وزارة التعليم العالي

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

رسالة ماجستير في الرياضيات التطبيقية _ ميكانيك رياضي

للطالب :علي جودت لولو

المعادلات الأساسية لبعض الأوساط المستمرة من النوع المرن

الأستاذ المشرف: أ.د. منتجب الحسن

العام الدراسي:2019\2020

الإهداء

بفضل الله وعونه تعالى أنجزت وأستاذي هذه الرسالة الحمد له والشكر له سبحانه .....

ولابد من شكر جنود مجهولين في حياتي ساعدوني وكانوا عوناً وداعماً لي للوصول للنجاح .....

شكراً أبي شكرا أمي أنتما بسمة حياتي وسبب وجودي وسر قوتي قدمتم عمركم لأجل نجاحي وسعادتي .....

شكراً إخوتي (منذر , حنين , عبد الهادي) لتضحياتكم الكبيرة أنتم سندي دائما وعوني وفرحتي .....

والشكر للأخ الصديق ورفيق الدرب الأستاذ علي الحمادي الذي قدم لي الكثير وكان السند في محطات حياتي الجامعية.....

وأخيراً وليس آخراً شكراً أستاذي الكبير الأستاذ الدكتور الراقي منتجب الحسن المعلم الذي أنار دربي وعلمني الجد والمثابرة والصبر .....

شكراً أصدقائي وزملائي قدمتم لي الطاقة والأمل .....

علي لولو

الفهرس

الفصل الأول: مقدمة رياضية ..... صفحة 5

الفصل الثاني: نماذج رياضية في ميكانيك الأوساط المستمرة من النوع المرن ... صفحة 17

الفصل الثالث: طريقة متجه Schaefer في حل مسائل النموذج (E-N) ... صفحة 68

ملخص الرسالة: ... صفحة 94

المراجع: ... صفحة 96

يعتبر الباحث **Hooke**(انظر [1]) أول من أسس لأبسط النماذج الرياضية (Hooke Model) في الأوساط المستمرة، ذلك **في مطلع القرن الثامن عشر**. بعدها حاول**Voigta**عام1887(انظر [2]) التأسيس لنموذج رياضي أعم ضمن المرونة دقيقة الاستقطاب(Micropolar Elasticity). وفي عام**1909** كانت المفاجئة عندما وضع الأخوان **Cosserat**(انظر[3]) النظرية العامة في الأوساط المستمرة والتي دعيت فيما بعد بالأوساط المستمرة من نوع Cosserat. أخذت هذه النظرية بعين الاعتبار وجود البصريات والتحريك الكهربائي (Electrodynamics)، والتحريك الحراري(Thermodynamics)، والتحريك المغناطيسي (Magnetodynamics). لكن عمل هذين الأخوين أُهمل ولم ينظر له حتى خمسينيات القرن الماضي. وبعد عقد من الزمن، ومع بداية البحث في مجال الأوساط المستمرة، قُيِّم هذا العمل، وأخذ بعين الاعتبار، حيث أصبح نقطة البداية لقيام نظريات أخرى مشتقة في مجال الأوساط المستمرة؛ أي نقطة البداية لدراسة نماذج رياضية لأوساط مستمرة معينة. من هؤلاء الباحثين:

١) E.Aero ([4]) و E.W.Kuvshinski ([5]) ، اللذان وضعا النموذج الرياضي، والذي دُعي فيما بعد بنموذج Aero -Kuvshinski، واختصاراً بنموذج **(A - K).**

٢) Eringen ([6]) و Nowacki ([10]) ، اللذان وضعا النموذج الرياضي، والذي دُعي فيما بعد بنموذج Eringen -Nowacki، واختصاراً بنموذج **(E - N).**

٣) W.T.Koiter ([8]) و R.D.Mindlin ([9])، اللذان وضعا نموذجاً رياضياً لوسط مادي مستمر من النوع المرن، والذي دُعي فيما بعد بنموذج Koiter-Mindlin، واختصاراً بنموذج **(K - M).**

٤) Nowacki ([11]) و Dyszlewicz ([12])، اللـذان وضـعا النمـوذج الرياضـي للجسـم الهيبـوتي، والـذي سـندعوه فيمـا بعـد بنمـوذج Nowacki-Dyszlewicz، الهيبوتي واختصاراً بنموذج **(N - D).**

٥) أما أبسط النماذج في الأوساط المستمرة، فهو نموذج هوك والذي يرمز له اختصاراً بـ **(H)** ، حيث أول من أرسى أو أسس لهذا النموذج Hooke ، أما من أعطى لهذا النموذج شكله الحالي هو كلٍ من Nowacki ([10]) و Drobot ([7]).

