق طريقة سيزارو :

بفرض أنَّ $\phi(u,v) \in L(0,0;\pi,\pi)$ ودورية بدورٍ قدره 2π و

$$\phi(u,v) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \cos mu \cos nv \qquad (24,2)$$

لنرمز بـ $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ لـ $S[\phi]$ ونكتب:

$$\sigma_{mn}^{\alpha,\beta} = \left(A_m^{\alpha} A_n^{\beta}\right)^{-1} \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} A_{m-r}^{\alpha} A_{n-s}^{\beta} a_{rs} = \left(A_m^{\alpha} A_n^{\beta}\right)^{-1} S_{mn}^{\alpha,\beta} \qquad (25,2)$$

حيث $A_m^{\alpha} = \binom{m+\alpha}{m}$

نكتب أيضاً $u^a v^b \phi_{a,b}(u,v)$ من أجل التكامل الكسري من المرتبة (a,b) ؛ حيث $a \geq 0, b \geq 0$ للدالة $\phi(u,v)$، لذلك بشكلٍ خاص $\phi_{0,0}(u,v) = \phi(u,v)$ و

$$\phi_{a,b}(u,v) = abu^{-a}v^{-b}\int_0^u\int_0^v (u-x)^{a-1}(v-y)^{b-1}\phi(x,y)\,dxdy \qquad (26,2)$$

$(a>0, b>0)$

مبرهنة1.3.2 [24]:إذا كان $\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \alpha > a \geq 0, \beta > b \geq 0$ ، وإذا كانت $\phi(u,v) \to s(C;a,b)(R)$ و $\phi_{a,b}(u,v)$ محدودة في $(0,0;\delta,\delta)$ أياً كان العدد الموجب δ فإنَّ $S[\phi]$ قابلة للجمع وفق $(C;\alpha,\beta)(R)$ إلى s .

مبرهنة2.3.2 [24] :إذا كان $a-2 > \alpha \geq 0$, $b-2 > \beta \geq 0$ وكانت $S[\phi]$ قابلة للجمع وفق $(C;\alpha,\beta)(R)$ إلى s وإذا كانت ، من أجل N ، $\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}$ محدودة بحيث إنَّه من أجل $m > N$ و $n > N$فإنَّ: $\phi(u,v) \to s(C;a,b)(R)$ عندما $(u,v) \to (+0,+0)$.

إذا كانت $\{b_{mn}\}$ متتالية مضاعفة معطاة ، ولأجل $\lambda \geq 1$ ، وإذا كان

$$\alpha_{mn}^{(\lambda)} = \begin{cases} d_{mn} & for \quad \lambda^{-1} \leq mn^{-1} \leq \lambda \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

عندئذٍ نُعرّف:

$$\lambda - \sup_{(m,n)} b_{mn} = \sup_{m\geq 0, n\geq 0} d_{mn}^{(\lambda)}$$

$$\lambda - \lim_{(m,n)} b_{mn} = \lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} d_{mn}^{(\lambda)}$$

$$\lambda-\lim_{(m,n)}\sup b_{mn}=\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}\sup d_{mn}^{(\lambda)}$$

بطريقة مشابهة، إذا كانت $f(u,v)$ دالة معطاة، ومعرفة من أجل $u>0,v>0$ ، عندئذٍ من أجل $\lambda\geq 1$ نُعرّف:

$$\lambda-\lim_{(u,v)}f(u,v)=\lim_{(u,v)\to(+0,+0)}g_{\lambda}(u,v)$$

لنأخذ الدالة
$$g_{\lambda}(u,v)=\begin{cases}f(u,v) & ;\ \lambda^{-1}\leq uv^{-1}\leq\lambda\\ 0 & ;\ otherwise\end{cases}$$

ولنُعرّف: $\lambda-\sup_{(u,v)}f(u,v)$ و $\lambda-\lim_{(u,v)}\sup f(u,v)$ بطريقة مشابهة.

لنُعرّف الدوال [24]:

$$K_{\alpha}(m,u)=\frac{1}{2}+\left(A_m^{\alpha}\right)^{-1}\sum_{r=1}^{m}A_{m-r}^{\alpha}\cos ru$$

والتي تحقق الشرط:

$$\left|K_{\alpha}^{(r)}(m,u)\right|\leq\begin{cases}Am^{r+1}\ ;\forall\alpha>r\\ Am^{r+1}\quad\max\left[(mu)^{-r-2}\ ,(mu)^{-\alpha-1}\right]\ ;\forall\alpha\end{cases}\qquad(27,2)$$

من أجل $0\leq u\leq\pi$; $r=0,1,....$; $\alpha>0$ ؛ حيث A مستقل عن m و u . يمكن الحصول عليها بسهولة من $(27,2)$ ؛ حيث $r=0,1,....$ و $m\geq 0$

$$\int_0^{\pi}u^r\left|K_{\alpha}^{(r)}(m,u)\right|du<A\qquad(\alpha>r)\qquad(28,2)$$

حيث A مستقل عن m .

لنفرض أن دوال ينغ Young's [24]مُعرفة بالشكل:

$$\gamma_p(t)=p\int_0^1(1-u)^{p-1}\cos ut\ du\qquad(p>0)$$

حيث $p>0\ ,\ k=0,1,.....;\ n=0,1,.....;\ t\geq 0$

$$\left|\Delta^k \gamma_p(nt)\right| \leq \begin{cases} At^k & ;\forall k>p-1 \\ At^k \max\left[(nt)^{-k-2},(nt)^{-p}\right] & ;\forall k \end{cases} \qquad (29,2)$$

حيث A مستقل عن t,n و Δمؤثر الفرق العادي. تنتج بسهولة من $(29,2)$ لأجل $u>0\ ,\ p>-1$ وتكون:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^p \left|\Delta^{\alpha+1}\gamma_a(mu)\right| < Au^{\alpha-p} \qquad (\alpha>p-2, a>p+1) \qquad (30,2)$$

حيث Aمستقل عن u .

تمهيدية1.3.2 [24]: إذا كان $\alpha>a\geq 0\ ,\beta>b\geq 0$ وإذا كان $0<\delta\leq\pi$ ،عندئذٍ من أجل كل $\lambda\geq 1$ فإنَّ:

$$\lim_{\mu\to\infty}\sup\left\{\lambda-\lim_{(m,n)}\sup\int_0^{\delta} u^a\left|K_\alpha^{(a)}(m,u)\right|du\int_0^{u\mu^{-1}} v^b\left|K_\beta^{(b)}(n,v)\right|dv\right\}=0 \qquad (31,2)$$

الإثبات :

نرمز إلى التكامل في $(31,2)$ بـ J وباختيار $\mu\geq\lambda$ نجد أنَّ:

$$J=\int_0^{m^{-1}}du\int_0^{u\mu^{-1}}dv+\int_{m^{-1}}^{\mu n^{-1}}du\int_0^{u\mu^{-1}}dv+\int_{\mu n^{-1}}^{\delta}du\int_0^{n^{-1}}dv+\int_{\mu n^{-1}}^{\delta}du\int_{n^{-1}}^{u\mu^{-1}}dv=\sum_{r=1}^{4}J_r$$

من $(27,2)$ لدينا:

$$J_1\leq Am^{a+1}n^{b+1}\int_0^{m^{-1}}u^a du\int_0^{u\mu^{-1}}v^b dv=\frac{Am^{a+1}n^{b+1}}{m^{a+b+2}\mu^{b+1}}\leq A\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{b+1}$$

أياً كان $\lambda^{-1}\leq mn^{-1}\leq\lambda$ ، بحيث إنَّ:

$$\lim_{\mu\to\infty}\sup\left(\lambda-\lim_{(m,n)}\sup J_1\right)=0 \qquad (32,2)$$

فيما يلي، باستخدام $(27,2)$ مرة ثانية يكون لدينا:

$$J_2 = An^{b+1}\int_{m^{-1}}^{\mu n^{-1}}\left(m^{-1}u^{-2}+m^{a-\alpha}u^{a-\alpha-1}\right)du\int_0^{u\mu^{-1}} v^b dv$$
$$= \frac{An^{b+1}}{\mu^{b+1}}\left\{m^{-1}\int_{m^{-1}}^{\mu n^{-1}} u^{b-1}du + m^{a-\alpha}\int_{m^{-1}}^{\mu n^{-1}} u^{a+b-\alpha}du\right\}$$
$$= J_{21}+J_{22}$$

في حالة $\lambda^{-1} \le mn^{-1} \le \lambda$

$$J_{21} \le \begin{cases} A\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right), & b \ne 0 \\ A\dfrac{\lambda}{\mu}\log\lambda\mu \ , & b = 0 \end{cases}$$

و

$$J_{22} \le \begin{cases} A\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha-a} + A\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{b+1} , & a+b-\alpha \ne -1 \\ A\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha-a}\log\lambda\mu \ , & a+b-\alpha = -1 \end{cases}$$

لذلك في أيّة حالة يكون لدينا:

$$\lim_{\mu\to\infty}\sup\left(\lambda - \lim_{(m,n)}\sup J_2\right) = 0 \qquad (33,2)$$

وبالتالي من $(27,2)$ نجد:

$$J_3 \le An^{b+1}\int_{\mu n^{-1}}^{\delta}\left(m^{-1}u^{-2}+m^{a-\alpha}u^{a-\alpha-1}\right)du\int_0^{n^{-1}} v^b dv \le A\frac{\lambda}{\mu} + A\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha-a}$$

إذا كان $\lambda^{-1} \le mn^{-1} \le \lambda$ فإنَّ:

$$\lim_{\mu\to\infty}\sup\lambda - \lim_{(m,n)}\sup J_3 = 0 \qquad (34,2)$$

أخيراً من $(27,2)$ نجد أنَّ:

$$J_4 \le A \int_{\mu n^{-1}}^{\infty} \left(m^{-1}u^{-2} + m^{a-\alpha}u^{a-\alpha-1}\right)du \int_{n^{-1}}^{\infty} \left(n^{-1}v^{2} + n^{b-\beta}v^{b-\beta-1}\right)dv \le A\frac{\lambda}{\mu} + A\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha-a}$$

إذا كان $\lambda^{-1} \le mn^{-1} \le \lambda$ فإنَّ:

$$\lim_{\mu\to\infty} \sup\left(\lambda - \lim_{(m,n)} \sup J_4\right) = 0 \qquad (35,2)$$

بجمع $(32,2)$ و $(35,2)$ نحصل على المطلوب.

تمهيدية2.3.2 [24]: إذا كان $b > \beta+1 \ge 1$, $a > \alpha+1 \ge 1$ ،فإنّه من أجل $\lambda \ge 1$ تتحقق العلاقة الآتية:

$$\lim_{\mu\to\infty}\sup\left\{\lambda - \lim_{(u,v)}\sup \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha}\left|\Delta^{\alpha+1}\gamma_a(mu)\right| \sum_{n<m\mu^{-1}} n^{\beta}\left|\Delta^{\beta+1}\gamma_b(nv)\right|\right\} = 0 \qquad (36,2)$$

إنَّ إثبات هذه التمهيدية مماثل تماماً لإثبات التمهيدية1.3.2 وذلك بملاحظة أنَّ المتسلسلة الواردة في $(36,2)$ تكون متقاربة مطلقاً وهذا ينتج من $(29,2)$. بتثبيت $\mathbf{u,v}$ مع الأخذ بعين الاعتبار $u,v > 0$، وليكن مجموع المتسلسلة المفروضة $S(u,v)$.

لنختار $\lambda \ge 1$ بشكل عشوائي ومن ثمَّ نعتبرها كثابت ، ولنأخذ $\mu \ge \lambda$ عندئذٍ نكتب :

$$S(u,v) = \left(\sum_{m=1}^{[u^{-1}]}\sum_{n=1}^{[m\mu^{-1}]} + \sum_{m=[u^{-1}]+1}^{[\mu v^{-1}]}\sum_{n=1}^{[m\mu^{-1}]} + \sum_{m=[\mu v^{-1}]+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{[v^{-1}]} + \sum_{m=[\mu v^{-1}]+1}^{\infty}\sum_{n=[v^{-1}]+1}^{[m\mu^{-1}]}\right)$$

$$\left(m^{\alpha}\left|\Delta^{\alpha+1}\gamma_a(mu)\right| \sum_{n<m\mu^{-1}} n^{\beta}\left|\Delta^{\beta+1}\gamma_b(nv)\right|\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{4} S_r$$

مع الأخذ بعين الاعتبار $(29,2)$ و $(27,2)$ يمكن الحصول على J_r المُعرّفة في إثبات التمهيدية1.3.2 من خلال ذلك يمكن أن نبيّن بأنَّ S_r تحقق العلاقة:

$$S_r \le f_r\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

لأجل العددين الموجبين u,v اللذين يحققان الشرط $\lambda^{-1} \le uv^{-1} \le \lambda$ بحيث إنَّ $f_r\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \to 0$ عندما $\mu \to \infty$ ، وهذا كاف للحصول على $(36,2)$.

إثبات المبرهنة 1.3.2 :

نفرض أنَّ الشروط $\alpha \ge 1, \beta \ge 1, \alpha > a \ge 0, \beta > b \ge 0$ محققة، وبدون أن يؤثر على عمومية المسألة، ولنفرض أنَّ $s = 0$. ولتكن a, b أعداد صحيحة، ومن السهل إظهار أنَّ :

$$\sigma_{mn}^{\alpha,\beta} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\phi(u,v)K_\alpha(m,u)K_\beta(n,v)dudv \qquad (37,2)$$

بتقسيم منطقة التكامل الموجودة على يمين $(37,2)$ إلى المجالات $(0,0;\delta,\delta),(0,\delta;\delta,\pi)$ $(\delta,0;\pi,\delta),(\delta,\delta;\pi,\pi)$ ؛ حيث $(0<\delta<\pi)$ ، عندئذٍ ينتج من التمهيدية 2.1.1 أنَّ التكاملات المقابلة للمجالات $(\delta,0;\pi,\delta),(\delta,\delta;\pi,\pi)$ و $(0,\delta;\delta,\pi)$ لها نهاية صفرية محدودة عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$ وهذا يقتضي أنَّ:

$$\limsup_{\delta\to+0}\lambda - \limsup_{(m,n)}\left|\int_0^{\delta}\int_0^{\delta}\phi(u,v)K_\alpha(m,u)K_\beta(n,v)dudv\right| = 0 \qquad (38,2)$$

لكل $\lambda \ge 1$ ، لنرمز للتكامل الوارد في $(38,2)$ بـ J ، وبالمكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{r=1}^{a}\sum_{s=1}^{b}(-)^{r+s}\delta^{r+s}(r!s!)^{-1}K_\alpha^{(r-1)}(m,\delta)K_\beta^{(s-1)}(n,\delta)\phi_{r,s}(\delta,\delta)\\
&+(-)^{a-1}(a!)^{-1}\sum_{s=1}^{b}(-)^{s-1}\delta^{s}(s!)^{-1}K_\beta^{(s-1)}(n,\delta)\int_0^{\delta}\phi_{a,s}(u,\delta)u^aK_\alpha^{(a)}(u)du\\
&+(-)^{b-1}(b!)^{-1}\sum_{r=1}^{a}(-)^{r-1}\delta^{r}(r!)^{-1}K_\alpha^{(r-1)}(m,\delta)\int_0^{\delta}\phi_{r,b}(\delta,v)v^bK_\beta^{(b)}(v)dv\\
&+(-)^{a+b}(a!b!)^{-1}\int_0^{\delta}\int_0^{\delta}\phi_{a,b}(u,v)u^av^bK_\alpha^{(a)}(m,u)K_\beta^{(b)}(n,v)dudv\\
&=\sum_{r=1}^{4}J_r
\end{aligned}$$

وهذا ينتج مباشرة من $(27,2)$ أنَّه من أجل أي عدد موجب δ ، يكون لدينا:

$$J_1=\sum_{r=1}^{a}\sum_{s=1}^{b}O\left(m^{-1}+m^{r-1-\alpha}\right)O\left(n^{-1}+n^{s-1-\beta}\right)=o(1)$$

عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$.

باستخدام $(27,2)$ مرة ثانية، من أجل أي عدد موجب δ ، يكون لدينا:

$$J_2=\sum_{s=1}^{b}O\left(n^{-1}+n^{s-1-\beta}\right)O\left\{m^{a+1}\int_0^{m^{-1}}\left|\phi_{a,s}(u,\delta)\right|u^a du+\int_{m^{-1}}^{\delta}\left|\phi_{a,s}(u,\delta)\right|\left(m^{-1}u^{-2}+m^{a-\alpha}u^{a-\alpha-1}\right)du\right\}$$
$$=O\left(n^{-1}+n^{b-\beta-1}\right)o(m)=o(1)(R)$$

عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$.

بصورة مماثلة نجد أنَّ $J_3=o(1)(R)$ عندما $(m,n)\to(\infty,\infty)$ من أجل أي عدد موجب δ ، وبالتالي للحصول على $(38,2)$ يكفي تبيان أنَّ:

$$\limsup_{\delta\to+0}\left(\lambda-\limsup_{(m,n)}\left|J_4\right|\right)=0 \qquad (39,2)$$

من أجل العدد الاختياري $\lambda\geq 1$.

لنأخذ العدد $\lambda\geq 1$ بشكل عشوائي ومن ثمَّ نعتبرها كثابت ، وباختيار $\mu>\lambda$ ، نكتب:

$$J_4=\left\{\int_{\substack{0<u<\delta,o<v<\delta\\ \mu^{-1}<uv^{-1}<\mu}}\int du\,dv+\int_0^{\delta}du\int_0^{u\mu^{-1}}dv+\int_0^{\delta}dv\int_0^{v\mu^{-1}}du\right\}=\sum_{r=1}^{\delta}I_r$$

بما أنَّ الدالة $\phi_{a,b}(u,v)$ محدودة في المنطقة $(0,0;\delta,\delta)$ لكل عدد صغير δ ، يمكن إيجاد العدد K بحيث إنَّ:

$$\limsup_{\mu\to\infty}\limsup_{\delta\to+0}\left(\lambda-\lim_{(m,n)}\left|I_2+I_3\right|\right)$$
$$\leq K\limsup_{\mu\to\infty}\left[\lambda-\limsup_{(m,n)}\left\{\int_0^{\pi}du\int_0^{u\mu^{-1}}dv+\int_0^{\pi}dv\int_0^{v\mu^{-1}}du\right\}u^a v^b K_{\alpha}^{(a)}(m,u)K_{\beta}^{(b)}(n,v)\right]=0$$

كما أنَّه من التمهيدية1.3.2 لدينا:

$$\limsup_{\mu\to\infty}\limsup_{\delta\to+0}\left(\lambda-\limsup_{(m,n)}|I_1|\right)\le$$
$$\limsup_{\mu\to\infty}\limsup_{\delta\to+0}\left[\lambda-\limsup_{(m,n)}\left\{\mu-\sup_{0<u\le\delta;0<v\le\delta}\left|\phi_{a,b}(u,v)\right|\int_0^{\pi}u^a\left|K_\alpha^{(a)}(m,u)\right|du\int_0^{\pi}v^b\left|K_\beta^{(b)}(n,v)\right|dv\right\}\right]=0$$

من $(28,2)$ و $\mu-\lim_{(u,v)}\left|\phi_{a,b}(u,v)\right|=0$ ، يكون:

$$\lim_{\mu\to\infty}\limsup_{\delta\to+0}\left(\lambda-\limsup_{(m,n)}|J_4|\right)\le$$
$$\limsup_{\mu\to\infty}\limsup_{\delta\to+0}\left[\lambda-\limsup_{(m,n)}\left\{|I_1|+|I_2+I_3|\right\}\right]=0$$

وبالتالي تنتج العلاقة $(39,2)$، وبهذا يكون إثبات المبرهنة قد تم.

إثبات المبرهنة 2.3.2 : نفرض أنَّ $a-2>\alpha\ge 0, b-2>\beta\ge 0$، بدون أن يؤثر على عمومية المسألة ، نفرض أنَّ $s=0$، ونفرض أيضاً أنَّ α,β أعداد صحيحة ،

بما أنَّ $a\ge 1, b\ge 1$، ينتج أنَّ $(u-x)^{a-1}(v-y)^{b-1}$ دالة ذات تغير محدود على $0\le x\le u, 0\le y\le v$ على الترتيب، وبالتالي من $(24,2)$ لأجل $u>0, v>0$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\phi_{a,b}(u,v)&=abu^{-a}v^{-b}\int_0^u(u-x)^{a-1}dx\int_0^v(v-y)^{b-1}\phi(x,y)dy\\&=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}au^{-a}\int_0^u(u-x)^{a-1}\cos mn\,dx\;bv^{-b}\int_0^v(v-y)^{b-1}\cos xy\,dy\\&=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}\gamma_a(mu)\gamma_b(nv)\end{aligned}$$

وبالتطبيق المتكرر لتمهيدية آبل، نحصل على:

$$\begin{aligned}\phi_{a,b}(u,v)=\lim_{N\to\infty}\Bigg\{&\sum_{m,n=0}^{N}S_{mn}^{\alpha,\beta}\Delta^{\alpha+1}\gamma_a(mu)\Delta^{\beta+1}\gamma_b(nv)\\&+\sum_{m=0}^{N}\sum_{s=0}^{\beta}S_{mN-1}^{\alpha,s}\Delta^{\alpha+1}\gamma_a(mu)\Delta^{s}\gamma_b(Nv)\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{N}\sum_{r=0}^{\alpha} S_{N-1n}^{r,\beta}\Delta^{r}\gamma_{a}\left(Nu\right)\Delta^{\beta+1}\gamma_{b}\left(nv\right)$$
$$\left.+\sum_{r=0}^{\alpha}\sum_{s=0}^{\beta} S_{N-1N-1}^{r,s}\Delta^{r}\gamma_{a}\left(Nu\right)\Delta^{s}\gamma_{b}\left(Nv\right)\right\}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{4}T_{i}$$

بما أنَّ $a_{mn}=o\left(1\right)$ عندما $\left(m,n\right)\to\left(\infty,\infty\right)$ وينتج من هذا أنَّ $S_{mn}^{r,s}=o\left(m^{r+1}n^{s+1}\right)$ عندما $\left(m,n\right)\to\left(\infty,\infty\right)$ لأجل كل $r=0,1,.....\ ,\ s=0,1,.....$، وبالتالي من $\left(29,2\right)$، ومن أجل u,v ثابتين موجبين يكون لدينا:

$$T_{4}=\sum_{r=0}^{\alpha}\sum_{s=0}^{\beta}O\left(N^{r+s+2}\right)O\left(N^{-r-2}+N^{-a}\right)O\left(N^{-s-2}+N^{-b}\right)$$
$$=o\left(1\right)$$

عندما $N\to\infty$.

وبالتالي، بما أنَّ $S_{mN-1}^{\alpha,s}=o\left(m^{\alpha+1}N^{s+1}\right)$، ينتج لدينا باستخدام $\left(29,2\right),\left(30,2\right)$ لأجل الثابتين الموجبين u, v :

$$T_{2}=O\left\{\left(N^{-1}+N^{\beta-b+1}\right)\sum_{m=1}^{N}m^{\alpha}\left|\Delta^{\alpha+1}\gamma_{a}\left(mu\right)\right|\right\}$$
$$=O\left(N^{-1}\right)O\left(1\right)=o\left(1\right)$$

عندما $N\to\infty$.

بصورة مشابهة نجد أنَّ $T_{3}=o\left(1\right)$ عندما $N\to\infty$ من أجل $u>0,v>0$ لدينا:

$$\phi_{a,b}\left(u,v\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}S_{mn}^{\alpha,\beta}\Delta^{\alpha+1}\gamma_{a}\left(mu\right)\Delta^{\beta+1}\gamma_{b}\left(nv\right)$$
$$=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}+\sum_{m=N+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}+\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}+\sum_{m=N+1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}$$
$$=\sum_{r=1}^{4}U_{r}$$

وينتج مباشرة من $\left(29,2\right)$ لأجل كل $N>0$:

$$|U_1| = O\left(u^{\alpha+1} v^{\beta+1} \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} \left|S_{mn}^{\alpha,\beta}\right|\right) = o(1)$$

عندما $(u,v) \to (+0,+0)$.

فيما يلي، بما أنَّ $a_{mn} \to 0$ عندما $m \to \infty$ ولكل $n \geq 0$ ، ينتج أنَّ $S_{mn}^{\alpha,\beta} = o\left(m^{\alpha+1}\right)$ لكل $n = 0,1,.....$ وبالتالي باستخدام $(29,2)$ و $(30,2)$من أجل كل $N > 0$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned} |U_2| &= O\left(v^{\beta+1}\right)\sum_{m=1}^{\infty} o\left(m^{\alpha+1}\right)\left|\Delta^{\alpha+1}\gamma_a(mu)\right| \\ &= O\left(v^{\beta+1}\right) o\left(u^{-1}\right) \\ &= o(1)(R) \end{aligned}$$

عندما $(u,v) \to (+0,+0)$ وهكذا بطريقة مشابهة لما سبق نجد أنَّ $U_3 = o(1)(R)$ عندما $(u,v) \to (+0,+0)$.

وبالتالي لإثبات المبرهنة يكفي أن نبيّن أنَّه من أجل كل $\lambda \geq 1$ ، تكون العلاقة الآتية محققة:

$$\lim_{N\to\infty} \sup\left(\lambda - \lim_{(u,v)} \sup |U_4|\right) = 0 \qquad (40,2)$$

لتحقيق هذا الهدف. يمكن اختيار λ بشكل عشوائي ومن ثم نعتبرها كثابت، وباختيار $\mu > \lambda$ نكتب:

$$\begin{aligned} U_4 &= \left\{ \sum_{\substack{m>N,n>N \\ \mu^{-1} \leq mn^{-1} \leq \mu}} + \sum_{\substack{m>N,n>N \\ mn^{-1} > \mu}} + \sum_{\substack{m>N,n>N \\ mn^{-1} < \mu^{-1}}} \right\} S_{mn}^{\alpha,\beta} \Delta^{\alpha+1}\gamma_a(mu)\Delta^{\beta+1}\gamma_b(nv) \\ &= \sum_{r=1}^{3} V_r \end{aligned}$$

بما أنَّ $\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}$ محدود من أجل m,n كبيرين بقدرٍ كافٍ وبالتالي يوجد K بحيث :

$$\begin{aligned} &\lim_{\mu\to\infty} \sup \lim_{N\to\infty} \sup\left(\lambda - \lim_{(u,v)} \sup |V_2 + V_3|\right) \\ &\leq K \lim_{\mu\to\infty} \sup\left[\lambda - \lim_{(u,v)} \sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n<m\mu^{-1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m<n\mu^{-1}}\right\} m^{\alpha} n^{\beta} \left|\Delta^{\alpha+1}\gamma_a(mu)\right|\left|\Delta^{\beta+1}\gamma_b(nv)\right|\right] = 0 \end{aligned}$$

ومن التمهيدية2.3.2 نجد :

$$\limsup_{\mu\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sup\left(\lambda-\lim_{(u,v)}|V_1|\right)\le$$
$$\limsup_{N\to\infty}\left[\lambda-\lim_{(u,v)}\sup\left\{\lambda-\sup_{m>N,n>N}\left|\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\right|\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha}\left|\Delta^{\alpha+1}\gamma_a(mu)\right|\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}\left|\Delta^{\beta+1}\gamma_b(nv)\right|\right\}\right]=0$$

من $(30,2)$ و $\lambda-\lim_{(m,n)}\left|\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\right|=0$ نجد أنَّ:

$$\limsup_{\mu\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sup\left(\lambda-\lim_{(u,v)}\sup|U_4|\right)$$
$$\le\limsup_{\mu\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\left[\lambda-\lim_{(u,v)}\sup\left\{|V_1|+|V_2+V_3|\right\}\right]=0$$

مثال (6) [24]: وفقاً لمبرهنة متسلسلات فورييه الأحادية التي تكون فيها المتسلسلة $(24,2)$ قابلة للجمع تقريباً في كل مكان في المنطقة $(0,0;\pi,\pi)$ إلى الدالة $\phi(u,v)$ يكون لدينا:

$$abs^{-a}t^{-b}\int_0^s\int_0^t(s-x)^{a-1}(t-y)^{b-1}\phi(u+x,v+y)dxdy\to\phi(u,v)(R)$$

عندما $(s,t)\to(+0,+0)$ تقريباً في كل مكان لكل $(u,v)\in(0,0;\pi,\pi)$.

ومن الجدير بالذكر أن نتوقع $\phi(u,v)\to s(C;a,b)(R)$ تكون كافية لوحدها لاستنتاج المبرهنة1.3.2، وهذا غير صحيح . بمعنى آخر ، الشرط المفروض على $\phi_{a,b}(u,v)$ في المبرهنة1.3.2 لا يمكن أن يُلغى تماماً، وذلك يظهر في المثال الآتي .

مثال (7) [24]: لتكن $\phi(u,v)$ دالة زوجية و دورية بالنسبة لكلا المتغيرين و دورها 2π وبحيث إنَّ:

$$\phi(r\cos\theta,r\sin\theta)=\begin{cases}r^{-2}e^{-\theta r^{-1}} & 0<r<\pi,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & elsewhere\ in\ (0,0;\pi,\pi)\end{cases}$$

يكون من السهل أن يتحقق $\phi(u,v)\in L(0,0;\pi,\pi)$ و $\phi(u,v)\to 0(R)$ عندما $(u,v)\to(+0,+0)$.

بما أنَّ $\phi(u,v)$ موجبة و $\sin^2\frac{mu}{2} \geq \left(\frac{4m^2}{\pi^2}\right)\sin^2\frac{u}{2}$ من أجل $0 < u \leq \frac{1}{2m}$، وبالتالي ينتج أنَّ:

$$\sigma_{mm}^{1,1} > \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{1}{2m}}\int_0^{u}\phi(u,v)\frac{\sin^2\frac{mu}{2}}{m\sin^2\frac{u}{2}}\frac{\sin^2\frac{mv}{2}}{m\sin^2\frac{v}{2}}dudv$$

$$\geq \frac{16m^2}{\pi^6}\int_0^{\frac{1}{2m}} r^{-1}dr\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\theta r^{-1}}d\theta$$

$$= \frac{16m^2}{\pi^6}\int_0^{\frac{1}{2m}}\left(1-e^{\frac{-\pi}{4r}}\right)dr > \frac{8m^2}{\pi^6}\int_0^{\frac{1}{2m}} dr \to \infty$$

عندما $m \to \infty$.

بالنتيجة $\sigma_{mm}^{1,1} \to \infty$ عندما $m \to \infty$ ، أي $S[\phi]$ غير قابلة للجمع وفق $(C;1,1)(R)$ رغم أنَّ $R-\lim_{(u,v)\to(+0,+0)}\phi(u,v)$ موجودة .

4.2. قابلية جمع المتتاليات المضاعفة في المجموعات وفق طريقة سيزارو:

سوف ندرس مفاهيم قابلية الجمع وفق طريقة سيزارو –وجسمان والتقارب الفجوي وفق وجسمان للمتتاليات المضاعفة في المجموعات بالإضافة إلى تحديد العلاقة بينهما .

سنستخدم بعض الرموز في إثبات المبرهنات:

$$k_{ru} = k_r j_u \ , h_{ru} = h_r\bar{h}_u \ , I_{ru} = \{(k,j): k_{r-1} < k \leq k_r \ , \ j_{u-1} < j \leq j_u\} ,$$
$$q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}} , q_u = \frac{j_u}{j_{u-1}}$$

مبرهنة1.4.2 [20]: من أجل أيّة متتاليةٍ فجويةٍ مضاعفةٍ θ، إذا كانت $\liminf_r q_r > 1$ و $\liminf_u q_u > 1$، فإنَّ $[W_2\sigma_1] \subseteq [W_2N_\theta]$.

الإثبات:

لنفرض أنَّ $\liminf_u q_u > 1$ و $\liminf_r q_r > 1$، عندئذٍ يوجد $\lambda,\mu > 0$ بحيث إنَّ:

$q_u \geq 1+\mu \quad , \quad q_r \geq 1+\lambda$ لكل $r,u \geq 1$، أي: $\dfrac{k_r j_u}{h_r \bar{h}_u} \leq \dfrac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda\mu}$

لتكن $A_{kj} \overset{[W_2\sigma_1]}{\rightarrow} A$، نستطيع أن نكتب:

$$\frac{1}{h_r \bar{h}_u} \sum_{k,j \in I_{ru}} \left| d\left(x, A_{kj}\right) - d\left(x, A\right) \right| = \frac{1}{h_r \bar{h}_u} \sum_{i,s=1,1}^{k_r, j_u} \left| d\left(x, A_{is}\right) - d\left(x, A\right) \right|$$
$$- \frac{1}{h_r \bar{h}_u} \sum_{i,s=1,1}^{k_{r-1}, j_{u-1}} \left| d\left(x, A_{is}\right) - d\left(x, A\right) \right|$$

$$= \frac{k_r j_u}{h_r \bar{h}_u} \left(\frac{1}{k_r j_u} \sum_{i,s=1,1}^{k_r, j_u} \left| d\left(x, A_{is}\right) - d\left(x, A\right) \right| \right)$$
$$- \frac{k_{r-1} j_{u-1}}{h_r \bar{h}_u} \left(\frac{1}{k_{r-1} j_{u-1}} \sum_{i,s=1,1}^{k_{r-1}, j_{u-1}} \left| d\left(x, A_{is}\right) - d\left(x, A\right) \right| \right)$$

بما أنَّ $A_{kj} \overset{[W_2\sigma_1]}{\rightarrow} A$، فإنَّ العلاقات الآتية:

$$\frac{1}{k_r j_u} \sum_{i,s=1,1}^{k_r, j_u} \left| d\left(x, A_{is}\right) - d\left(x, A\right) \right| \quad , \quad \frac{1}{k_{r-1} j_{u-1}} \sum_{i,s=1,1}^{k_{r-1}, j_{u-1}} \left| d\left(x, A_{is}\right) - d\left(x, A\right) \right|$$

كلاً منها يسعى إلى الصفر، وينتج أنَّ:

$$\frac{1}{h_r \bar{h}_u} \sum_{k,j \in I_{ru}} \left| d\left(x, A_{kj}\right) - d\left(x, A\right) \right| \rightarrow 0$$

أي أنَّ $A_{kj} \overset{[W_2 N_\theta]}{\rightarrow} A$، وبالتالي $[W_2\sigma_1] \subseteq [W_2 N_\theta]$.

مبرهنة2.4.2 $[20]$: من أجل أيّة متتاليةٍ فجويةٍ مضاعفةٍ θ، إذا كانت $\limsup_r q_r < \infty$ و $\limsup_u q_u < \infty$، فإنَّ $[W_2 N_\theta] \subseteq [W_2\sigma_1]$.

الإثبات:

لنفرض أنَّ $\limsup_r q_r < \infty$ و $\limsup_u q_u < \infty$، عندئذٍ يوجد $M, N > 0$ بحيث إنَّ:

$q_r < M, q_u < N$، لكل r,u، لتكن $\{A_{kj}\} \in [W_2 N_\theta]$ و $\varepsilon > 0$ عدداً ما مُعطى عندئذٍ

نستطيع إيجاد $R,U>0\ ,\ K>0$ بحيث إنَّ:

$$\tau_{is}<K\ \ ,\ \ \sup_{i\geq R,s\geq U}\tau_{is}<\varepsilon \quad \text{لكل} \quad i,s=1,2,.....$$

حيث إنَّ: $\tau_{ru}=\frac{1}{h_r\bar{h}_u}\sum_{I_{ru}}\left|d\left(x,A_{kj}\right)-d\left(x,A\right)\right|$.