٦) أما أبسط النماذج في الموائع (إما السوائل أو الغازات)، فهو نموذج نيوتن، أو المائع النيوتوني والذي يرمز له اختصاراً بـ **(N)** ، حيث أول من أرسى أو أسس لهذا النموذج Newton ، أما من أعطى لهذا النموذج شكله الحالي فهما Eringen ([7]) و Heinbockle ([6]).

النموذج الرياضي لوسط مادي مستمر: ندعو بالتعريف مجموعة المعادلات والعلاقات، الأساسية، التفاضلية والجبرية، مع الشروط الحدية والشروط الابتدائية المناسبة، والتي جميعها تحكم وسطاً مادياً مستمراً، ندعوها بالنموذج الرياضي لهذا الوسط المادي المستمر.

يهدف البحث: إلى إجراء هدف البحث إجراء دراسة موسعة ومفصلة حول النماذج الرياضية **(A - K)** و **(E - N)** و **(K - M)** و **(N - D)** و **(H)** و **(N)**، مع مناقشة جميع الطرق المدروسة لحل معادلات هذه النماذج، ودراسة الحالات الحدية بين هذه النظريات.

الفصل الأول: مقدمة رياضية

لزمنا في هذه المقدمة بعض التعريفات الطبولوجية المهمة التالية:

1- تعريف المجموعة المترابطة في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$ *(حيث: d المسافة الإقليدية):* لتكن A مجموعة جزئية غير خالية في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$.نقول إن A مجموعة مترابطة في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$ إذا وفقط إذا أَمكن الوصل بين أيّة نقطتين من نقاط A بخط منحني أو منكسر يقع بأكمله في A.

2- تعريف المنطقة في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$*:* نقول عن المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$ أنها منطقة في $(\boldsymbol{R}^n, d)$ إذا وفقط إذا كانت مفتوحة ومترابطة في $(\boldsymbol{R}^n, d)$ بآنٍ واحد.

3- *تعريف المنطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليدي المألوف* $(\boldsymbol{R}^n, d)$*:* نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية A من الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\mathbb{R}^n, d)$، أنها تشكل منطقة بسيطة الترابط في $(\boldsymbol{R}^n, d)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

أ) أن تكون A منطقة في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$،

ب) أن تكون $F_r(A)$ (جبهية A في الفضاء المتري $(\boldsymbol{R}^n, d)$) مجموعة مترابطة في $(\boldsymbol{R}^n, d)$.

<u>مثال*1*:</u>

من أجل الفضاء المتري الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$ فإن الكرة المفتوحة $B(a,r)$ تشكل منطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$.

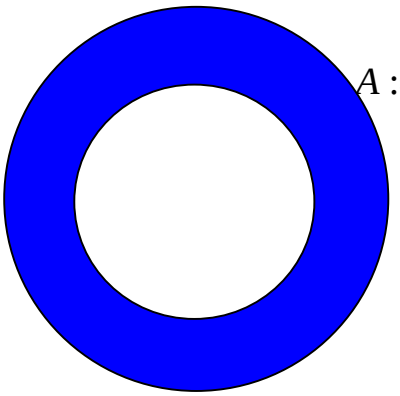
4 - *تعريف المنطقة ثنائية الترابط في الفضاء المتري الإقليدي المألوف* $(\boldsymbol{R}^n, d)$:

نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية A من الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\mathbb{R}^n, d)$ أنها تشكل منطقة ثنائية الترابط في $(\boldsymbol{R}^n, d)$،إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

أ) أن تكون A منطقة في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$ ،

ب) أن تكون $F_r(A)$ هي اجتماع مجموعتين منفصلتين ومترابطتين في $(\boldsymbol{R}^n, d)$.

<u>*مثال 2 :*</u>



إذا كان $0 < r_1 < r_2$ فإن المجموعة $A := B(a, r_2) \setminus \bar{B}(a, r_1)$ تشكل منطقة ثنائية الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$ (انظر الشكل المرافق) .

5- *تعريف المنطقة ذات المرتبة k من الترابط في الفضاء المتري الإقليدي المألوف* $(\boldsymbol{R}^n, d)$:

نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية A من الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$ أنها تشكل منطقة ذات المرتبة k من الترابط في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

أ) أن تكون A منطقة في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$،

ب) أن تكون $F_r(A)$ عبارة عن اجتماع لـ k من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى والمترابطة في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\boldsymbol{R}^n, d)$.