إذا كان t,v أعداداً صحيحة، حيث $k_{r-1}<t\leq k_r\ ,\ j_{u-1}<v\leq j_u$ ، و $r>R\ ,u>U$ ، عندئذٍ نستطيع أن نكتب:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{tv}\sum_{i,s=1,1}^{t,v}\left|d\left(x,A_{kj}\right)-d\left(x,A\right)\right|\leq\frac{1}{k_{r-1}j_{u-1}}\sum_{i,s=1,1}^{k_r,j_u}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|\\
&=\frac{1}{k_{r-1}j_{u-1}}\left(\sum_{I_{11}}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|\right.\\
&+\sum_{I_{12}}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|\\
&+\sum_{I_{21}}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|\\
&+\sum_{I_{22}}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|\\
&\left.+.....+\sum_{I_{ru}}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|\right)\\
&\leq\frac{k_1j_1}{k_{r-1}j_{u-1}}\tau_{11}+\frac{k_1\left(j_2-j_1\right)}{k_{r-1}j_{u-1}}\tau_{12}+\frac{\left(k_2-k_1\right)j_1}{k_{r-1}j_{u-1}}\tau_{21}\\
&+\frac{\left(k_2-k_1\right)\left(j_2-j_1\right)}{k_{r-1}j_{u-1}}\tau_{22}+....+\\
&\frac{\left(k_R-k_{R-1}\right)\left(j_U-j_{U-1}\right)}{k_{r-1}j_{u-1}}\tau_{RU}\\
&+.....+\frac{\left(k_r-k_{r-1}\right)\left(j_u-j_{u-1}\right)}{k_{r-1}j_{u-1}}\tau_{ru}\\
&\leq\left(\sup_{i,s\geq1,1}\tau_{is}\right)\frac{k_Rj_U}{k_{r-1}j_{u-1}}+\left(\sup_{i\geq R,s\geq U}\tau_{is}\right)\frac{\left(k_r-k_R\right)\left(j_u-j_U\right)}{k_{r-1}j_{u-1}}\\
&\leq K\ \frac{k_Rj_U}{k_{r-1}j_{u-1}}+\varepsilon MN
\end{aligned}$$

بما أنَّ $k_{r-1},j_{u-1}\to\infty$ عندما $t,v\to\infty$ ، ينتج أنَّ:

$$\frac{1}{tv}\sum_{i,s=1,1}^{t,v}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|\to 0$$

أي أنَّ $\left\{A_{kj}\right\}\in\left[W_2\sigma_1\right]$ وبالتالي $\left[W_2N_\theta\right]\subseteq\left[W_2\sigma_1\right]$.

مبرهنة3.4.2 [20]: من أجل أيّة متتاليةٍ فجويةٍ مضاعفةٍ θ، لتكن $\left\{A_{kj}\right\}\in\left[W_2N_\theta\right]\cap\left[W_2\sigma_1\right]$ إذا كانت $A_{kj}\overset{[W_2N_\theta]}{\to}A\ ,\ A_{kj}\overset{[W_2\sigma_1]}{\to}B$ فإنَّ $A=B$.

الإثبات:

لتكن $A_{kj}\overset{[W_2\sigma_1]}{\to}A\ ,\ A_{kj}\overset{[W_2N_\theta]}{\to}B$ وبفرض أنَّ $A\neq B$، نستطيع أن نكتب:

$$\upsilon_{ru}+\tau_{ru}=\frac{1}{h_r\bar{h}_u}\sum_{k,j\in I_{ru}}\left|d\left(x,A_{kj}\right)-d\left(x,A\right)\right|+\frac{1}{h_r\bar{h}_u}\sum_{k,j\in I_{ru}}\left|d\left(x,A_{kj}\right)-d\left(x,B\right)\right|$$
$$\geq\frac{1}{h_r\bar{h}_u}\sum_{k,j\in I_{ru}}\left|d\left(x,A\right)-d\left(x,B\right)\right|=\left|d\left(x,A\right)-d\left(x,B\right)\right|$$

حيث:

$$\upsilon_{ru}=\frac{1}{h_r\bar{h}_u}\sum_{k,j\in I_{ru}}\left|d\left(x,A_{kj}\right)-d\left(x,A\right)\right|\qquad,\qquad\tau_{ru}=\frac{1}{h_r\bar{h}_u}\sum_{k,j\in I_{ru}}\left|d\left(x,A_{kj}\right)-d\left(x,B\right)\right|$$

إذاً $\tau_{ru}\to 0$ لأنَّ $\left\{A_{kj}\right\}\in\left[W_2N_\theta\right]$ ؛ حيث إنَّ u,r كبيران بقدرٍ كافٍ، الأمر الذي يقضي بأن يكون:

$$\upsilon_{ru}>\frac{1}{2}\left|d\left(x,A\right)-d\left(x,B\right)\right|$$

ومن جهةٍ ثانية، نلاحظ أنَّ:

$$\frac{1}{k_rj_u}\sum_{i,s=1,1}^{k_r,j_u}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|\geq\frac{1}{k_rj_u}\sum_{I_{ru}}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|$$
$$=\frac{\left(k_r-k_{r-1}\right)\left(j_u-j_{u-1}\right)}{k_rj_u}\upsilon_{ru}$$

$$=\left(1-\frac{1}{q_r}\right)\left(1-\frac{1}{q_u}\right)\upsilon_{ru}$$
$$>\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q_r}\right)\left(1-\frac{1}{q_u}\right)\left|d\left(x,A\right)-d\left(x,B\right)\right|$$

من أجل r,u كبيران بقدر كافٍ، إذاً $\left\{A_{kj}\right\}\in\left[W_2\sigma_1\right]$.الطرف الأيسر لهذه المتراجحة أعلاه يتقارب إلى الصفر، لذلك يجب أن يكون لدينا $q_u\to 1$ و $q_r\to 1$. وهذا يعني أنَّه حسب المبرهنة2.4.2 أنَّ $\left[W_2N_\theta\right]\subset\left[W_2\sigma_1\right]$ ، أي:

$$A_{kj}\overset{\left[W_2N_\theta\right]}{\to}B\Rightarrow A_{kj}\overset{\left[W_2\sigma_1\right]}{\to}B$$

لذلك فإنَّ: $\frac{1}{tv}\sum_{i,s=1,1}^{t,v}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,B\right)\right|\to 0$

ومنه نجد أنَّ:

$$\frac{1}{tv}\sum_{i,s=1,1}^{t,v}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,B\right)\right|+\frac{1}{tv}\sum_{i,s=1,1}^{t,v}\left|d\left(x,A_{is}\right)-d\left(x,A\right)\right|\geq\left|d\left(x,A\right)-d\left(x,B\right)\right|>0$$

وهذا يناقض الفرض، وبما أنَّ كلا الحدين في الجهة اليسرى يسعيان إلى الصفر. لكل $x\in X$ يكون لدينا:

$$\left|d\left(x,A\right)-d\left(x,B\right)\right|=0$$

وهذا يؤدي إلى أنَّ $A=B$.

مبرهنة4.4.2 [20]: إذا كانت θ' تكرير فجوي مضاعف للمتتالية المضاعفة الفجوية θ وإذا كانت $\left\{A_{kj}\right\}\notin\left[W_2N_\theta\right]$، فإنَّ $\left\{A_{kj}\right\}\notin\left[W_2N_{\theta'}\right]$.

الإثبات:

لتكن $\left\{A_{kj}\right\}\notin\left[W_2N_\theta\right]$، عندئذٍ بالنسبة لأيّة مجموعةٍ جزئيةٍ مغلقةٍ غير خالية $A\subseteq X$ يوجد $\varepsilon>0$ ومتتالية جزئية $\left(k_{r_n}\right)$ من $\left(k_r\right)$و $\left(j_{u_n}\right)$ من $\left(j_u\right)$ بحيث إنَّ:

$$\tau_{r_n u_n} = \frac{1}{h_{r_n} \bar{h}_{u_n}} \sum_{k,j=1,1}^{k_{r_n}, j_{u_n}} \left| d\left(x, A_{kj}\right) - d\left(x, A\right) \right| \geq \varepsilon$$

لنكتب: $I_{r_n u_n} = I'_{s+1,t+1} \cup I'_{s+1,t+2} \cup I'_{s+2,t+1} \cup I'_{s+2,t+2} \cup ..... \cup I'_{s+p,t+p}$

حيث : $k_{r_{n-1}} = k'_s < k'_{s+1} < ..... < k'_{s+p} = k_{r_n} \quad , \quad j_{u_{n-1}} = j'_t < j'_{t+1} < ..... < j'_{t+p} = j_{u_n}$

عندئذٍ لدينا:

$$\tau_{r_n u_n} = \frac{\sum_{I'_{s+1,t+1}} \left| d\left(x, A_{kj}\right) - d\left(x, A\right) \right| + ... + \sum_{I'_{s+p,t+p}} \left| d\left(x, A_{kj}\right) - d\left(x, A\right) \right|}{h'_{s+1} \bar{h}'_{t+1} + ... + h'_{s+p} \bar{h}'_{t+p}}$$

ينتج ذلك من التمهيدية1.1.1 أنَّ:

$$\frac{1}{h'_{s+p} \bar{h}'_{t+p}} \sum_{I'_{s+p,t+p}} \left| d\left(x, A_{kj}\right) - d\left(x, A\right) \right| \geq \varepsilon$$

لأجل j ، ومنه نجد أنَّ $\left\{A_{kj}\right\} \notin \left[W_2 N_{\theta'}\right]$.

الفصل الثالث

قابلية جمع التكاملات المعتلة المتباعدة وفق طريقة سيزارو

1.3.قابلية جمع التكاملات المعتلة وفق طريقة سيزارو :

لتكن f دالة قابلة للتكامل محلياً بحيث $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ ، إنَّ مؤثر سيزارو يُعرّف من خلال ما يلي:

$$(Cf)(x):=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \quad , \quad x\in(0,\infty)$$

- لتكن $f:[0,\infty)\to E^1$ دالة معتلة مستمرة و $s(t)=\int_0^t f(x)dx$.
- تحويل طريقة سيزارو يُعرّف بالشكل الآتي:

$$\sigma(t)=\frac{1}{t}\int_0^t s(u)du \quad , \quad t\in(0,\infty) \qquad (1,3)$$

- التكامل:

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

قابل للجمع وفق طريقة سيزارو إلى القيمة العددية L إذا كانت $\lim_{t\to\infty}\sigma(t)=L$ ، وندعو هذه النهاية مجموع سيزارو لهذا التكامل.

مبرهنة1.1.3 [8]: إذا كان التكامل $\int_0^\infty f(x)dx$ متقارب إلى القيمة العددية L، فإنَّ $(1,3)$ تتقارب إلى L.

الإثبات:

من أجل $L \in E^1$، إذا كان:

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \int_0^\infty f(x)dx = L$$

إذاً، مقابل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $t_0 > 0$ بحيث إنَّه $D(s(t),L) < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $t \ge t_0$، ويوجد $M > 0$ بحيث إنَّ $D(s(t),L) < M$ لكل $t < t_0$، لذلك لدينا:

$$\begin{aligned}
D(\sigma(t),L) &= D\left(\frac{1}{t}\int_0^t s(u)du, L\right) \\
&= D\left(\frac{1}{t}\int_0^t s(u)du, \frac{1}{t}\int_0^t Ldu\right) \\
&= \frac{1}{t} D\left(\int_0^t s(u)du, \int_0^t Ldu\right) \\
&\le \frac{1}{t}\int_0^t D(s(u),L)du \\
&= \frac{1}{t}\int_0^{t_0} D(s(u),L)du + \frac{1}{t}\int_{t_0}^t D(s(u),L)du \\
&\le \frac{t_0 M}{t} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{(t-t_0)}{t} < \frac{t_0 M}{t} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

بما أنَّ $\lim_{t\to\infty}\frac{t_0 M}{t} = 0$، يوجد $t_1 > 0$ بحيث إنَّه $\left|\frac{t_0 M}{t}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $t \ge t_1$، لذلك يوجد $t_2 = \max\{t_0, t_1\}$ بحيث إنَّه $D(\sigma(t),L) < \varepsilon$ لكل $t \ge t_2$ وبهذا يكتمل الإثبات.

إنَّ عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بشكلٍ عام، ويتضح ذلك من خلال المثال الآتي:

مثال (8) : لنأخذ الدالة المعتلة $f:[0,\infty) \to E^1$ بحيث إنَّه:

$$(f(x))(t) = \begin{cases} (t-\cos x)(x+1)^2, & if \ \cos x \le t \le \cos x + \frac{1}{(1+x)^2} \\ 2-(t-\cos x)(x+1)^2, & if \ \cos x + \frac{1}{(1+x)^2} \le t \le \cos x + \frac{2}{(1+x)^2} \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

عندئذٍ f مستمرة و

$$f_\alpha^-(x)=\cos x+\frac{\alpha}{(x+1)^2} \qquad , \; f_\alpha^+(x)=\cos x+\frac{2-\alpha}{(x+1)^2}$$

$$\int_0^t f_\alpha^-(x)dx=\sin t+\alpha\left(1-\frac{1}{t+1}\right) \; , \int_0^t f_\alpha^+(x)dx=\sin t+(2-\alpha)\left(1-\frac{1}{t+1}\right)$$

من الواضح أنَّ $\int_0^\infty f(x)dx$ متباعد.

بتطبيق طريقة سيزارو مع الأخذ بعين الاعتبار $(1,3)$نحصل على:

$$\sigma_\alpha^-(t)=\frac{1}{t}\int_0^t s_\alpha^-(u)du=\frac{1}{t}\int_0^t\left(\int_0^u f_\alpha^-(x)dx\right)du=-\frac{\cos t}{t}+\frac{1}{t}+\alpha\left(1-\frac{\ln(t+1)}{t}\right)$$

$$\sigma_\alpha^+(t)=\frac{1}{t}\int_0^t s_\alpha^+(u)du=\frac{1}{t}\int_0^t\left(\int_0^u f_\alpha^+(x)dx\right)du=-\frac{\cos t}{t}+\frac{1}{t}+(2-\alpha)\left(1-\frac{\ln(t+1)}{t}\right)$$

ومنه نجد:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to\infty}\sigma_\alpha^-(t)=\alpha\\ \lim\limits_{t\to\infty}\sigma_\alpha^+(t)=2-\alpha\end{array}\right\} \qquad [u]_\alpha=[\alpha,2-\alpha] \text{ و } \lim_{t\to\infty}D\left(\sigma(t),u\right)=0$$

عندئذٍ $\int_0^\infty f(x)dx$ قابل للجمع وفق طريقة سيزارو إلى الدالة u المُعطاة بالشكل:

$$u(t)=\begin{cases} t & if \quad 0\le t\le 1\\ 2-t & if \quad 1\le t\le 2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

تمهيدية1.1.3 [8]: إذا كان التكامل $\int_0^\infty f(x)dx$ قابل للجمع وفق طريقة سيزارو إلى القيمة العددية L، عندئذٍ من أجل $\lambda>1$ يكون لدينا:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda t-t}\int_{t}^{\lambda t}s(x)dx=L \qquad (2,3)$$

ولكل $0<\ell<1$ يكون:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-\ell t}\int_{\ell t}^{t}s(x)dx=L \qquad (3.3)$$

الإثبات:

نعلم أنَّ: ,

$$\frac{1}{\lambda t-t}\int_{t}^{\lambda t}s(x)dx+\frac{1}{\lambda-1}\sigma(t)=\sigma(\lambda t)+\frac{1}{\lambda-1}\sigma(t) \qquad ,\ \lambda>1 \qquad (4,3)$$

و

$$\frac{1}{t-\ell t}\int_{\ell t}^{t}s(x)dx+\frac{\ell}{1-\ell}\sigma(\ell t)=\sigma(t)+\frac{\ell}{1-\ell}\sigma(t) \qquad ,\ 0<\ell<1 \qquad (5,3)$$

بأخذ نهاية الطرفين في المعادلات $(4,3)$و $(5,3)$ عندما $t\to\infty$ نحصل على $(2,3)$و $(3,3)$على الترتيب وبذلك يكتمل الإثبات.

مبرهنة 2.1.3 [10] : لتكن الدالة المعتلة $f:[0,\infty)\to E^1$ مستمرة. إذا كان التكامل $\int_0^\infty f(x)dx$ قابل للجمع وفق طريقة سيزارو إلى القيمة العددية L، فإنَّ الدالة f تتقارب إلى العدد L إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $t_0\geq 0$ و $\lambda>1$ بحيث إنَّه لكل $t>t_0$ تتحقق المتراجحة:

$$\frac{1}{\lambda t-t}\int_{t}^{\lambda t}s(x)dx\geq s(t)-\bar{\varepsilon} \qquad (6,3)$$

ولكل $0<\ell<1$ يكون:

$$\frac{1}{t-\ell t}\int_{\ell t}^{t}s(x)dx\leq s(t)+\bar{\varepsilon} \qquad (7,3)$$

الإثبات:

لزوم الشرط:

بفرض أنَّ التكامل $\int_0^\infty f(x)dx$ متقارب إلى L، وباستخدام المتراجحة الآتية:

$$D\left(\frac{1}{\lambda t-t}\int_t^{\lambda t} s(x)dx, s(t)\right) \le D\left(\frac{1}{\lambda t-t}\int_t^{\lambda t} s(x)dx, L\right) + D\left(L, s(t)\right)$$

مع الأخذ بعين الاعتبار العلاقة $(2,3)$في التمهيدية$1.1.3$، عندئذٍ نحصل على:

$\lim_{t\to\infty} D\left(\frac{1}{\lambda t-t}\int_t^{\lambda t} s(x)dx, s(t)\right)=0$ من أجل $\lambda>1$. من أجل $0<\ell<1$ ، يمكن أن نحصل على $(7,3)$ بشكل مشابه باستخدام $(3,3)$في التمهيدية$1.1.3$.

كفاية الشرط:

لنفرض أنَّ التكامل $\int_0^\infty f(x)dx$ قابل للجمع وفق طريقة سيزارو إلى العدد L و $(6,3)$و $(7,3)$ محققتان. وبالتالي من $(6,3)$ يمكن إيجاد $t_1 \ge 0$ و $\lambda>1$ بحيث انه لكل $t>t_1$يكون:

$$\frac{1}{\lambda t-t}\int_t^{\lambda t} s(x)dx \ge s(t)-\frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

بالإضافة إلى ذلك يكون لدينا:

$$\lim_{t\to\infty} D\left(\frac{1}{\lambda-1}\sigma(t), \frac{1}{\lambda-1}\sigma(\lambda t)\right)=0$$

ويوجد $t_2 \ge 0$ بحيث أنَّه لكل $t>t_2$ يكون لدينا:

$$D\left(\frac{1}{\lambda-1}\sigma(t), \frac{1}{\lambda-1}\sigma(\lambda t)\right) \le \frac{\varepsilon}{3}$$

لذلك من الفقرة (i) في التمهيدية$7.1.1$ نحصل على:

$$\frac{1}{\lambda-1}\sigma(t)-\frac{\bar{\varepsilon}}{3}\le\frac{1}{\lambda-1}\sigma(\lambda t)\le\frac{1}{\lambda-1}\sigma(t)+\frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

أيضاً، بما أنَّ $\lim_{t\to\infty}\sigma(\lambda t)=L$ فإنَّه يوجد $t_3\ge 0$ بحيث إنَّ $D(\sigma(\lambda t),L)\le\frac{\varepsilon}{3}$ لكل $t>t_3$

هذا يعني أنَّ:

$$L-\frac{\bar{\varepsilon}}{3}\le\sigma(\lambda t)\le L+\frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

لو أخذنا بعين الاعتبار المساواة $(4,3)$، فإنَّه يوجد $t_4=\max\{t_1,t_2,t_3\}$ بحيث إنَّه لكل $t>t_4$ تتحقق المتراجحة: $s(t)-\frac{\bar{\varepsilon}}{3}+\frac{1}{\lambda-1}\sigma(t)\le L+\frac{\bar{\varepsilon}}{3}+\frac{1}{\lambda-1}\sigma(t)+\frac{\bar{\varepsilon}}{3}$

لذلك من (v) في التمهيدية7.1.1، لكل $t>t_4$ يكون لدينا:

$$s(t)\le L+\bar{\varepsilon} \qquad (8,3)$$

ومن ناحيةٍ أخرى، إذا اعتبرنا أنَّ الشرط $(7,3)$ والمساواة $(5,3)$والتمهيدية7.1.1 وبطريقة مشابهة لما سبق، نحصل على $t_4^*\ge 0$ ؛ حيث أنَّه لكل $t>t_4^*$ يكون:

$$s(t)\ge L-\bar{\varepsilon} \qquad (9,3)$$

عندئذٍ بجمع المتراجحات $(8,3)$و $(9,3)$ نحصل على المتراجحة:

$$L-\bar{\varepsilon}\le s(t)\le L+\bar{\varepsilon}$$

لكل $t>\max\{t_4,t_4^*\}$، وبهذا إثبات المبرهنة قد تم.

تمهيدية2.1.3 [8]: إذا كانت الدالة المعتلة $s(x)$ متناقصة ببطء عندئذٍ من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $t_0\ge 0$ و $0<\lambda<1$ بحيث إنَّه لأجل كل $t>t_0$، فإنَّ:

$$s(t)\ge s(x)-\bar{\varepsilon} \qquad \forall x\in]\lambda t,t] \qquad (10,3)$$

الإثبات:

تمَّ إثبات هذه التمهيدية بطريقة نقض الفرض.

بفرض أنَّ الدالة المعتلة $s(x)$ متناقصة ببطء، ويوجد $\varepsilon_0 > 0$ لكل $\lambda < 1$ و $t_0 \geq 0$، يمكن إيجاد عدد حقيقي x و $t > t_0$ ؛ بحيث يكون:

$$s(t) \not\geq s(x) - \bar{\varepsilon}_0 \qquad \forall \lambda t < x \leq t \qquad (11,3)$$

لذلك يوجد $\alpha_0 \in [0,1]$ ؛ بحيث يكون:

$$\begin{aligned} & s^-_{\alpha_0}(t) < s^-_{\alpha_0}(x) - \varepsilon_0 \\ & or \\ & s^+_{\alpha_0}(t) < s^+_{\alpha_0}(x) - \varepsilon_0 \end{aligned} \qquad (12,3)$$

وحسب شرط موريس للدالة الحقيقية f المتناقصة ببطء [11] يكون:

$$\lim_{\lambda \to 1^-} \liminf_{t \to \infty} \min_{\lambda t \leq x \leq t} \left[f(t) - f(x) \right] \geq 0 \qquad (13,3)$$

بغض النظر عن الحالة التي نختار فيها $(12,3)$أنَّ إحدى الدوال الحقيقية $s^-_{\alpha_0}(t)$ و $s^+_{\alpha_0}(t)$ لا تُحقق الشرط $(13,3)$، منها لاتتناقص ببطء و هذا يتناقض مع الفرض.

من الواضح أنَّ الدالة $s(x)$ تتناقص ببطء عندئذٍ الشروط $(6,3)$ و $(7,3)$ محققة من خلال (i) و (v) من المبرهنة5.1.1 وبذلك نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة (3) [8]:إذا كانت f دالة معتلة بحيث إنَّ التكامل $\int_0^\infty f(x)dx$ قابل للجمع وفق طريقة سيزارو إلى القيمة العددية L ودالتها التكاملية $s(t)$ تتناقص ببطء، فإنَّ التكامل $\int_0^\infty f(x)dx$ يتقارب إلى L.

مبرهنة3.1.3 [2,8] : لتكن f دالة معتلة مستمرة على $[0,\infty)$ إذا وجد عدد معتل ثابت سالب u وعدد حقيقي $x_0 \geq 0$ بحيث يكون:

$$xf(x) \geq u \qquad \forall x > x_0$$

فإنَّ الدالة المعتلة $s(t)=\int_0^t f(x)dx$ متناقصة ببطء.

الإثبات :

لتكن $xf(x)\geq u$ محققة ضمن الشروط المعطاة على u,x_0 في المبرهنة، عندئذٍ من أجل $x>x_0$ يكون لدينا:

$$xf_\alpha^-(x)\geq u_\alpha^-\geq u_0^-$$
$$xf_\alpha^+(x)\geq u_\alpha^+\geq u_1^+\geq u_0^-$$

للتبسيط نأخذ $u_0^-=-H$، ؛ حيث $H>0$، عندئذٍ:

$$xf_\alpha^-(x)\geq -H\Rightarrow f_\alpha^-(x)\geq\frac{-H}{x}$$
$$xf_\alpha^+(x)\geq -H\Rightarrow f_\alpha^+(x)\geq\frac{-H}{x}$$

محققة. عندئذٍ من أجل $x_0<t<x\leq\lambda t$ و $\lambda>1$ يكون لدينا:

$$s_\alpha^-(x)-s_\alpha^-(t)=\int_t^x f_\alpha^-(u)du\geq -H\int_t^x\frac{du}{u}=-H\ln\frac{x}{t}\geq -H\ln\lambda$$

و

$$s_\alpha^+(x)-s_\alpha^+(t)=\int_t^x f_\alpha^+(u)du\geq -H\int_t^x\frac{du}{u}=-H\ln\frac{x}{t}\geq -H\ln\lambda$$

باختيار $\lambda=e^{\frac{\varepsilon}{H}}$، نحصل على المتراجحات:

$$s_\alpha^-(x)\geq s_\alpha^-(t)-\varepsilon$$
$$s_\alpha^+(x)\geq s_\alpha^+(t)-\varepsilon$$

عندئذٍ $s(x)\geq s(t)-\bar{\varepsilon}$ محققة، أياً كان $x_0<t<x\leq\lambda t$.

مثال (9): لتكن الدالة المعتلة $f:[0,\infty)\to E^1$ معطاة كالآتي:

$$\left(f\left(x\right)\right)\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{t}{2-\sin x} & if \quad 0\le t\le 2-\sin x\\ 2-\dfrac{t}{2-\sin x} & if \quad 2-\sin x\le t\le 2\left(2-\sin x\right)\end{cases}$$

عندئذٍ:

$$f_{\alpha}^{-}\left(x\right)=\left(2-\sin x\right)\alpha$$
$$f_{\alpha}^{+}\left(x\right)=\left(2-\sin x\right)\left(2-\alpha\right)$$

بما أنَّ $f_{\alpha}^{\pm}\left(x\right)\ge 0$ محققة لأي $\alpha\in[0,1]$ و $x>0$، يكون لدينا $xf_{\alpha}^{-}\left(x\right)\ge 0$ و $xf_{\alpha}^{+}\left(x\right)\ge 0$ والتي تعني أنَّ $xf\left(x\right)\ge\overline{0}$، وبالتالي $s\left(t\right)$ متناقصة ببطء.

كنتيجة للمبرهنة3.1.3 ، تمَّ الحصول على شرط توبريان أحادي الجانب الآتي:

نتيجة(4) [8]: إذا كانت f دالة معتلة بحيث إنَّ التكامل $\int_0^{\infty}f\left(x\right)dx$ قابل للجمع وفق طريقة سيزارو إلى القيمة العددية L، والشرط $xf\left(x\right)\ge u \;\; ; \;\; \forall x>x_0$ محقق، فإنَّ التكامل $\int_0^{\infty}f\left(x\right)dx$ يتقارب إلى L.

2.3.قابلية جمع سيزارو وهولدر الدالية:

نفرض أنَّ الدالة $f\left(x\right)$ قابلة للتكامل إلى L في كل مجال محدود $[0,X]$ و $\delta>0$، نُعرّف:

$$g\left(x\right)=e^{x}f\left(x\right) \quad \text{و} \quad f_{\delta}\left(x\right)=\left\{\Gamma\left(\delta\right)\right\}^{-1}\int_0^{x}\left(x-t\right)^{\delta-1}f\left(t\right)dt$$

- إنَّ $f\left(x\right)\to\sigma\left(C,\delta\right)$ إذا وفقط إذا كانت $f\left(e^{x}\right)\to\sigma\left(\hat{C},\delta\right)$. هدفنا الأساسي هو إثبات أنَّه إذا كانت $f\left(x\right)\to\sigma\left(\hat{C},\delta\right)$ فإنَّ $f\left(x\right)\to\sigma\left(C,\delta\right)$، مع ملاحظة أنَّه توجد دالة نهايتها موجودة وفق $\left(C,\delta\right)$ لكن نهايتها وفق $\left(\hat{C},\delta\right)$ غير موجودة.

تمهيدية1.2.3 [14] : إذا كانت $0<\delta\le 1$ و $e^{-x}g_{\delta}\left(x\right)\to\sigma$ عندما $x\to\infty$، فإنَّ:

$\delta x^{-\delta}\int_0^{x}\left(x-t\right)^{\delta-1}e^{-t}g\left(t\right)dt\to\sigma$ عندما $x\to\infty$.

الإثبات :

نفرض أولاً أنَّ $0<\delta<1$، باستخدام نتيجة التمهيدية15.1.1، نجد أنَّ:

$$\int_0^x (x-t)^{\delta-1} e^{-t} g(t)dt - \Gamma(\delta)e^{-x} g_\delta(x)$$
$$= \int_0^x e^{-t}dt \int_0^t (x-u)^{\delta-1} g(u)du$$
$$= \frac{\delta}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^x e^{-t}dt \int_0^t g_\delta(v)dv \int_t^x (x-w)^{\delta-1}(w-v)^{-\delta-1}dw$$
$$= \frac{\delta}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^x e^{-v} g_\delta(v)dv \int_v^x (x-w)^{\delta-1}(w-v)^{-\delta-1}dw \int_v^w e^{-(t-v)}dt$$
$$= \int_0^x J(x-v)e^{-v} g_\delta(v)dv$$

حيث إنَّ:

$$J(y) = \frac{\delta}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^y (y-u)^{\delta-1} u^{-\delta-1}\left(1-e^{-u}\right)du$$

وهي تكفي لنبيّن أنَّ:

$$\delta x^{-\delta} \int_0^x J(x-v)\phi(v)dv \to \sigma$$

على أيّة حال $\phi(x)$ تكون قابلة للمكاملة إلى L في أي مجال محدود $[0,X]$ وتسعى إلى σ عندما $x \to \infty$، هذا صحيح لأنَّ:

$$\delta x^{-\delta} \int_0^x J(x-v)dv = \frac{\delta}{\Gamma(1-\delta)} x^{-\delta} \int_0^x (x-u)^{\delta} u^{-\delta-1}\left(1-e^{-u}\right)du \to \frac{\delta}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^\infty u^{-\delta-1}\left(1-e^{-u}\right)du = 1$$

عندما $x \to \infty$.

وبما أنَّ، لكل ثابت $y > 0$ يكون:

$\delta x^{-\delta}\int_0^y J(x-v)dv \to 0$ عندما $x \to \infty$

بشكلٍ خاص، لأجل $\delta = 1$ نجد أنَّ:

$$x^{-1}\int_0^x e^{-t} g(t)dt - x^{-1}e^{-x} g_1(x) = x^{-1}\int_0^x e^{-t} g_1(t)dt$$

وهذا ينتج من كون $(C,1)$ طريقة نظامية.

لإيجاد العلاقة بين الطريقتين (C,α) و $\left(\hat{C},\alpha\right)$، نثبت المبرهنتين الآتيتين.

مبرهنة1.2.3 [14] : لأجل $\alpha > 0$، إذا كانت $f(x) \to \sigma\left(\hat{C},\alpha\right)$ فإنَّ: $f(x) \to \sigma(C,\alpha)$.

الإثبات :

نفرض أولاً أنَّ $0 < \alpha \le 1$ عندئذٍ يكون:

$$\Gamma(\alpha) f_\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^{-t} g(t)dt$$

هذا ينتج من التمهيدية 1.2.3.

لنفرض الآن أنَّ $\alpha > 1$. لنضع $\alpha = k + \delta$ ؛ حيث $0 < \delta \le 1$ و $k = 1,2,.....$ وبتطبيق طريقة التكامل بالتجزئة k مرة نحصل على:

$$\Gamma(\alpha) f_\alpha(x) = (-1)^k \int_0^x g_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k \left[e^{-t}(x-t)^{\alpha-1}\right]dt$$

$$= a_0\int_0^x g_k(t)e^{-t}(x-t)^{k-1}dt + \sum_{r=1}^{k}\alpha_r\int_0^x g_k(t)e^{-t}(x-t)^{\delta-1+r}dt$$

$$= a_0\int_0^x g_k(t)e^{-t}(x-t)^{\delta-1}dt + \sum_{r=0}^{k-1} b_r\int_0^x g_{k+1}(t)e^{-t}(x-t)^{\delta-1+r}dt + \int_0^x g_{k+1}(t)e^{-t}(x-t)^{\alpha-1}dt$$

حيث a_r, b_r ثوابت.

من الفرضية $e^{-x}g_{\alpha}(x)\to\sigma$ عندما $x\to\infty$، وبما أنَّ $k+1\geq\alpha$، إنَّه من السهل أن نبيّن أنَّ $e^{-x}g_{k+1}(x)\to\sigma$ عندما $x\to\infty$.

حسب التمهيدية 15.1.1 لأجل العدد a_0 وبحكم نظامية طريقة سيزارو لأجل الحدود الأخرى ينتج أنَّ: $\Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}f_{\alpha}(x)\to\sigma$ عندما $x\to\infty$ وبهكذا يكون إثبات المبرهنة 1.2.3 قد تم.

مبرهنة2.2.3 [14]: إذا كانت $\alpha>0$ فإنَّ $e^{ix}\to 0(C,\alpha)$، وتكون نهاية الدالة e^{ix} وفق طريقة $\left(\hat{C},\alpha\right)$ غير موجودة.

الإثبات :

وفقاً لمبرهنة ريمان ليبيغ، لدينا:

$x^{-\alpha}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}e^{it}dt=\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}e^{iux}du\to 0$ عندما $x\to\infty$ لذلك $e^{ix}\to 0(C,\alpha)$. من جهةٍ أخرى:

$$e^{-x}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}e^{t}e^{it}dt=e^{ix}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t(1+i)}dt$$
$$=e^{ix}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t(1+i)}dt+o(1)=\frac{e^{ix}\Gamma(\alpha)}{(1+i)^{\alpha}}+o(1)$$

والتي لا تملك نهاية عندما $x\to\infty$. أي أنَّ نهاية e^{ix} وفق طريقة $\left(\hat{C},\alpha\right)$ غير موجودة.

الفصل الرابع

نظرية **توبريان وتطبيقاتها**

1.4.نظرية **توبريان و قابلية جمع التكاملات وفق طريقة سيزار** :

نفرض أنَّ f دالة ذات قيم حقيقية ومستمرة عل $[0,+\infty[$

ولتكن $s(x)=\int_0^x f(t)dt$.

إنَّ تحويل سيزارو المطبق على الدالة $s(x)$ يُعطى بالعلاقة:

$$\sigma(s(x))=\frac{1}{x}\int_0^x s(t)dt$$

وعلاوة على ذلك إذا كان التكامل:

$$\int_0^\infty f(t)dt$$

قابل للجمع وفق طريقة سيزارو إلى العدد المحدود L إذا كان:

$$\lim_{x\to\infty}\sigma(s(x))=\lim_{x\to\infty}\int_0^x\left(1-\frac{t}{x}\right)f(t)dt=L \qquad (1,4)$$

إذا كان التكامل:

$$\int_0^\infty f(t)dt=L \qquad (2,4)$$

موجوداً، فإنَّ النهاية $(1,4)$ أيضاً موجودة. ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

الآن من أجل الدالة $s(x)=\int_0^x f(t)dt$، لدينا:

$$s(x)-\sigma(s(x))=v(x) \qquad (3,4)$$

والتي تُدعى متطابقة كرونيكر Kronecker.