6 - تعريف [الدالة الحقيقية بـ n متغير حقيقي، من الصف C^m في A حيث A مجموعة جزئية مفتوحة في الفضاء المتري الإقليدي $\boldsymbol{R}^n$]:

لتكن $f : A \to \boldsymbol{R}$ دالة حقيقية بـ n متغير حقيقي ومعرفة على المجموعة المفتوحة A. نقول أن f من الصف C^m في A ونكتب رمزاً لذلك $f \in C^m(A)$ ، إذا وفقط إذا كانت f مستمرة في A وجميع مشتقاتها الجزئية حتى المرتبة m موجودة ومستمرة في A.

تعريفات مهمة في التحليل المتجهي :

7 - تدرج دالة سلمية:

لتكن A مجموعة مفتوحة في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$ و $f : A \to \boldsymbol{R}$ دالة حقيقية تتبع لثلاث متحولات حقيقية ومن الصف C^1 في A، وقاعدة ربطها: $M \equiv (x_1, x_2, x_3) \to f(M)$ ، عندئذٍ نسمي الدالة المتجهية:

$$\overrightarrow{grad}\, f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) : A \to \boldsymbol{R}^3$$

المعرَّفة بالشكل: $\overrightarrow{grad}\, f(M) := [\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(M), \frac{\partial f}{\partial x_2}(M), \frac{\partial f}{\partial x_3}(M) \,]$ ، بتدرج الدالة الحقيقية f . ونلاحظ أن التدرج يقلب الدالة الحقيقية إلى دالة متجهية.

8 – تفرق ودوران دالة متجهية:

لتكن A مجموعة مفتوحة في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$ ولتكن لدينا الدوال الحقيقية الثلاث: $f_1 , f_2 , f_3 : A \to \boldsymbol{R}$ ، التي كلٍ منها من الصف C^1 في A وتملك قواعد الربط:

$$M \equiv (x_1, x_2, x_3) \to f_1(M) \ , \ f_2(M) \ , \ f_3(M)$$

ولنأخـذ الدالــة المتجهيــة: $\vec{f} := (f_1, f_2, f_3) : A \to \boldsymbol{R}^3$ ، المعرَّفــة بالشــكل:

$\vec{f}(M) = [\ f_1(M),\ f_2(M),\ f_3(M)\ ]$ ، عندئذٍ:

أ) نسمي الدالـة الحقيقيـة: $div\,\vec{f} := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} : A \to \boldsymbol{R}$ ، المعرَّفـة بالشكل:

$div\,\vec{f}\,(M) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(M)$ ، بتفرق الدالة المتجهية $\vec{f}$.

ب) إذا رمزنـا بـــ $[\ O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\ ]$ للجملـة الإحداثيـة الديكارتيـة فـي الفضــاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$، فإننا نسمي الدالة المتجهية:

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{f} := \overrightarrow{grad} \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} : A \to \boldsymbol{R}^3$$

المعرَّفة بالشكل: $\overrightarrow{rot}\ \vec{f}\,(M) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}(M)$، بدوران الدالة المتجهية $\vec{f}$.

ولـنلاحظ أيضــاً أن التفـرق ينقلنـا مـن دالـة متجهيـة إلـى دالـة حقيقيـة (عكـس التـدرج)،بينما الـدوران يحـافظ علـى المتجهيـة ، فهـو ينقـل الدالـة المتجهيـة إلـى دالـة متجهية.

بعض خواص الـــ $\overrightarrow{grad}$ و div و $\overrightarrow{rot}$:

لتكن $\vec{f}$ دالة متجهية من الصف C^1 ، و f و g دالتان حقيقيتان أيضاً من الصف C^1 ، عندئذٍ يكون:

$$\overrightarrow{grad}\,(f\,g) = f\ \overrightarrow{grad}\ g + g\ \overrightarrow{grad}\ f \qquad -(1)$$

$$div(g\,\vec{f}) = g\ div\,\vec{f} + (\overrightarrow{grad}\ g)\cdot\vec{f} \qquad -(2)$$

$$\overrightarrow{rot}\,(g\,\vec{f}) = g\ \overrightarrow{rot}\ \vec{f} + (\overrightarrow{grad}\ g)\wedge\vec{f} \qquad -(3)$$

مبرهنة غوص:

لتكن τ منطقة بسيطة الترابط في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$، ولنفرض أن τ محاطة بالسطح المغلق S ولتكن $M\equiv(x_1,x_2,x_3)$ نقطة ما من S ولنرمز بـ $\vec{n}$ لمتجه واحدة الناظم على السطح S في M والموجَّه نحو خارج S. لتكن أيضاً $f_i:\tau\to\boldsymbol{R}$ $(i=1,2,3)$ ثلاث دوال حقيقية قاعدة ربطها: $M\equiv(x_1,x_2,x_3)\to f_i(M)$، ومن الصف C^1 في τ والصف C^0 في $\bar{\tau}=\tau\cup S$، ولنأخذ الدالة المتجهية $\vec{f}:=(f_1,f_2,f_3):\tau\to\boldsymbol{R}^3$ ، عندئذٍ كلٍ من التكاملين التاليين يكون موجود: الحجمي $\int_\tau div\,\vec{f}\,(M)\,d\tau$ والسطحي $\int_S(\vec{f}.\vec{n})(M)\,d\tau$، وتتحقق العلاقة التالية: $\int_\tau div\,\vec{f}\,(M)\,d\tau=\int_S(\vec{f}.\vec{n})(M)\,d\tau$ ، حيث $\vec{f}.\vec{n}$ هي الدالة الحقيقية: $\vec{f}.\vec{n}:\tau\to\boldsymbol{R}$ المعرّفة بالشكل التالي: $(\vec{f}.\vec{n})(M)=\vec{f}(M).\vec{n}$، وحيث $\vec{f}(M).\vec{n}$ هو الجداء الداخلي للمتجهين $\vec{f}(M)$ و $\vec{n}$.

ملاحظة: تبقى المبرهنة السابقة صحيحة حتى لو كانت τ منطقة متعددة الترابط في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$. على سبيل المثال : إذا كانت τ منطقة ثنائية الترابط في $\boldsymbol{R}^3$، وحدودها $S=S_1\cup S_2$ (حيث $S_1\cap S_2=\Phi$)، عندئذ ضمن نفس الفرضيات للمبرهنة السابقة، تتحقق علاقة غوص التالية:

$$\int_\tau div\,\vec{f}\,(M)\,d\tau=\left(\int_{S_1}+\int_{S_2}\right)(\vec{f}.\vec{n})(M)\,d\tau\ .$$

مقدمة في الهندسة التفاضلية:

*رتبة دليل :*كافة الدلائل اللاتينية تأخذ القيم:3 , 2 , 1 . مثال: الكتابة $A_i = B_i$ تعني أن العلاقة محققة من أجل: $i = 1 , 2 , 3$.

اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة: إذا كانت لدينا عبارة جبرية، أحد حدودها يحوي دليلاً مكرراً مرتين، أو أحد حدودها جداء مقدارين، يظهر في كلٍ منهما الدليل؛ مرةَ في المقدار الأول ومرةَ أخرى في المقدار الثاني، عندئذٍ اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة تعني إجراء عملية الجمع على هذا الدليل عند تحوله على قيمه: 1 , 2 , 3.

مثال: $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ ، $A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$

خواص ناتجة عن اتفاقية الجمع على الدلائل المكررة:

الخاصة الأولى: قد يحوي الحد الجبري على أكثر من دليل مكرر واحد . في هذه الحالة تطبيق اتفاقية الجمع ابتداءً من أي من الدلائل يعطي النتيجة نفسها.

مثال:

$$A_{ij} B_{ij} = A_{1j} B_{1j} + A_{2j} B_{2j} + A_{3j} B_{3j} = A_{i1} B_{i1} + A_{i2} B_{i2} + A_{i3} B_{i3}$$

الخاصة الثانية: الضرب تجميعي. مثال: $(A_{is} B_{ij}) C_{sj} = A_{is} (B_{ij} C_{sj})$

الخاصة الثالثة: الضرب توزيعي على الجمع.

مثال: $A_{ij} (B_{ijk} + C_{ijs}) = A_{ij} B_{ijk} + A_{ij} C_{ijs}$

الخاصة الرابعة: خاصة تصفية دلتا كرونيكا: $A_{ij} \delta_{jk} = A_{ik}$ ، حيث الرمز δ_{jk} يدل على دلتا كرونيكا: $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 , & j = k \\ 0 , & j \neq k \end{cases}$.