حيث إنَّ:

$$v(f(x))=\frac{1}{x}\int_0^x t f(t)dt$$

نُلاحظ أن:

$$\sigma'(s(x))=\frac{v(f(x))}{x}$$

لنُعرّف $\sigma_k(s(x))$، من أجل أي عدد صحيح موجب k بالشكل:

$$\sigma_k(s(x))=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x \sigma_{k-1}(s(t))dt & ;k\geq 1\\ s(x) & ;k=0\end{cases}$$

نُلاحظ أنَّ $\sigma_1(s(x))=\sigma(s(x))$

إنَّ طريقة بواسون لـ $\int_0^x f(t)dt$ يمكن تعريفها بالشكل:

$$\tau(s(x))=\frac{1}{x(\lambda-1)}\int_x^{\lambda x} s(t)dt \qquad ,\lambda>1$$

$$\tau(s(x))=\frac{1}{x-\lambda x}\int_{\lambda x}^{x} s(t)dt \qquad ,0<\lambda<1$$

مع العلم أنَّ الدالة الحقيقية $s(x)=\int_0^x f(t)dt$ تتذبذب ببطء على منحني ما ، إذا كان[13]:

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{x\to\infty}\max_{x\le t\le \lambda x}\left|s(t)-s(x)\right|=0 \qquad (4,4)$$

فإنه يمكن أن نُعبر عنها أيضاً بالشكل:

$$\lim_{\lambda\to 1^-}\limsup_{x\to\infty}\max_{\lambda x\le t\le x}\left|s(t)-s(x)\right|=0 \qquad (5,4)$$

لأجل متسلسلة الأعداد الحقيقية.

مبرهنـــة1.1.4 [10]: إذا كانـت $s(x)$ قابلـة للجمـع وفـق طريقـة سـيزارو إلـى s، و $s(x)$ متذبذبة ببطء، فإنَّ: $\lim_{x\to\infty}s(x)=s$

لإثبات صحة هذه المبرهنة نحتاج التمهيديات الآتية:

تمهيديـــة1.1.4 [10]: الدالـة $s(x)$ متذبذبـة بـبطء إذا وفقـط إذا كانـت $v(x)$ متذبذبـة بـبطء ومحدودة.

الإثبات:

لزوم الشرط:

بفرض أنَّ $s(x)$ متذبذبة ببطء، لنبيّن أولاً أنَّ:

$v\left(f(x)\right)=o(1)$ عندما $x\to\infty$

ومن الواضح أنَّ:

$$\int_0^x uf(u)du=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\frac{x}{2^{j+1}}}^{\frac{x}{2^j}} uf(u)du$$

والتي تنتج من المتطابقة:

$$\int_{\alpha}^{\beta} uf(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} us'(u)du = \left[us(u)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} s(u)du$$
$$= -\int_{\alpha}^{\beta} s(u)du + \beta s(\beta) - \alpha s(\alpha) - \alpha s(\beta) + \alpha s(\beta)$$
$$= -\int_{\alpha}^{\beta} s(u)du + (\beta-\alpha)s(\beta) + \alpha\left(s(\beta)-s(\alpha)\right)$$
$$= -\int_{\alpha}^{\beta} \left(s(u)-s(\beta)\right)du + \alpha\left(s(\beta)-s(\alpha)\right)$$

وبالتالي:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} uf(u)du\right| \le (\beta-\alpha)\max_{\alpha\le x\le\beta}\left|s(x)-s(\beta)\right| + \alpha\left|s(\beta)-s(\alpha)\right| \le \beta\max_{\alpha\le x\le\beta}\left|s(x)-s(\beta)\right|$$

وبأخذ $\beta = \frac{x}{2^j}$ و $\frac{\beta}{\alpha} \le 2$ نحصل على:

$$\left|\int_{0}^{x} uf(u)du\right| \le k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x}{2^j} = o(x)$$ عندما $x \to \infty$.

لنبيّن الآن أنَّ $\sigma\left(s(x)\right)$ متذبذبة ببطء، بما أنَّ $\sigma'\left(s(x)\right) = \frac{v(f(x))}{x}$ فإنَّ:

$$\left|\sigma\left(s(t)\right)-\sigma\left(s(x)\right)\right| = \left|\int_{x}^{t}\sigma'\left(s(u)\right)du\right|$$
$$= \left|\int_{x}^{t} f(u)du\right| \le c\int_{x}^{t}\frac{du}{u} = c\log\frac{t}{x}$$

لكل $x \le t \le \lambda x$ ومنه نستنتج أنَّ $\max_{x\le t\le\lambda x}\left|\sigma\left(s(t)\right)-\sigma\left(s(x)\right)\right| \le c\log\lambda$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما $\lambda \to 1^+$ نحصل على:

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{x\to\infty}\max_{x\le t\le\lambda x}\left|\sigma\left(s(t)\right)-\sigma\left(s(x)\right)\right| = 0$$

حسب $(3,4)$ نجد أنَّ $v(x)$ متذبذبة ببطء.

كفاية الشرط:

نفـرض أن $v(x)$ محـدودة ومتذبذبـة بـبطء، مـن الواضـح أنَّ محدوديـة $v(x)$ تضـمن التذبـذب البطـيء لـ $\sigma(s(x))$. ومـن جهـةٍ أخـرى، بمـا أنَّ $v(x)$ متذبذبـة بـبطء نجـد حسـب (3,4) أنَّ $s(x)$ متذبذبة ببطء أيضاً.

يُعبر عن الفرق $s(x)-\sigma(s(x))$ من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية2.1.4 [13]:

(i) إذا كان $\lambda > 1$ فإنَّ:

$$s(x)-\sigma(s(\lambda x))=\frac{1}{\lambda-1}\left(\sigma(s(\lambda x))-\sigma(s(x))\right)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_{x}^{\lambda x}\left(s(t)-s(x)\right)dt$$

(ii) إذا كان $0<\lambda<1$ فإنَّ:

$$s(x)-\sigma(s(\lambda x))=\frac{1}{1-\lambda}\left(\sigma(s(x))-\sigma(s(\lambda x))\right)+\frac{1}{x-\lambda x}\int_{\lambda x}^{x}\left(s(x)-s(t)\right)dt$$

الإثبات:

(i) من تعريف طريقة بواسون لـ $s(x)$، لدينا:

$$\tau(s(x))=\frac{1}{\lambda x-x}\int_{x}^{\lambda x}s(t)dt=\frac{1}{x(\lambda-1)}\left(\int_{0}^{\lambda x}s(t)dt-\int_{0}^{x}s(t)dt\right)$$

من أجل $\lambda > 1$:

وبما أنَّ $\sigma(s(\lambda x))=\frac{1}{\lambda x}\int_{0}^{\lambda x}s(t)dt$ و $\sigma(s(x))=\frac{1}{x}\int_{0}^{x}s(t)dt$ نحصل على:

$$\begin{aligned}\tau(s(x))&=\frac{\lambda}{\lambda-1}\sigma(s(\lambda x))-\frac{1}{\lambda-1}\sigma(s(x))\\&=\left(1+\frac{1}{\lambda-1}\right)\sigma(s(\lambda x))-\frac{1}{\lambda-1}\sigma(x)\end{aligned}$$

وبالتالي الفرق $\tau(s(x))-\sigma(s(\lambda x))$، يمكن أنَّ يُكتب كالآتي:

$$\tau\left(s\left(x\right)\right)-\sigma\left(s\left(\lambda x\right)\right)=\frac{1}{\lambda-1}\sigma\left(s\left(\lambda x\right)\right)-\frac{1}{\lambda-1}\sigma\left(s\left(x\right)\right) \qquad (6,4)$$

وبطرح $\sigma\left(s\left(\lambda x\right)\right)$ من المتطابقة:

$$s\left(x\right)=\tau\left(x\right)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_{x}^{\lambda x}\left(s\left(t\right)-s\left(x\right)\right)dt$$

نحصل على:

$$s\left(x\right)-\sigma\left(s\left(\lambda x\right)\right)=\left(\tau\left(x\right)-\sigma\left(s\left(\lambda x\right)\right)\right)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_{x}^{\lambda x}\left(s\left(t\right)-s\left(x\right)\right)dt$$

باستخدام المتطابقة $(6,4)$، يكون لدينا:

$$s\left(x\right)-\sigma\left(s\left(\lambda x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda-1}\left(\sigma\left(s\left(\lambda x\right)\right)-\sigma\left(s\left(x\right)\right)\right)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_{x}^{\lambda x}\left(s\left(t\right)-s\left(x\right)\right)dt$$

وبذلك يكتمل الإثبات.

(ii) إثبات (ii) مشابه تماماً لإثبات (i).

ننتقل الآن إلى إثبات المبرهنة1.1.4:

الإثبات:

بما أنَّ $s\left(x\right)$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى s عندئذٍ تكون $\sigma\left(s\left(x\right)\right)$ أيضاً قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى s . إذاً، ينتج من $(3,4)$ أنَّ $v\left(x\right)$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى الصفر. و ينتج من التمهيدية1.1.4 أنَّ $v\left(x\right)$ متذبذبة ببطء، وفق التمهيدية (i)2.1.4، يكون:

$$v\left(x\right)-\sigma\left(v\left(\lambda x\right)\right)=\frac{1}{\lambda-1}\left(\sigma\left(v\left(\lambda x\right)\right)-\sigma\left(v\left(x\right)\right)\right)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_{x}^{\lambda x}\left(v\left(t\right)-v\left(x\right)\right)dt$$

ومن العلاقة الأخيرة نجد أنَّ:

$$\left|v\left(x\right)-\sigma\left(v\left(x\right)\right)\right|\leq\frac{1}{\lambda-1}\left|\sigma\left(v\left(\lambda x\right)\right)-\sigma\left(v\left(x\right)\right)\right|+\max_{x\leq t\leq\lambda x}\left|v\left(t\right)-v\left(x\right)\right| \qquad (7,4)$$

بأخذ $\lim\sup$ لطرفي العلاقة الأخيرة عندما $x\to\infty$، نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty}\sup\left|v(x)-\sigma(v(x))\right|\le\frac{1}{\lambda-1}\lim_{x\to\infty}\sup\left|\sigma(v(\lambda x))-\sigma(v(x))\right|+\lim_{x\to\infty}\sup\max_{x\le t\le\lambda x}\left|v(t)-v(x)\right|$$

بما أنَّ $\sigma(v(x))$ متقاربة. الحد الأول من الطرف الأيمن للعلاقة السابقة يؤول إلى الصفر وتصبح بالشكل:

$$\lim_{x\to\infty}\sup\left|v(x)-\sigma(v(x))\right|\le\lim_{x\to\infty}\sup\max_{x\le t\le\lambda x}\left|v(t)-v(x)\right|$$

بجعل $\lambda\to1^+$ في هذه العلاقة فيكون لدينا $\lim_{x\to\infty}\sup\left|v(x)-\sigma(v(x))\right|\le0$

وهذا يقتضي بأنَّ $v(x)=o(1)$ عندما $x\to\infty$، بما أنَّ $s(x)$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى s و $v(x)=o(1)$ عندما $x\to\infty$، وبالتالي نجد أنَّ $\lim_{x\to\infty}s(x)=s$، وبهذا يكتمل الإثبات.

نُلاحظ أنَّ المبرهنة 1.1.4 يمكن إثباتها بشكل مشابه باستخدام $(5,4)$ المكافئة لـ$(4,4)$ والتمهيدية (ii) 2.1.4.

مبرهنة 2.1.4 [13]: إذا كانت $s(x)$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى s و كان $p(x)f(x)=O(p'(x))$ عندما $x\to\infty$ ؛ حيث:

$$\lim_{\lambda\to1^+}\lim_{x\to\infty}\sup\frac{p(\lambda x)}{p(x)}=1$$

فإنَّ: $\lim_{x\to\infty}s(x)=s$.

الإثبات :

أياً كان $x\le t\le\lambda x$ نجد:

$$\left|s(t)-s(x)\right|=\left|\int_x^t f(u)du\right|\le c\int_x^t\frac{p'(u)}{p(u)}du=c\log\frac{p(t)}{p(x)}$$

و نستنتج أنَّ:

$$\lim_{x\to\infty}\sup\max_{x\le t\le\lambda x}\left|s(t)-s(x)\right|\le c\log\lim_{x\to\infty}\sup\frac{p(\lambda x)}{p(x)}$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما $\lambda\to1^+$، نحصل على:

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{x\to\infty}\max_{x\le t\le\lambda x}\left|s(t)-s(x)\right|=0$$

أي أنّ $s(x)$ متذبذبة ببطء.

نتيجـــة (5) [13]: إذا كانـت $s(x)$ قابلـة للجمـع وفـق طريقـة سـيزارو إلـى s وكـان $xf(x)=O(1)$ عندما $x\to\infty$، فإنَّ: $\lim_{x\to\infty}s(x)=s$.

الإثبات :

بوضع $p(x)=x$ في المبرهنة3.1.4 ينتج المطلوب.

لنبـيّن أنَّ التذبـذب البطـيء للدالـة $v(x)$ يكـون أيضـاً شـرط توبريـان بالنسـبة لقابليـة جمـع التكاملات المعتلة وفق طريقة سيزارو.

مبرهنـــة3.1.4 [13]: إذا كانـت $s(x)$ قابلـة للجمـع وفـق طريقـة سـيزارو إلـى s و $v(x)$ متذبذبة ببطء، فإنَّ $\lim_{x\to\infty}s(x)=s$.

الإثبات:

بما أنَّ $s(x)$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى s، عندئذٍ تكون $\sigma(s(x))$ أيضاً قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى s. وينتج من (3,4) أنَّ $v(x)$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى الصفر، وباستخدام المتطابقة (3,4) يكون لدينا $v(v(x))$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى الصفر، ومن التمهيدية $2.1.4(i)$ يكون لدينا:

$$v(v(x))-\sigma(v(v(\lambda x)))=\frac{1}{\lambda-1}\left(\sigma(v(v(\lambda x)))-\sigma(v(v(x)))\right)$$
$$-\frac{1}{\lambda x-x}\int_x^{\lambda x}\left(v(v(t))-v(v(x))\right)dt$$

ومن العلاقة الأخيرة يكون:

$$\left|v(v(x))-\sigma(v(v(x)))\right|\le\frac{1}{\lambda-1}\left|\sigma(v(v(\lambda x)))-\sigma(v(v(x)))\right|$$
$$+\max_{x\le t\le\lambda x}\left|v(v(t))-v(v(x))\right|$$

بأخذ $\limsup$ للطرفين في العلاقة السابقة عندما $x\to\infty$ نجد:

$$\limsup_{x\to\infty}\left|v(v(x))-\sigma(v(v(x)))\right|\le\frac{1}{\lambda-1}\limsup_{x\to\infty}\left|\sigma(v(v(\lambda x)))-\sigma(v(v(x)))\right|$$

$$+\lim_{x\to\infty}\sup\max_{x\le t\le\lambda x}\left|v\left(v\left(t\right)\right)-v\left(v\left(x\right)\right)\right|$$

بمـا أنَّ $\sigma\left(v\left(v\left(x\right)\right)\right)$ متقاربـة. فـإنَّ الحـد الأول مـن الطـرف الأيمـن لهـذه العلاقـة يـؤول إلى الصفر وتصبح بالشكل:

$$\lim_{x\to\infty}\sup\left|v\left(v\left(x\right)\right)-\sigma\left(v\left(v\left(x\right)\right)\right)\right|$$
$$\le\lim_{x\to\infty}\sup\max_{x\le t\le\lambda x}\left|v\left(v\left(t\right)\right)-v\left(v\left(x\right)\right)\right|$$

وبجعل $\lambda\to1^{+}$ نجد:

$$\lim_{x\to\infty}\sup\left|v\left(v\left(x\right)\right)-\sigma\left(v\left(v\left(x\right)\right)\right)\right|\le0$$

وهذا يقتضي بأنَّ $v\left(v\left(x\right)\right)=o\left(1\right)$ عندما $x\to\infty$.

مـن المتطابقـة $v\left(x\right)-\sigma\left(v\left(x\right)\right)=v\left(v\left(x\right)\right)$، نحصـل علـى $v\left(x\right)=o\left(1\right)$ بمـا أنَّ $s\left(x\right)$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى s و $v\left(x\right)=o\left(1\right)$ عندما $x\to\infty$ نجد أنَّ: $\lim_{x\to\infty}s\left(x\right)=s$ وبهذا يكون إثبات المبرهنة قد تم .

4 .2. نظرية توبريان و قابلية الجمع الموزون :

لـتكن $u=\left(u_n\right)$ متتاليـة حقيقيـة. تُعـرّف وحـدة قيـاس الـتحكم الكلاسـيكية لسـلوك التذبـذب لـ $\left(u_n\right)$ بالعلاقة: $w_n^{(0)}\left(u\right)=n\Delta u_n=n\left(u_n-u_{n-1}\right)$.

تُعطى وحدة قياس التحكم العام لسلوك التذبذب من المرتبة الأولى لـ$\left(u_n\right)$كالآتي:

$$w_n^{(1)}\left(u\right)=w_n^{(0)}\left(u\right)-\sigma_n^{(1)}\left(w_n^{(0)}\left(u\right)\right)$$

حيث:

$$\sigma_n^{(1)}\left(u\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k$$

والمتطابقة:

$$u_n-\sigma_n^{(1)}\left(u\right)=V_n^{(0)}\Delta u$$

حيث $V_n^{(0)}\Delta u=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k\,\Delta u_k$

المعروفة بمتطابقة كرونيكر.

في هذه الحالة التعاريف المذكورة سابقاً تنتج من العبارة الآتية:

$$w_{n,p}^{(1)}(u)=w_{n,p}^{(0)}(u)-\sigma_{n,p}^{(1)}\left(w_{n,p}^{(0)}(u)\right)$$

حيث $\sigma_{n,p}^{(1)}(u)=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k\frac{1}{k+1}\sum_{v=0}^{k}u_v$.

مبرهنة1.2.4 [14]: إذا كانت:

$$\lim_{n}\inf\frac{P_{t_n}}{P_n}>1 \quad ,t>1 \qquad (8,4)$$

حيث $[t.n]$ تشير إلى الجزء الصحيح للعدد t_n لكل $n\in\mathrm{N}$، ولتكن (x_k) متتالية حقيقية تتقارب إلى L وفق طريقة قابلية الجمع (N,P_n) $(C,1)$.