تمرين: أثبت أن $A_{jk}\,\delta_{jk} = A_{ii}$. الحل: نطبق اتفاقية الجمع بالنسبة لـ k مثلاً، ومن ثم نستخدم الخاصة السابقة فنحصل على:

$$A_{jk}\,\delta_{jk} = A_{j1}\,\delta_{j1} + A_{j2}\,\delta_{j2} + A_{j3}\,\delta_{j3} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{ii}\,.$$

تعريف مناوب ليفي – تشيفيتي : نسمي ثلاثي الأدلة e_{ijk} ، المعرَّف بالشكل:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0\ , & i = j \ \vee\ j = k \ \vee\ i = k \\ 1\ , & (i\,,\,j\,,\,k) \text{ تبديلة زوجية للاعداد } 1\,,2\,,3 \\ -1\ , & (i\,,\,j\,,\,k) \text{ تبديلة فردية للأعداد } 1\,,2\,,3 \end{cases}$$

بمناوب ليفي – تشيفيتي.

مثال: $e_{123} = 1 \quad , \quad e_{231} = 1 \quad , \quad e_{321} = -1 \quad , \quad e_{112} = 0$

خواص مناوب ليفي – تشيفيتي:

الخاصة الأولى: الخاصة التناظرية العكسية : *إذا بدلنا مابين دليلين في مناوب ليفي – تشيفيتي* e_{ijk} ، فإننا نحصل على مقدار يساوي المقدار الأصلي مسبوق بإشارة (—) :

$$e_{jik} = e_{ikj} = e_{kji} = -e_{ijk}$$

الخاصة الثانية: إذا كانت $\{A_{jk}\}_{3\times3}$ مصفوفة أعداد حقيقية من السعة 3×3 ومتناظرة $(A_{jk} = A_{kj})$ ، عندئذٍ يكون $e_{ijk}\,A_{jk} = 0$ (حيث: $i = 1\,,2\,,3$).

نتيجة عن التعريف السابق لمناوب ليفي – تشيفيتي:

لنضع $\underline{1} = (1\,,0\,,0)$ و $\underline{2} = (0\,,1\,,0)$ و $\underline{3} = (0\,,0\,,1)$ ، وبشكل عام $\underline{i}$ هي الثلاثية التي جميع عناصرها معدومة ما عدا العنصر رقم i فهو يساوي الواحد. عندئذٍ يكون:

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \\ \underline{k} \end{vmatrix}.$$

نتيجة (مناوب ليفي – تشيفيتي بدلالة دلتا كرونيكا):

إذا لاحظنا أن: $\underline{1} = (\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13})$ ، $\underline{2} = (\delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{23})$ ، $\underline{3} = (\delta_{31}, \delta_{32}, \delta_{33})$

وبالتالي $\underline{i} = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ ، فيكون عندئذٍ :

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

نتيجة (عن النتيجة السابقة):

إذا كانت $\{A_{jk}\}_{3\times3}$ مصفوفة أعداد حقيقية ورمزنا لمعينها بـــ $|A|$ ، فيكون:

$$|A| = e_{ijk}\, A_{i1}\, A_{j2}\, A_{k3}$$

نتيجة (عن النتيجة قبل السابقة):

إذا كانت $\{A_{jk}\}_{3\times3}$ مصفوفة أعداد حقيقية ، فيكون عندئذٍ :

$$\begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix} = e_{lmn}\, A_{il}\, A_{jm}\, A_{kn}$$

نتيجة (عن التعريف الأساسي لمناوب ليفي - تشيفيتي):

إذا كانت $\{A_{jk}\}_{3\times3}$ مصفوفة أعداد حقيقية ورمزنا لمعينها بـــ $|A|$ ، فيكون:

$$\begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix} = |A|\, e_{ijk}$$

نتيجة (عن النتيجتين السابقتين):

بملاحظة أن $e_{ijk}\ e_{ijk} = 6$ ، فينتج من الملاحظتين السابقتين أن:

$$|A| = \frac{1}{6}\ e_{ijk}\ e_{lmn}\ A_{il}\ A_{jm}\ A_{kn}$$

الجداءان الخارجي والمختلط بلغة مناوب ليفي – تشيفيتي:

لتكن $[\ O\ ,(\vec{e}_1\ ,\vec{e}_2\ ,\vec{e}_3)\ ]$ جملة إحداثية ديكارتية في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$، و:

$\vec{A} = A_i\,\vec{e}_i$ و $\vec{B} = B_j\,\vec{e}_j$ و $\vec{C} = C_k\,\vec{e}_k$ ثلاثة متجهات من $\boldsymbol{R}^3$ ، عندئذٍ يكون:

أولاً: $\vec{A}\wedge\vec{B} = e_{ijk}A_jB_k\vec{e}_i = e_{ijk}A_iB_j\vec{e}_k$ ،وإذا كتبنـــــــــــــــــــــــــــــا

$\vec{D} \equiv D_i\vec{e}_i := \vec{A}\wedge\vec{B}$ فيكون: $D_i = e_{ijk}\ A_j\ B_k$ أو $D_k = e_{ijk}\ A_i\ B_j$.

ثانياً: $[\ \vec{A}\ ,\vec{B}\ ,\vec{C}\ ]\ =\ e_{ijk}\ A_i\ B_j\ C_k$.

ملاحظة: إذا كانت f دالة حقيقية تتبع للمتحولات حقيقية x_1 و x_2 و x_3 ،وفرضنا أن f من الصف C^1 ، فسنصطلح أن $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}$ ، بالتالي إذا كانت f من الصف C^2 فسيصبح الاصطلاح : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = f_{,ij}$.

كتابة الـ $\overrightarrow{grad}$ و div و $\overrightarrow{rot}$ باستخدام اتفاقية الجمع الدليلي:

وفقاً لاتفاقية الجمع الدليلي:

أولاً : تدرج الدالة الحقيقية f هو: $\overrightarrow{grad}\ f := \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \vec{e}_i = f_{,i}\ \vec{e}_i$ ،

ثانياً : تفرق الدالة المتجهية $\vec{f} \equiv (f_1,\ f_2,\ f_3)$ هو : $div\,\vec{f} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = f_{i,i}$ ،

ثالثاً : دوران الدالة المتجهية $\vec{f} \equiv (f_1,\ f_2,\ f_3)$ هو :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{f} := \overrightarrow{grad} \wedge \vec{f} = e_{ijk} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\ \vec{e}_i = e_{ijk}\ f_{k,j}\ \vec{e}_i \ .$$

مشتق دالة حقيقية في اتجاه متجه واحدة $\vec{n}$:

لتكن D مجموعة مفتوحة في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^n$ و $f : D \to \boldsymbol{R}$ دالة حقيقية من الصف C^1 في D ، عندئذٍ يعطى مشتق الدالة f في الاتجاه $\vec{n} = n_i\ \vec{e}_i$ ، بالعلاقة:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{grad}\ f = n_i\ \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

مبرهنة ستوكس - هيلمهولتز:

لتكن τ منطقة بسيطة الترابط في الفضاء الاقليدي ثلاثي البعد $\boldsymbol{R}^3$ ، و $\vec{f} : \tau \to \boldsymbol{R}^3$ دالة متجهية مستمرة في τ ،عندئذ توجد دالتان: الأولى حقيقية: $\Phi : \tau \to \boldsymbol{R}$ من الصف C^1 في τ، والثانية متجهية $\vec{\Psi} : \tau \to \boldsymbol{R}^3$ ، أيضاً من الصف C^1 في τ وبحيث يكون: $\vec{f} = \overrightarrow{grad}\ \Phi + \overrightarrow{rot}\ \vec{\Psi}$ (وبحيث يكون: $div\ \vec{\Psi} = 0$).

نسمي $\overrightarrow{grad}\ \Phi$ بالجزء الكموني للدالة المتجهية $\vec{f}$ ، كما ندعو $\overrightarrow{rot}\ \vec{\Psi}$ بالجزء الدوأّر للدالة المتجهية $\vec{f}$. وإذا كان $\overrightarrow{rot}\ \vec{\Psi} = \vec{0}$ ، فنقول إن الدالة المتجهية $\vec{f}$ كمونية ، أما إذا كان $\overrightarrow{grad}\ \Phi = \vec{0}$ ، فنقول إن الدالة المتجهية $\vec{f}$ دوَّارة.

صيغ ستوكس-هيلمهولتز السلمية باستخدام اتفاقية الجمع:

لنفرض أن $\vec{f} \equiv f_i\ \vec{e}_i$ و $\vec{\Psi} \equiv \Psi_i\ \vec{e}_i$. وجدنا سابقاً أن:

$\overrightarrow{grad}\ \Phi := \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\ \vec{e}_i = \Phi_{,i}\ \vec{e}_i$ و $\overrightarrow{rot}\ \vec{\Psi} = e_{ijk} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_j}\ \vec{e}_i = e_{ijk}\ \Psi_{k,j}\ \vec{e}_i$.