عندئذٍ (x_k) متقاربة إلى نفس العدد L إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

$$\sup_{t>1}\lim_{n}\inf\frac{1}{P_{t_n}-P_n}\sum_{j=n+1}^{t_n}p_j\frac{1}{j+1}\sum_{v=0}^{j}(x_v-x_n)\geq 0 \qquad (9,4)$$

و

$$\sup_{0<t<1}\lim_{n}\inf\frac{1}{P_n-P_{t_n}}\sum_{j=t_n+1}^{n}p_j\frac{1}{j+1}\sum_{v=0}^{j}(x_n-x_v)\geq 0 \qquad (10,4)$$

للإثبات نحتاج إلى التمهيدية الآتية:

تمهيدية1.2.4 [3]: بفرض أنَّ العلاقة $(8,4)$ محققة ولتكن $x=(x_k)$ متتالية عقدية قابلة للجمع وفق نيورلند إلى L. عندئذٍ:

$$\lim_{n}\frac{1}{P_{t_n}-P_n}\sum_{j=n+1}^{t_n}p_j\frac{1}{j+1}\sum_{v=0}^{j}x_j=L \qquad ;t>1 \qquad (11,4)$$

و

$$\lim_{n} \frac{1}{P_n - P_{t_n}} \sum_{j=t_n+1}^{n} p_j \frac{1}{j+1} \sum_{v=0}^{j} x_j = L \qquad ; 0 < t < 1 \qquad (12,4)$$

الإثبات :

نميز عدة حالات:

(1) لأجل $t > 1$ ، نحصل على:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_{t_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{t_n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v \\
&= \frac{P_{t_n}}{P_{t_n} - P_n} \frac{1}{P_{t_n}} \sum_{k=0}^{t_n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v - \frac{P_n}{P_{t_n} - P_n} \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v \\
&= \frac{1}{P_{t_n}} \sum_{k=0}^{t_n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v + \frac{P_n}{P_{t_n} - P_n} \left[\frac{1}{P_{t_n}} \sum_{k=0}^{t_n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v - \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v \right] \qquad (13,4)
\end{aligned}$$

و من $(8,4)$نجد :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{P_n}{P_{t_n} - P_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \inf \frac{P_{t_n}}{P_n} - 1} < \infty$$

و العلاقة $(11,4)$تنتج من العلاقة $(13,4)$وذلك بفرض أنَّ التقارب وفق طريقة $N_n^p C_n^1$.

(2) عندما $0 < t < 1$ ، لدينا :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_n - P_{t_n}} \sum_{k=t_n+1}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v \\
&= \frac{P_n}{P_n - P_{t_n}} \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v - \frac{P_{t_n}}{P_n - P_{t_n}} \frac{1}{P_{t_n}} \sum_{k=0}^{t_n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v \\
&= \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v + \frac{P_n}{P_n - P_{t_n}} \left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v - \frac{1}{P_{t_n}} \sum_{k=0}^{t_n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v \right] \qquad (14,4)
\end{aligned}$$

و العلاقة $(12,4)$تنتج من $(14,4)$والتمهيدية $16.1.1$ وذلك بفرض أنَّ التقارب وفق طريقة

$N_n^p C_n^1$.

إثبات المبرهنة $1.2.4$:

لزوم الشرط:

لنفـــــرض أنَّ $\lim_k x_k = L$ و $\lim_n N_n^p C_n^1(x) = L$، لأجـــــل $t > 1$ ينـــــتج مـــــن التمهيدية1.2.4 أنَّ:

$$\lim_n \frac{1}{P_{t_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{t_n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} (x_v - x_n)$$
$$= \lim_n \left\{ \left(\frac{1}{P_{t_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{t_n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v \right) - x_n \right\} = 0$$

في حالة $0 < t < 1$، نجد أنَّ:

$$\lim_n \frac{1}{P_n - P_{t_n}} \sum_{k=t_n+1}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} (x_n - x_v)$$
$$= \lim_n \left\{ x_n - \left(\frac{1}{P_n - P_{t_n}} \sum_{k=t_n+1}^{n} p_k \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} x_v \right) \right\} = 0$$

كفاية الشرط:

نفرض أنَّ الشرطين $(9,4)$و $(10,4)$ محققين.

ولنثبـــت أنَّ $\lim_n x_n = L$، لأجـــل كـــل $\varepsilon > 0$، فإنَّـــه مـــن العلاقـــة $(9,4)$ يمكـــن أن نختـــار $t_1 > 0$ بحيث إنَّه:

$$\liminf_n \frac{1}{P_{t_{n_1}} - P_n} \sum_{j=n+1}^{t_{n_1}} p_j \frac{1}{j+1} \sum_{v=0}^{j} (x_v - x_n) \geq -\varepsilon \qquad (15,4)$$

حيث $t_{n_1} = [t_1.n]$.

مـــن خـــلال قابليـــة الجمـــع المفروضـــة $N_n^p C_n^1$ لـــ (x_n)، لكـــل $t > 1$ و لـــو أخـــذنا بعـــين الاعتبار العلاقة $(15,4)$ ، نحصل على:

$$\limsup_n x_n \leq L + \varepsilon \qquad (16,4)$$

مــن ناحيــةٍ أخــرى، إذا كانــت $0<t<1$ فإنَّــه لكــل $\varepsilon>0$ يمكــن أن نختــار $0<t_2<1$ بحيث يكون:

$$\lim_{n}\inf \frac{1}{P_n-P_{t_{n_2}}}\sum_{j=t_{n_2}+1}^{n} p_j \frac{1}{j+1}\sum_{v=0}^{j}\left(x_n-x_j\right)\geq -\varepsilon$$

حيث $t_{n_2}=\left[t_2.n\right]$.

مــن خــلال قابليــة الجمــع المفروضــة $N_n^p C_n^1$ لــ (x_n)، لأجــل $0<t<1$ والعلاقــة الســابقة، نحصل على:

$$\lim_{n}\inf\ x_n\geq L-\varepsilon \qquad (17,4)$$

بحكـــم اختياريـــة العـــدد $\varepsilon>0$، و بجمـــع العلاقتـــين $(16,4)$ و $(17,4)$ ينـــتج أنَّ $\lim_{n} x_n=L$

وبهذا يكون إثبات المبرهنة قد تم.

مبرهنـــــة2.2.4 [3,14]: لنفــرض أنَّ العلاقــة $(8,4)$ محققــة و $\{x_n\}$ متتاليــة عقديــة والتــي تكــون قابلــة للجمــع وفــق $N_n^p C_n^1$ إلــىL، عندئــذٍ $\{x_n\}$ تتقــارب إلــى العــددL إذا وفقــط إذا كان الشرطان الآتيان محققين:

$$\inf_{t>1}\lim_{n}\sup\left|\frac{1}{P_{t_n}-P_n}\sum_{j=n+1}^{t_n} p_k \frac{1}{j+1}\sum_{v=0}^{j}\left(x_v-x_n\right)\right|=0 \qquad (18,4)$$

و

$$\inf_{0<t<1}\lim_{n}\sup\left|\frac{1}{P_n-P_{t_n}}\sum_{j=t_n+1}^{n} p_k \frac{1}{j+1}\sum_{v=0}^{j}\left(x_n-x_v\right)\right|=0 \qquad (19,4)$$

الإثبات :

لزوم الشرط:

لنفرض أنَّ العلاقات $(21,1)$ و $(22,1)$ محققة، عندئذٍ من التمهيدية1.2.4نحصل على العلاقة

$(18,4)$، لأجل $t>1$ والعلاقة $(19,4)$ لأجل $0<t<1$.

كفاية الشرط :

لنفرض أنَّ العلاقات $(8,4)$و $(21,1)$و $(18,4)$ محققة، عندئذٍ لأجل $\varepsilon>0$ يوجد $t_3>1$ بحيث إنَّ:

$$\lim_{n}\sup\left|\frac{1}{P_{t_{n_3}}-P_n}\sum_{j=n+1}^{t_{n_3}}p_k\,\frac{1}{j+1}\sum_{v=0}^{j}(x_v-x_n)\right|\le\varepsilon$$

حيث $t_{n_3}=[t_3.n]$.

مع الأخذ بعين الاعتبار أنَّ $\{x_n\}$ قابلة للجمع وفق $N_n^pC_n^1$، نحصل على الفرضية الآتية:

$$\lim_{n}\sup|L-x_n|\le\lim_{n}\sup\left|L-\frac{1}{P_{t_{n_3}}-P_n}\sum_{j=n+1}^{t_{n_3}}p_k\,\frac{1}{j+1}\sum_{v=0}^{j}x_v\right|+\lim_{n}\sup\left|\frac{1}{P_{t_{n_3}}-P_n}\sum_{j=n+1}^{t_{n_3}}p_k\,\frac{1}{j+1}\sum_{v=0}^{j}(x_v-x_n)\right|\le\varepsilon$$

وبحكم اختيارية العدد $\varepsilon>0$، يكون لدينا $\lim_{n}x_n=L$.

إنَّ الحالة الثانية مشابهة للحالة الأولى تماماً.

3.4. نظريات توبريان حول جداء طريقتي بوريل و هولدر:

تمهيدية 1.3.4 [10]: إذا كانت المتتالية $\{s_n\}$متذبذبة ببطء، فإنَّ $\left(V_n^{(0)}\right)$محدودة ومتذبذبة ببطء.

الإثبات :

لتكن المتتالية $\{s_n\}$ متذبذبة ببطء، لكل $\lambda>1$، نُعرّف:

$$w_n(s,\lambda)=\max_{n+1\le k\le[\lambda_n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta s_j\right|$$

يمكن التعبير عن المجموع المنتهٍ $\sum_{k=1}^{n} k\,\Delta s_k$ بالمتسلسلة الآتية:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\frac{n}{2^{j+1}} \le k \le \frac{n}{2^j}}^{n} k\,\Delta s_k$$

إذاً:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k\,\Delta s_k\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\sum_{\frac{n}{2^{j+1}} \le k \le \frac{n}{2^j}} k\,\Delta s_k\right| \le \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{n}{2^j}\right) w_{\left[\frac{n}{2^{j+1}}\right]}(s,\lambda) \le nC_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2nC_1 = nC$$

حيث $C > 0$، وبالتالي يكون $V_n^{(0)} = O(1)$ عندما $(n \to \infty)$ ، لذلك تكون $\left(\sigma_n^{(1)}\right) = \left(s_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k^{(1)}}{k}\right)$ متذبذبة ببطء، وبالتالي $\left(V_n^{(0)}\right)$متذبذبة ببطء.

كنتيجة للتمهيدية1.3.4. نُلاحظ أنَّه إذا كانت المتتالية $\{s_n\}$متذبذبة ببطء فإنَّ المتتالية $\left(V_n^{(k)}\right)$ محدودة ولذلك $\left(\sigma_n^{(k)}\right)$ متذبذبة ببطء من أجل كلk.

مبرهنة1.3.4 [15]: إذا كانت $s_n \to s(B)(H,k+1)$ لكل $k \ge 0$ و

$$V_n^{(k)} = O\left(\sqrt{n}\right) \quad (n \to \infty) \qquad (20,4)$$

فإنَّ $s_n \to s(H,k+1)$.

الإثبات:

حسب الفرض لدينا:

$$\sigma_n^{(k+1)} \to s(B)$$

باستخدام $(20,4)$والتمهيدية11.1.1نجد:

$$V_n^{(k)} = n\Delta\sigma_n^{(k+1)} = O\left(\sqrt{n}\right) \quad (n \to \infty)$$

نحصل على $\sigma_n^{(k+1)} \to s$ من المبرهنة12.1.1، والتي تعني أنَّ $s_n \to s\,(H,k+1)$

من المبرهنة1.3.4نستنتج النتيجة الآتية:

نتيجـــة (7) [33]: إذا كانــت $s_n \to s\,(B)(H,k+1)$ لكــل $k \geq 0$ و$\{s_n\}$ متذبذبــة بــبطء، فإن $\{s_n\}$ تتقارب إلى s.

الإثبات:

بمــا أنَّ المتتاليــة $\{s_n\}$ متذبذبــة بــبطء، فهــذا يقتضــي أنَّ $V_n^{(0)} = O(1)$ عنــدما $(n \to \infty)$ ، وأيضاً التذبذب البطيء للمتتالية $\sigma_n^{(k)}$ لكل $k \geq 1$ كما في التمهيدية1.3.4.

إذاً لدينا:

$V_n^{(k)} = n\Delta\sigma_n^{(k+1)} = O\left(\sqrt{n}\right)$ $(n \to \infty)$، وبمــا أنَّ $\{s_n\}$ قابلــة للجمــع وفــق $(H,k+1)$ إلــى s و $\sigma_n^{(k+1)} \to s$مــن المبرهنــة12.1.1، وهــذا ينــتج مــن التذبــذب البطــيء لــ $\sigma_n^{(k)}$ ؛ حيث $\sigma_n^{(k)} \to s$.

بالاســتمرار فــي هــذا الســياق. نحصــل علــى $\sigma_n^{(1)} \to s$ مــن التمهيديــة13.1.1، نجــد أنَّ (s_n) تتقارب إلى s.

ملاحظـــة: إذا اســتبدلنا التذبــذب البطــيء لــ $\{s_n\}$ بالتذبــذب المعتــدل لــ $\{s_n\}$ فــي النتيجــة (7)، نحصل على تقارب $\left(\sigma_n^{(1)}\right)$من قابلية الجمع وفق $(B)(H,k+1)$لـ (s_n).

بالتطابق مع شرط ليتلوود توبريان وهاردي نجد أنَّ $(n \to \infty)$ $n\Delta s_n = O\left(\sqrt{n}\right)$ بالنسبة لطريقة قابلية الجمع وفق بوريل .

الشــرط $(n \to \infty)$ $n\Delta V_n^{(k)} = O\left(\sqrt{n}\right)$ يكفــي لــرد قابليــة الجمــع وفــق (H,k) لـــ $\{s_n\}$ إلى قابلية الجمع وفق $(B)(H,k)$لكل $k \geq 0$.

مبرهنة2.3.4 [15]: إذا كانت $s_n \to s\,(B)(H,k)$ لكل $k \geq 0$ و

$$n\Delta V_n^{(k)} = O\left(\sqrt{n}\right) \quad , \quad (n \to \infty) \qquad (21,4)$$

فإنَّ $\{s_n\}$ تكون قابلة للجمع وفق (H,k) إلى s.

الإثبات:

من الفرض، لدينا $\sigma_n^{(k)} \to s(B)$ ولو أخذنا بعين الاعتبار التمهيدية 14.1.1 فيكون لدينا:

$$\sigma_n^{(k+1)} \to s(B)$$

وينتج من $\sigma_n^{(k)} - \sigma_n^{(k+1)} = V_n^{(k)}$ أنَّ:

$$\sigma_n^{(k)} - \sigma_n^{(k+1)} = V_n^{(k)} \to 0(B)$$

باستخدام المبرهنة 12.1.1 على $\left(V_n^{(k)}\right)$، نستنتج من $(21,4)$ أنَّ:

$$V_n^{(k)} = o(1) \qquad (n \to \infty) \qquad (22,4)$$

ومن التمهيدية 11.1.1 لدينا:

$$V_n^{(k)} = n\Delta\sigma_n^{(k+1)} = o(1) \qquad (n \to \infty)$$

ومن العلاقة السابقة ينتج أنَّ:

$$n\Delta\sigma_n^{(k+1)} = o\left(\sqrt{n}\right) \qquad (n \to \infty)$$

إذا طبقنا المبرهنة 11.1.1 على $\sigma_n^{(k+1)}$، نستنتج أنَّ :

$$\sigma_n^{(k+1)} \to s \qquad (23,4)$$

بتبديل $(22,4)$ و $(23,4)$ في $\sigma_n^{(k)} - \sigma_n^{(k+1)} = V_n^{(k)}$، نحصل على $\sigma_n^{(k)} \to s$ أي أنَّ: $s_n \to s(H,k)$.

إذا استبدلنا الشرط $(21,4)$ بالشرط $(n \to \infty)$ $n\Delta V_n^{(k+1)} = o\left(\sqrt{n}\right)$ فإننا نحصل على قابلية الجمع وفق (H,k) لـ s_n بدلاً من قابلية الجمع وفق $(H,k+1)(B)$ لكل $k \geq 0$.

مبرهنة3.3.4 [15]: إذا كانت $s_n \to s(B)(H,k+1)$ لكل $k \geq 0$ و

$$n\Delta V_n^{(k+1)} = o(1) \qquad , \ (n \to \infty) \qquad (24,4)$$

فإنَّ $s_n \to s(H,k)$.

الإثبات:

من الفرض، لدينا $\sigma_n^{(k+1)} \to s(B)$، ومن التمهيدية14.1.1 لدينا:

$$\sigma_n^{(k+2)} \to s(B) \qquad (25,4)$$

باستبدال k بـ k + 1 في $\sigma_n^{(k)} - \sigma_n^{(k+1)} = V_n^{(k)}$، نحصل على:

$$\sigma_n^{(k+1)} - \sigma_n^{(k+2)} = V_n^{(k+1)} \to 0(B)$$

ينتج ذلك من $(24,4)$ وبالتالي:

$$n\Delta V_n^{(k+1)} = o\left(\sqrt{n}\right) \qquad (n \to \infty)$$

إذا طبقنا المبرهنة11.1.1 على $V_n^{(k+1)}$ ، نحصل على:

$$V_n^{(k+1)} = o(1) \qquad (n \to \infty) \qquad (26,4)$$

باستبدال k بـ $k+1$ في11.1.1 يكون لدينا:

$$V_n^{(k+1)} = n\Delta\sigma_n^{(k+2)} = o(1) \qquad (n \to \infty)$$

وينتج من العلاقة السابقة أنَّ:

$$n\Delta\sigma_n^{(k+2)} = o\left(\sqrt{n}\right) \qquad (n \to \infty) \qquad (27,4)$$

وفقاً لـ$(25,4)$ و $(27,4)$، نحصل على:

$$\sigma_n^{(k+2)} \to s \qquad (28,4)$$

ومن المبرهنة11.1.1 باستبدال k بـ $k+1$ في $\sigma_n^{(k)}-\sigma_n^{(k+1)}=V_n^{(k)}$، نحصل على:

$$\sigma_n^{(k+1)}-\sigma_n^{(k+2)}=V_n^{(k+1)} \qquad (29,4)$$

لو أخذنا بعين الاعتبار $(26,4)$ و $(28,4)$ و $(29,4)$، نحصل على:

$$\sigma_n^{(k+1)}\to s \qquad (30,4)$$

من التمهيدية12.1.1، لدينا :

$$V_n^{(k)}-V_n^{(k+1)}=n\Delta V_n^{(k+1)} \qquad (31,4)$$

حسب $(24,4)$ و $(26,4)$ ومن المتطابقة $(31,4)$ لدينا:

$$V_n^{(k)}=o(1) \quad (n\to\infty) \qquad (32,4)$$

من $(30,4)$و $(32,4)$، نحصل على $\sigma_n^{(k)}\to s$ من المساواة $\sigma_n^{(k)}-\sigma_n^{(k+1)}=V_n^{(k)}$، والتي تعني أنَّ $s_n\to s(H,k)$.