بالتعويض في صيغة ستوكس – هيلمهولتز المتجهية (المبرهنة السابقة) ، نجد:

$f_i\ \vec{e}_i = (\ \Phi_{,i} + e_{ijk}\ \Psi_{k,j})\ \vec{e}_i$. وبالإسقاط على $\vec{e}_i$ ، نحصل على صيغ ستوكس – هيلمهولتز السلمية التالية:

$$f_i = \Phi_{,i} + e_{ijk}\ \Psi_{k,j} \qquad (\text{حيث: } \Psi_{k,k} = 0\ )$$

تعريف مؤثر لابلاس السلمي:

نسمي المؤثر التفاضلي السلمي $\nabla^2 := div\ \overrightarrow{grad}$ المعرف بالشكل $\nabla^2 f := div\,(\overrightarrow{grad}\, f\ )$ (حيث f دالة حقيقية)، بمؤثر لابلاس السلمي.

تعريف مؤثر لابلاس المتجهي:

نسمي المؤثر التفاضلي المتجهي : $\vec{\nabla}^2 := \overrightarrow{grad}\ div - \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}$ ، المعرف بالشكل: $\vec{\nabla}^2 \vec{f} := \overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{f}\,) - \overrightarrow{rot}\ (\overrightarrow{rot}\ \vec{f}\,)$ (حيث $\vec{f}$ دالة متجهية) ، بمؤثر لابلاس المتجهي.

نتيجة: إذا كانت $[\ O\,,(\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\ ]$ جملة إحداثية ديكارتية في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$، و $f = f_i\,\vec{e}_i$ دالة متجهية من الصف C^2، عندئذٍ يكون: $\vec{\nabla}^2 \vec{f} = (\nabla^2\ f_i)\ \vec{e}_i$.
وسنكتب اختصاراً لذلك: $\vec{\nabla}^2 = (\ \nabla^2, \nabla^2, \nabla^2\ )$.

نتيجة عن (النتيجة السابقة) :

إذا كانت $\vec{f} = f_i\,\vec{e}_i$ دالة متجهية، حيث f_i دوال حقيقية من الصف C^2 وتتبع لمتحولات الموضع x_1 و x_2 و x_3 وللزمن t ، ورمزنا بـ $\vec{L}_{(a\,,b)} = a\ \vec{\nabla}^2 + b\ \partial_t^2$ و بـ : $L_{(a\,,b)} = a\ \nabla^2 + b\ \partial_t^2$ ،حيث a و b زوج

مـــــن الأعـــــداد الحقيقيـــــة و $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ و $\partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ،عندئـــــذٍ يكـــــون:

$\vec{L}_{(a\,,b)}\ \vec{f} = [\ L_{(a\,,b)}\ f_i\ ]\ \vec{e}_i$ ، وسنكتب اختصاراً لذلك:

$$\vec{L}_{(a\,,b)} = [\ L_{(a\,,b)}\ ,\ L_{(a\,,b)}\ ,\ L_{(a\,,b)}\ ]$$

خواص موثرا لابلاس المتجهي والسلمي:

إن موثرا لابلاس المتجهي والسلمي يحققان الخوص التالية:

(1) - $\overrightarrow{grad}\ \nabla^2 = \vec{\nabla}^2\ \overrightarrow{grad}$:أي أن تطبيـق التـدرج علـى لابلاسـيان السـلمي يحوله إلى متجهي بعد تغيير موضعه.

(2) - $div\ \vec{\nabla}^2 = \nabla^2\ div$: أي أن تطبيق التفرق على لابلاسيان المتجهي يحولـه إلى سلمي بعد تغيير موضعه.

(3) - $\overrightarrow{rot}\ \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}^2\ \overrightarrow{rot}$:أي أن الـدوران يحـافظ علـى لابلاسـيان المتجهـي بعـد تغيير موضعه.

نتائج:

(1) - $$\overrightarrow{grad}\ L_{(a\,,b)} = \vec{L}_{(a\,,b)}\ \overrightarrow{grad}$$

(2) - $$div\ \vec{L}_{(a\,,b)} = L_{(a\,,b)}\ div$$

(3) - $$\overrightarrow{rot}\ \vec{L}_{(a\,,b)} = \vec{L}_{(a\,,b)}\ \overrightarrow{rot}$$

(4) - $$L_{(a_1\,,b_1)}\ L_{(a_2\,,b_2)} = L_{(a_2\,,b_2)}\ L_{(a_1\,,b_1)}$$

(5) - $$\vec{L}_{(a_1\,,b_1)}\ \vec{L}_{(a_2\,,b_2)} = \vec{L}_{(a_2\,,b_2)}\ \vec{L}_{(a_1\,,b_1)}$$