لدينا أيضاً في المبرهنة3.3.4 إذا استبدلنا الشرط $(24,4)$ محل الشرط $V_n^{(k)}=o(1) \quad (n\to\infty)$ لكل $k\geq 0$.

نتيجة (8): إذا كان $s_n\to s(B)(H,k+1)$ لكل $k\geq 0$ و $V_n^{(k)}=o(1) \quad (n\to\infty)$ فإنَّ $s_n\to s(H,k)$.

الإثبات:

ينتج الإثبات من $(19,1)$ والانتظام في قابلية الجمع وفق طريقة هولدر.

الفصل الخامس

قابلية جمع المتسلسلات وفق طريقتي سيزارو وآبل

1.5.بعض المبرهنات حول طرائق قابلية الجمع وفق سيزارو و آبل معاً:

لنتعرّف على شروط توبريان أحادية الجانب للتعويض في قابلية الجمع وفق (C,α) والتقارب للمتتالية الناتجة عن تحويل الطريقة $(A)(C,\alpha)$.

أثبت ديك Dik [10] أنَّ $\left(n\Delta s_n^1\right)$ محدودة من أجل المتتالية المتذبذبة باعتدال $\{s_n\}$. من الواضح أنَّ كل متتالية متذبذبة ببطء تكون متذبذبة باعتدال. المتطابقة $s_n - s_n^1 = \tau_n^1$ تُعرف بمتطابقة كرونيكر.

مؤخراً بحث كل من ارديم و كاناك [6] عن التقارب وفق (C,α) والتذبذب البطيء وفق (C,α) لـ $\{s_n\}$ اعتماداً على الشروط المفروضة على حدود الـ $(n\Delta)_m\,\tau_n^{\alpha+m}$ وذلك من أجل بعض القيم الخاصة لـ m.

سوف نُثبت أنَّ المحدودية ذات الطرف الواحد لـ $\left((n\Delta)_m\,\tau_n^{\alpha+m-1}\right)$ لأجل $m \geq 2$ بالنسبة لمتتالية لها خاصية كافية لنسترجع التقارب وفق (C,α) أو التقارب لـ $\{s_n\}$ من قابلية الجمع وفق $(A)(C,\alpha)$.

مبرهنة1.1.5 [32]: لتكن $\alpha > -1$، من أجل المتتالية $\{s_n\}$، توجد المتتالية غير السالبة (M_n) بحيث إنَّه من أجل $m \geq 2$ وكل عدد صحيح $n \geq 1$ و

$$(n\Delta)_m\,\tau_n^{\alpha+m-1} \geq -M_n \qquad (1,5)$$

حيث $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{k}\right)$ متذبذبة باعتدال. عندئذٍ إذا كانت $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق $A(C,\alpha)$ إلى s فإنَّ $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق (C,α) إلى s.

مبرهنة2.1.5 [34]: لتكن $\alpha > -1$، من أجل المتتالية $\{s_n\}$، لتكن لدينا المتتالية غير السالبة (M_n) بحيث إنَّه من أجل العدد الصحيح $m \geq 2$ وكل الأعداد الصحيحة $n \geq 1$ ؛ حيث

$$(n\Delta)_m \tau_n^{m-1} \geq -M_n \qquad (2,5)$$

حيث $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{k}\right)$ متذبذبة باعتدال، إذا كانت $\{s_n\}$ قابلة للجمع وفق $A(C,\alpha)$ إلى s فإنَّ $\{s_n\}$ متقاربة إلى s.

تمهيدية1.1.5 [7]: إذا كانت $s_n^{\alpha} \to s(A)$ فإنَّ:

$$(n\Delta)_{m-1} s_n^1 \left(\tau^{\alpha+m-1}\right) \to 0(A)$$

الإثبات:

من التمهيدية20.1.1 لدينا $s_n^{\alpha+j} \to s(A)$ من أجل $j = 1,2,.....,m$، إذاً من التمهيدية 18.1.1 نحصل على $(\alpha+j)\left(s_n^{\alpha+j-1} - s_n^{\alpha+j}\right) = \tau_n^{\alpha+j}$ من أجل $j = 1,2,.....,m$، بما أنَّ $s_n^{\alpha+j} \to s(A)$ من أجل $j = 1,2,.....,m$، لدينا $\tau_n^{\alpha+i} \to 0(A)$ من أجل $i = 1,2,.....,m$، ومن التمهيدية19.1.1 لدينا:

$$(\alpha+j)\left(\tau_n^{\alpha+j-1} - \tau_n^{\alpha+j}\right) = n\Delta\tau_n^{\alpha+j} \to 0(A)$$

من أجل $j = 2,.....,m$.

بما أنَّ:

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+j} \to 0(A) \qquad (3,5)$$

من أجل $j = 2,.....,m$ من التمهيدية21.1.1 لدينا:

$$\begin{aligned}(n\Delta)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m} &= \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1} A_{m-1}^{j}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{\alpha+1+j} \\ &= A_{m-1}^{1}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{\alpha+2} - ..... + (-1)^{m-1} A_{m-1}^{m-1}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{\alpha+m}\end{aligned}$$

من $(3,5)$، لدينا $(n\Delta)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m} \to 0(A)$ والتي تُكافئ $(n\Delta)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m-1} \to 0(A)(C,1)$ أو

$$(n\Delta)_{m-1} s_n^1 \left(\tau^{\alpha+m-1}\right) \to 0(A) \qquad (4,5)$$

تمهيدية2.1.5 [6]: إذا كانت $(n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m} = o(1)$ فإنَّ $s_n^{\alpha} \to s$.

الإثبات:

لدينا:

$(n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m} = o(1)$، بما أنَّ:

$$(n\Delta)_{m-2} \tau_n^{\alpha+m} = \sum_{j=1}^{m-2} (-1)^{j+1} A_{m-2}^{j} (\alpha+2) n\Delta \tau_n^{\alpha+2+j}$$

وفق التمهيدية21.1.1. لدينا $(n\Delta)_{m-2} \tau_n^{\alpha+m} \to 0(A)$، من المعادلة الأخيرة و $(n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m} = o(1)$، من المبرهنة19.1.1 نحصل على:

$$(n\Delta)_{m-2} \tau_n^{\alpha+m} = o(1) \qquad (5,5)$$

من التمهيدية19.1.1 نحصل على:

$$(\alpha+m)\left((n\Delta)_{m-2} \tau_n^{\alpha+m-1} - (n\Delta)_{m-2} \tau_n^{\alpha+m}\right) = (n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m}$$

بتعويض $(n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m} = o(1)$ و$(5,5)$، فنحصل على:

$$(n\Delta)_{m-2} \tau_n^{\alpha+m-1} = o(1) \qquad (6,5)$$

بما أنَّ:

$$(n\Delta)_{m-3} \tau_n^{\alpha+m-1} = \sum_{j=1}^{m-3} (-1)^{j+1} A_{m-3}^{j} (\alpha+2) n\Delta \tau_n^{\alpha+2+j}$$

وفق التمهيدية21.1.1. لدينا: $(n\Delta)_{m-3} \tau_n^{\alpha+m-1} \to 0(A)$.

من $(6,5)$ والمعادلة الأخيرة والمبرهنة19.1.1 نحصل على:

$$(n\Delta)_{m-3} \tau_n^{\alpha+m-1} = o(1) \qquad (7,5)$$

من التمهيدية19.1.1 نجد: $(\alpha+m-1)\left((n\Delta)_{m-3}\tau_n^{\alpha+m-2}-(n\Delta)_{m-3}\tau_n^{\alpha+m-1}\right)=(n\Delta)_{m-2}\tau_n^{\alpha+m-1}$

بتعويض $(6,5),(7,5)$ في المعادلة الأخيرة، يكون لدينا: $(n\Delta)_{m-3}\tau_n^{\alpha+m-2}=o(1)$

إذا تابعنا بنفس الخطوات السابقة، نحصل على:

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2}=o(1) \qquad (8,5)$$

من $(4,5),(8,5)$ والمبرهنة19.1.1، نحصل على:

$$\tau_n^{\alpha+2}=o(1) \qquad (9,5)$$

من التمهيدية19.1.1، نحصل على $(\alpha+2)\left(\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+2}$.

بتعويض $(8,5),(9,5)$في المعادلة الأخيرة، يكون لدينا $\tau_n^{\alpha+1}=o(1)$

بما أنَّ $s_n^{\alpha+1}\to s(A)$ و $\tau_n^{\alpha+1}=n\Delta s_n^{\alpha+1}=o(1)$ نحصل على $s_n^{\alpha+1}\to s$ من خلال $(\alpha+1)\left(s_n^{\alpha}-s_n^{\alpha+1}\right)=\tau_n^{\alpha+1}$ لدينا $s_n^{\alpha}\to s$.

إثبات المبرهنة1.1.5:

لتكن $\gamma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{k}$، إذاً لدينا $n\Delta\gamma_n=M_n$، بما أنَّ (γ_n) متذبذبة باعتدال. لدينا:

$$n\Delta s_n^1(\gamma)=O(1) \qquad (10,5)$$

وباستخدام $(10,5)$ يمكننا كتابة الشرط $(1,5)$ كما يأتي:

$$(n\Delta)_m\tau_n^{\alpha+m-1}\geq -M_n=-n\Delta\gamma_n$$

ومنه ينتج أنَّ: $(n\Delta)_m s_n^1\left(\tau^{\alpha+m-1}\right)\geq -n\Delta s_n^1(\gamma)$.

باستخدام $(10,5)$ في المتراجحة الأخيرة ينتج:

$$(n\Delta)_m s_n^1\left(\tau^{\alpha+m-1}\right)\geq -C \qquad (11,5)$$

من أجل C ثابت موجب. من الفرضية $s_n^{\alpha} \to s(A)$، والتمهيدية 1.1.5 يكون لدينا:

$$(n\Delta)_{m-1} s_n^1 \left(\tau^{\alpha+m-1}\right) \to 0(A)$$

من $(11,5)$ والمساواة الأخيرة و من خلال المبرهنة 21.1.1، نحصل على:

$$(n\Delta)_{m-1} s_n^1 \left(\tau^{\alpha+m-1}\right) \to o(1)$$

والتي تكافئ العلاقة:

$$(n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m-1} \to 0(C,1)$$
$$or$$
$$(n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m} = o(1)$$

من التمهيدية 1.1.5 لدينا $s_n^{\alpha} \to s$ وبهذا يكتمل الإثبات.

إثبات المبرهنة 2.1.5:

لتكن $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{k}$ إذاً، لدينا $n\Delta\gamma_n = M_n$. بما أنَّ (γ_n) متذبذبة باعتدال، لدينا :

$$n\Delta s_n^1(\gamma) = O(1) \qquad (12,5)$$

من العلاقة الأخيرة. يُمكن كتابة الشرط $(2,5)$بالشكل:

$$(n\Delta)_m \tau_n^{m-1} \geq -M_n = -n\Delta\gamma_n$$

تنتج من المتراجحة الأخيرة أنَّ:

$$(n\Delta)_m s_n^1 \left(\tau^{m-1}\right) \geq -n\Delta s_n^1(\gamma)$$

باستخدام $(12,5)$ في المتراجحة الأخيرة لدينا:

$$(n\Delta)_m s_n^1 \left(\tau^{m-1}\right) \geq -C \qquad (13,5)$$

بالنسبة للثابت الموجب C. وفقاً للفرضية $s_n^{\alpha} \to s(A)$، لدينا من التمهيدية 1.1.5:

$$(n\Delta)_{m-1} s_n^1 \left(\tau^{\alpha+m-1}\right) \to 0(A) \qquad (14,5)$$

لو أخذنا بعين الاعتبار العلاقة $(13,5)$نجد أنَّ:

$$(n\Delta)_m s_n^1 \left(\tau^{m-1}\right) \geq -C$$

عندئذٍ:

$$(n\Delta)_m s_n^{\alpha+1} \tau_n^{m-1} \geq -C$$

وكذلك $(n\Delta)_m s_n^1 \left(\tau_n^{\alpha+m-1}\right) \geq -C$.

من المتراجحة الأخيرة و $(14,5)$ ومن المبرهنة21.1.1، نجد أنَّ:

$(n\Delta)_{m-1} s_n^1 \left(\tau^{\alpha+m-1}\right) = o(1)$ والتي تُكافئ:

$$(n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m-1} \to 0(C,1)$$
$$or$$
$$(n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m} = o(1)$$

من التمهيدية 1.1.5، لدينا $s_n^\alpha \to s$ عندئذٍ نحصل على $s_n \to s(A)$ من التمهيدية20.1.1، لدينا $s_n^1 \to s(A), s_n^2 \to s(A), ..., s_n^m \to s(A)$.

إذاً، من التمهيدية18.1.1نحصل على:

$$\left(s_n - s_n^1\right) = \tau_n^1, 2\left(s_n^1 - s_n^2\right) = \tau_n^2, ..., m\left(s_n^{m-1} - s_n^m\right) = \tau_n^m$$

بما أنَّ $s_n^k \to s(A)$ من أجل $k = 1, 2, ..., m$، لدينا:

$$\tau_n^i \to 0(A) \qquad (15,5)$$

لكل $i = 1, 2, ..., m$ ومن التمهيدية19.1.1 يكون لدينا: $(j)\left(\tau_n^{j-1} - \tau_n^j\right) = n\Delta\tau_n^j \to 0(A)$

من أجل $j = 2, ..., m$ بما أنَّ:

$$n\Delta\tau_n^j \to 0(A) \qquad (16,5)$$

من أجل $j = 2,.....,m$ ، من التمهيدية21.1.1، لدينا:

$$(n\Delta)_{m-1}\tau_n^m = \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1}A_{m-1}^{j}(1)n\Delta\tau_n^{1+j}$$

من $(16,5)$، لدينا $(n\Delta)_{m-1}\tau_n^m \to 0(A)$، والتي تُكافئ إحدى العلاقتين:

$$(n\Delta)_{m-1}\tau_n^{m-1} \to 0(A)(C,1)$$

or

$$(n\Delta)_{m-1}s_n^1\left(\tau^{m-1}\right) \to 0(A)$$

من $(13,5)$والنهاية الأخيرة ومن المبرهنة21.1.1، نحصل على:

$$(n\Delta)_{m-1}s_n^1\left(\tau^{m-1}\right) = o(1)$$

المُكافئة لإحدى العبارتين:

$$(n\Delta)_{m-1}\tau_n^{m-1} \to 0(C,1)$$
$$or$$
$$(n\Delta)_{m-1}\tau_n^m = o(1) \qquad (17,5)$$

بما أنَّ:

$$(n\Delta)_{m-2}\tau_n^m = \sum_{j=1}^{m-2}(-1)^{j+1}A_{m-2}^{j}(2)n\Delta\tau_n^{2+j}$$

من التمهيدية21.1.1 لدينا:

$$(n\Delta)_{m-2}\tau_n^m \to 0(A) \qquad (18,5)$$

من $(17,5),(18,5)$ ومن المبرهنة19.1.1، نحصل على:

$$(n\Delta)_{m-2}\tau_n^m = o(1) \qquad (19,5)$$

من التمهيدية19.1.1، نحصل على:

$$m\left(\left(n\Delta\right)_{m-2}\tau_n^{m-1}-\left(n\Delta\right)_{m-2}\tau_n^{m}\right)=\left(n\Delta\right)_{m-1}\tau_n^{m} \qquad (20,5)$$

بتعويض $(17,5),(19,5)$في $(20,5)$، يكون لدينا:

$$\left(n\Delta\right)_{m-2}\tau_n^{m-1}=o\left(1\right) \qquad (21,5)$$

بما أنَّ: $\left(n\Delta\right)_{m-3}\tau_n^{m-1}=\sum_{j=1}^{m-3}\left(-1\right)^{j+1}A_{m-3}^{j}\left(2\right)n\Delta\tau_n^{2+j}$

وفق التمهيدية21.1.1، لدينا $\left(n\Delta\right)_{m-3}\tau_n^{m-1}\to 0\left(A\right)$.

من $(21,5)$ والنهاية الأخيرة و المبرهنة19.1.1، لدينا:

$$\left(n\Delta\right)_{m-3}\tau_n^{m-1}=o\left(1\right) \qquad (22,5)$$

من التمهيدية21.1.1، نحصل على: $\left(m-1\right)\left(\left(n\Delta\right)_{m-3}\tau_n^{m-2}-\left(n\Delta\right)_{m-3}\tau_n^{m-1}\right)=\left(n\Delta\right)_{m-2}\tau_n^{m-1}$

بتعويض $(21,5),(22,5)$ في المساواة الأخيرة، لدينا:

$$\left(n\Delta\right)_{m-3}\tau_n^{m-2}=o\left(1\right)$$

بالاستمرار في هذه الطريقة، نحصل على $n\Delta\tau_n^2=o\left(1\right)$.

ينتج من $(15,5)$والمساواة الأخيرة في المبرهنة19.1.1، أنَّ $\tau_n^2=o\left(1\right)$.

من التمهيدية19.1.1، نحصل على $2\left(\tau_n^1-\tau_n^2\right)=n\Delta\tau_n^2$، بتعويض $\tau_n^2=o\left(1\right),n\Delta\tau_n^2=o\left(1\right)$

في المساواة الأخيرة، يكون لدينا $\tau_n^1=o\left(1\right)$، بما أنَّ $s_n^1\to s\left(A\right)$ و $\tau_n^1=n\Delta s_n^1=o\left(1\right)$، نحصل على: $s_n^1\to s$. من $s_n-s_n^1=\tau_n^1$ يكون لدينا $s_n\to s$، وبهذا يكتمل الإثبات.

2.5.العلاقة بين طريقتي قابلية الجمع وفق سيزارو و آبل المعممة:

تمهيدية 1.2.5 [19]: إذا كانت المصفوفة $A\left(x,y\right)$ هي مصفوفة من الصف R

والمتتالية $\left(s_{mn}\right)_{m,n>0}$متقاربة، وتحقق الشروط:

a. المتسلسلة المضاعفة $F(x,y)=\sum_{i,k=0}^{\infty} s_{ik}a_{ik}(x,y)$ متقاربة مطلقاً على المجموعة E.

b. يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث إنَّه لكل $n \geq N$ يكون لدينا:

$$\lim_{(x,y)E\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} s_{ik}a_{ik}(x,y)=0$$

$$\lim_{(x,y)E\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} s_{ik}a_{ik}(x,y)=0$$

فإنَّ المساواة الآتية تكون صحيحة:

$$\lim_{x,y\to\infty} F(x,y)=\lim_{m,n\to\infty} s_{mn}$$

مبرهنة1.2.5 [19]: لتكن المتسلسلة المضاعفة (a_{mn}) قابلة للجمع وفق طريقة (C,α,β) إلى العدد s $(\alpha,\beta>-1)$، وكانت الشروط الآتية محققة:

a. المتسلسلة المضاعفة $(a_{mn}x^m y^n)$ متقاربة عندما $|x|<1,|y|<1$.

b. يوجد دليل مثل n_0، بحيث إنَّه لكل $n>n_0$ تكون:

$$\sup_{\substack{0\le x<1\\0\le y<1}}(1-x)^{\alpha+1}\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{\alpha}A_k^{\beta}x^i y^k\sigma_{ik}^{\alpha\beta}\right|=p_n<+\infty$$

أيضاً

$$\sup_{\substack{0\le x<1\\0\le y<1}}(1-y)^{\beta+1}\left|\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}A_i^{\alpha}A_k^{\beta}x^i y^k\sigma_{ik}^{\alpha\beta}\right|=q_n<+\infty \qquad (23,5)$$

عندئذٍ المتسلسلة المعطاة قابلة للجمع وفق طريقة آبل إلى العدد s.

الاثبات:

لنضع $F(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}x^m y^n$ وبما أنَّ المتسلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً عندما $|x|<1,|y|<1$ فإنَّ:

$$F(x,y)=(1-x)^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1}\sum_{m,n=0}^{\infty}A_m^{\alpha}A_n^{\beta}x^m y^n\sigma_{mn}^{\alpha\beta}$$

وبفرض أنَّ:

$$a_{mn}(x,y)=A_m^{\alpha}A_n^{\beta}(1-x)^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1}x^m y^n$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$F(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}(x,y)\sigma_{mn}^{\alpha\beta}$$

ومنه بسهولة تكون المصفوفة $\left[a_{mn}(x,y)\right]$ مصفوفة من الصف R.

وحسب الشرط $(23,5)$يكون لدينامن أجل $n\geq n_0$:

$$\lim_{x,y\to 1}\sum_{n=0}^{m}\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}(x,y)\sigma_{mn}^{\alpha\beta}=0$$

$$\lim_{x,y\to 1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}(x,y)\sigma_{mn}^{\alpha\beta}=0$$

وبهذا الشكل تكون الشروط الواردة في المبرهنة 1.2.5 محققة لذلك تكون المتسلسلة المفروضة قابلة للجمع إلى العدد s.

ملاحظة[19]: نعلم أنَّه إذا كانت المتسلسلة البسيطة قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو إلى العدد s فهي قابلة للجمع وفق طريقة آبل إلى العدد s أيضاً، ولكن هذا الكلام قد يكون غير صحيح بالنسبة للمتسلسلات المضاعفة، فمن الممكن أن يكون صحيح وذلك بإضافة شروط معينة عندها من قابلية جمع المتسلسلة المضاعفة وفق طريقة سيزارو ينتج قابلية الجمع لتلك المتسلسلة وفق طريقة آبل.

وبصورة خاصة إذا كانت $\alpha=\beta=1$ فنحصل على النتيجة الآتية التي تحدد العلاقة بين قابلية الجمع وفق طريقة سيزارو وآبل.

نتيجة [19]: لتكن المتسلسلة المضاعفة (a_{mn}) قابلة للجمع من العدد s وفق طريقة سيزارو ومتسلسلة القوى المضاعفة التي حدها العام $\left(a_{mn}x^m y^n\right)$ متقاربة عندما $|x|<1,|y|<1$، إذا تحققت الشروط الآتية:

i. $\sup\limits_{0\leq x<1}(1-x)^2\left|\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\sigma_{mn}x^m\right|=A_n<\infty \qquad (n=0,1,2,.....)$

ii. $\sup\limits_{0\leq y<1}(1-y)^2\left|\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{mn}y^n\right|=B_m<\infty \qquad (m=0,1,2,.....)$

عندئذٍ تكون المتسلسلة المفروضة قابلة للجمع إلى العدد s وفق طريقة آبل.

الملخص

تحتوي هذه الرسالة على خمسةِ فصولٍ :

الفصل الأول : عرضنا في هذا الفصل بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية التي نحتاج إليها في هذا البحث ؛ حيث قُمنا بعرض تعاريف طرائق قابلية الجمع كطرائق سيزارو و وجسمان ووجسمان- سيزارو و هولدر و بوريل و نيورلند ونيورلند - سيزارو وآبل و آبل- سيزارو ، كما عرضنا بعض المفاهيم الهامة الجديدة مثل التكرير الفجوي ومتتالية ومتسلسلة الصف T والمجموعة من الصف H والمصفوفات من الصف R وتعرّيفي الرمزين O و o، و تمَّ ذكر بعض المبرهنات الهامة مثل مبرهنتي آبل وهاردي وغيرهما.

الفصل الثاني : تمّ التطرق في هذا الفصل لدراسة قابلية جمع المتسلسلات البسيطة والمضاعفة وفق طريقة سيزارو، حيث درسنا قابلية جمع متسلسلة والش- فورييه وفق طريقة سيزارو، و درسنا أيضاً قابلية جمع المتسلسلة المشتقة لمتسلسلة فورييه والمتسلسلة المرافقة وفق طريقة سيزارو، كما درسنا قابلية الجمع المحدودة لمتسلسلات فورييه المضاعفة وفق طريقة سيزارو، و قابلية جمع المتتاليات المضاعفة في المجموعات وفق طريقة سيزارو.

الفصل الثالث :في هذا الفصل تمت دراسة قابلية جمع التكاملات المعتلة المتباعدة وفق طريقة سيزارو ، و درسنا قابلية جمع سيزارو وهولدر الدالية .

الفصل الرابع : درسنا في هذا الفصل نظرية توبريان وتطبيقاتها وشروط ضمان قابلية جمع التكاملات وفق طريقة سيزارو وقابلية الجمع الموزون ، و درسنا أخيراً نظريات توبريان حول جداء طريقتي بوريل وهولدر .

الفصل الخامس : تمَّت معالجة مسألة تحديد العلاقة بين طريقتي سيزارو و آبل، وتمَّ عرض بعض المبرهنات حول طرائق قابلية الجمع وفق طريقتي سيزارو وآبل معاً، ومن ثمّ درسنا العلاقة بين طريقتي سيزارو وآبل المعممة .

Abstract

This dissertation contains five chapters:

Chapter 1: In this chapter we present some of the basic concepts and definitions that we need in this paper,that We presented definitions of the methods of Summability such as the methods of Cesàro, Wijsman, Wijsman- Cesàro , Hölder , Borel, Nörlund, Nörlund- Cesaro, Abel , Abel - Cesàro, and we also presented some important new concepts such as class H, lacunary refinement, Sequence and series of class T, set of matrices of class R , two definitions of symbols O and o ,we presented some important theorems such as Abel and Hardy theorems and others.

Chapter 2: In this chapter ,we focus on the study of Cesàro simple and double series summability, where we studied Cesàro summability of Walsh-Fourier series and we also studied Cesàro summability of successively differentiated series of a Fourier series and its conjugate series, and so we studied the restricted Cesàro summability of double Fourier series. Finally, we studied Cesàro summability of double sequences of sets.

Chapter 3: In this chapter, we studied Cesàro summability of improper divergent integrals ,and we studied Cesàro and functional Hölder summability.

Chapter 4: In this chapter ,we studied the Tauberian theorem and its applications and the conditions that ensure the Cesàro summability of integrals and weighted summability Method. Finally ,we studied Tauberian theorems for the product of Borel and Hölder summability methods.

Chapter 5: In this chapter, we have been studied the relationship between the Cesàro and Abel two methods was determined. Some theorems were presented about the Cesàro and Abel methods together, and then, we studied the relationship between the Cesàro and generalized Abel two methods.

توصيات ومقترحات:

1) دراسة قابلية جمع المتسلسلات المكررة وفق طريقة آبل وسيزارو .
2) دراسة قابلية جمع متسلسلات فورييه ذات المعاملات المطّردة الحقيقية أو العقدية وفق طريقة سيزارو .
3) دراسة قابلية جمع المتسلسلات المكررة وفق طريقة مدمجة لطريقتي هولدر وسيزارو في آن واحد.
4) دراسة قابلية جمع المتسلسلات بشكل منتظم وفق طريقة سيزارو.

المراجع

1.U. Ulusu and F. Nuray, 2013, "On strongly lacunary summability of sequences of sets", J. Appl. Math. Bioinform, 3(3), 75-88.
2. Ö. Talo and F. Başar, 2013," On the Slowly Decreasing Sequences of Fuzzy Numbers", Abstr. Appl. Anal 1–7.
3.U. Totur and I. Çanak, 2012,"Some general Tauberian conditions for the weighted mean summability method", Comput. Math. Appl. 63, no. 5, 999-1006.

4.V. Kowalenko, 2011," Euler and Divergent Series", European Journal of Pure and Applied Mathematics 4 (4) 370-423.

5. GA. Anastassiou , 2010," Fuzzy Mathematics: Approximation Theory", Springer-Verlag, Berlin .

6. İ. Çanak, Y. Erdem and Ü. Totur , 2010, Math. Comput. Modelling, 52, 738–743.

7. Y. Erdem and İ. Çanak, 2010, Comput. Math. Appl., 60, No 11, 2920–2925.
8. S. Aytar and S. Pehlivan, 2007," Statistical cluster and extreme limit points of sequences of fuzzy numbers",Inform. Sci. 177(16), 3290–3296.
9.S. Lal and P. Yadav, 2002, "Matrix Summability Of The Conjugate Series Of Derived Fourier Series", (35-43).
10. M. Dik,2002," Tauberian theorems for sequences with moderately oscillatory control moduli", Thesis (Ph.D.)–University of Missouri – Rolla, pp 44.
11. F. Móricz and Z. Németh , 2000," Tauberian conditions under which convergence of integrals follows from summability (C, 1) over R+", Anal. Math. 26, 53–61 .
12.G. Ferraro, 1999," The first modern definition of the sum of a divergent series", an aspect of the rise of 20th century mathematics, Archive for history of exact sciences 54 (2) 101-135.
13.Č.V. Stanojević, in: İ. Çanak (Ed.), 1998,"Analysis of Divergence: Control and Management of Divergent Process", in: Graduate Research Seminar Lecture Notes, University of Missouri, Rolla, Fall.

14. G.H. Hardy, 1992 ," Divergent Series", With a preface by J.E. Littlewood and a note by L.S. Bosanquet, Reprint of the revised, 1963, edition, Éditions Jacques Gabay, Sceaux.

15. D. Borwein and T. Markovich, 1988," A Tauberian theorem concerning Borel–type and Cesàro methods of summability", Canad. J. Math., 40 ,228–247.

16.A. Zygmund, 1988," Trigonometric series" , Cambridge University Press,ISBN, 521-978.

17. R. Goetschel and W. Voxman ,1986," Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Set", Syt 18, 31–43 .

18.A.R. Freedman, J.J. Sember and M. Raphael, 1978," Some Cesàro type summability spaces", Proc. London Math. Soc., 37,508-520.

19.E.V.Cheledze,1977,"On summability of double series method $C_{\alpha\beta}$"Tbilisi.

20.R.A. Wijsman, 1966," Convergence of sequences of convex sets", cones and functions II, Trans. Amer. Math. Soc., 123(1) ,32-45.

21. N .K. Bary, 1961," Trigonometric series" , Moscow, Government Puplishing Hause . 201 P.

22.Shigeki Yano, 1951,"On Walsh-Fourier Series", Tohoku Math. J., ser. 2, 3, 223-242.

23.J. G. Herriot, 1944," Nörlund summability of double Fourier series", Duke Math. J. vol. 11 pp. 735-754.

24.L. S. Bosanquet, 1940,"A solution of the Cesàro summability problem for successively derived Fourier series", Proc. London Math. Soc. (2) vol. 46 pp. 63-77.

25.J. J. Gergen and S. B. Littauer, 1935," Continuity and summability for double Fourier series",Trans. Amer. Math. Soc. vol. 38 pp. 401-135.

26. K. K. Chen, 1929," On the summability of the derived series of Fourier's series", Tôhoku Math. J. 31 ,62-67.

27. A.Plessner,1927," Trigonometrische Reihen, in Pascal's Repertorium der Höheren Analysis I", 3, pp. 1325-1396 (especially p. 1361).

28. A.Plessner, 1927," Über die Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereiches", J. f. Math. 159 ,219-227.

29. E. Kogbetliantz, 1925,Bulletin sc. Math., 49, No 2, 234–251.

30. T. H.Gronwall, 1916," Über eine Summations methode und ihre Anwendung auf die Fourierreihe", J. f. Math. 147 ,16-35.

31.C. N. Moore, 1913," On convergence factors in double series and double Fourier series", Trans. Amer. Math. Soc. vol. 14 pp. 73-104.

32. A .Tauber, 1897, Monatsh. f. Math., 8, 273–277.

33. O. Hölder, 1826 ,"Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze", Math. Ann., 20(1882), 535–549.

34. N. H. J. Abel ,für Math., 1, 311–339.

35. شحادة الأسدي ،2010 ،"نظرية القياس" ، منشورات جامعة حلب،(69−96) ،كلية العلوم.

دليل المصطلحات العلميّة

عربي _ إنكليزي

A	
Absolutely convergent	متقارب مطلقاً
Almost Everywhere	تقريباً في كل مكان
Arbitrary	اختياري
B	
Bounded	محدود
C	
Class	صف
Completely Increasing	متزايد تماماً
Complex	عقدي
Conjugate	مرافق
Consequence	نتيجة
Constant	ثابت
Converge	يتقارب
Convergent	متقارب
D	
Decreasing	متناقص
Derivation	اشتقاق
Divergent	متباعد

Double	مضاعف
Double Sequence	متتالية مضاعفة
Double Series	متسلسلة مضاعفة
E	
Estimation	تقدير (حساب)
Even	زوجي
F	
Formula	صيغة
Function	دالة
G	
Generalized	معمم
Generalized Symmetric Derivative	مشتق متناظر معمم
H	
I	
Identity	متطابقة
Improper Integral	تكامل معتل
Increasing	متزايد
Inequality	متراجحة
Integer	عدد صحيح
Integrable	قابل للمكاملة
Integral	تكامل
Integration By Parts	تكامل بالتجزئة

Interval	فترة (مجال)
J	
K	
Kernel	نواة
L	
Lacuna	فجوة
Lacunary refinement	تكرير فجوي
Lacunary sequence	متتالية فجوية
Lemma	تمهيدية
Limit	نهاية
Linear	خطيّ
M	
Matrix method	طريقة مصفوفية
Measurable	قابلة للقياس(مقيسة)
Method	طريقة
Moderately oscillatin	متذبذب بإعتدال
N	
Number Fixed	عدد مثبت
Nondecreasing	غير متناقص
Nonnegative	غير سالب
Null	صفري
Number	عدد
O	

Odd	فردي
Operator	مؤثر
Order	مرتبة
P	
Partial sum	مجموع جزئي
Period	دور
Periodic	دوري
Piecewise continuous	مستمرة قِطَعِيّاً
Positive	موجب
Proof	إثبات
Property	خاصة_جمعها خصائص
Q	
R	
Range	مجال
Real	حقيقي
Regular	نظامي
Regularity	نظامية_انتظام
S	
Sequence	متتالية
Series	متسلسلة
Set	مجموعة
Slow oscillating	متذبذب ببطء
Space	فضاء
Standard	قياسي_معياري

Subset	مجموعة جزئية
Sum	مجموع
Summability	قابلية جمع_جموعية
Summable	قابل للجمع_جموعة
T	
Tauberian condition	شرط توبريان
Tauberian theorem	نظرية توبريان
Theory	نظرية
Theorem	مبرهنة
Transform	تحويل
U	
Unbounded	غير محدود
V	
Value	قيمة
W	
Walsh-Fourier series	متسلسلة والش- فورييه
Weighted	موزون
X	
Y	
Z	

Syrian Arab Republic

Al-Baath University

Faculty of Science
Department of Mathematics

Summability of divergent series and integrals by using Cesaro's method

Submitted to M.SC.Degree in Pure Mathematics

Submitted by

Ranim Nadim Fajer

Supervision by
Dr. Monir Makhlof

De Pr. of Mathematics

Academic Year:

1441-2019