الفصل الثاني: نماذج رياضية في ميكانيك الأوساط المستمرة من النوع المرن

1 .النموذج التقليدي ونموذج Lame لجسم Hooke المرن (H)

الكميات التحريكية لهذا الجسم بالشكل اللاغرانجي:

لتكن $ox_1x_2x_3$ جملة مقارنة ديكارتية،عطالية، قاعدتها $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$. وليكن Ω جسماً مرناً مهمل البنية الجزيئية، وتشوهاته صغيرة، ومحاطاً بالسطح المغلق $\partial\Omega$ ولتكن $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)$ نقطة من $\partial\Omega$ ولنرمز بـ $\overrightarrow{n_0}\left(x\right)$ لمتجه واحدة ناظم السطح $\partial\Omega$ في النقطة المادية x منه، والموجه نحو خارج Ω.

في اللحظة $t>0$ (لحظة التشوه) وكون أن الجسم هو بالأساس وسط مادي مستمر،مهمل البنية الجزيئية، فإن الحجم اللاغرانجي Ω يؤول إلى الحجم الأولري Ω' و نقاط $\partial\Omega$ تؤول إلى نقاط السطح $\partial\Omega'$ المحيط بـ Ω' ، فإذا كانت $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)$ نقطة مادية لاغرانجية من Ω (من $\partial\Omega$)، فإنها تصبح في اللحظة $t>0$، النقطة المادية الأولرية $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)$ من Ω' (من $\partial\Omega'$).

لنرمزعندئذ بـ $\vec{n}=\vec{n}\left(\xi,t\right)$ لمتجه واحدة ناظم السطح $\partial\Omega'$ في النقطة $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)$ ، منه، واللحظة $t>0$، والموجه نحو خارج $\partial\Omega'$. عندئذ ينتج عن العلاقات التالية:

$$\xi_i=\xi_i\left(x,t\right)=\xi_i\left(x_1,x_2,x_3\right)\quad;\quad i=\left(1,2,3\right)$$

ما يلي :

1- الشكل اللاغرانجي لدالة الكثافة الحجمية $\rho(\xi,t)$ هو:

$$\rho(x,t)=\rho(\xi,t) \qquad (\text{حيث: } \xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\Omega')$$

2- الشكل اللاغرانجي لمتجه الإزاحة $\vec{u}(\xi,t)$ هو:

$$\vec{u}(x,t)=u_i(x,t)\vec{e_i}=\left[\xi_i(x,t)-x_i\right]\vec{e_i}$$

3- الشكل اللاغرانجي للقوة الحجمية $\vec{F}(x,t)$ هو:

$$\vec{F}(x,t)=\vec{F}(\xi,t)=F_i(x,t)\vec{e_i}=F_i(\xi,t)\vec{e_i}$$

4- الشكل اللاغرانجي لقوة الكتلة $\vec{F}(x,t)$ هو:

$$\vec{F}(x,t)=\vec{F}(\xi,t)=F_i(x,t)\vec{e_i}=F_i(\xi,t)\vec{e_i}$$

5- الشكل اللاغرانجي لقوة الإجهاد $\overrightarrow{P^{(n)}}(\xi,t)$ هو:

$$\overrightarrow{P^{(n)}}(x,t)=\overrightarrow{P^{(n)}}(\xi,t)=P_i^{(n)}(x,t)\,\overrightarrow{.e_i}=P_i^{(n)}(\xi,t)\,\overrightarrow{.e_i}$$

6- الشكل اللاغرانجي لمصفوفة الانفعالات:

$$\varepsilon_{ij}(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x,t)+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x,t)\right]=\frac{1}{2}\left[u_{i,j}(x,t)+u_{j,i}(x,t)\right]$$

حيث: $u_i=\xi_i(x,t)-x_i$ هي المركبات الديكارتية، اللاغرانجية، لمتجه إزاحة النقطة المادية اللاغرانجية $\boldsymbol{x}$ في اللحظة $t>0$. إن المصفوفة ε_{ij} السابقة،كما نلاحظ، متناظرة لأن: $\varepsilon_{ij}(x,t)=\varepsilon_{ji}(x,t)$.

فيما يلي، من أجل متطلبات هذه الرسالة، سنعرض كل من الوصف التقليدي ووصف **لامي** لجسم **هوك** المرن، غير المتجانس، والمتجانس، الإنيزوتروبي (غير

موحّد خواص المرونة)، والإيزوتروبي (الموحد خواص المرونة)، لأجل كل من الحالة التحريكية، والحالة السكونية له. ولهذا الغرض سنعرض أولاً الحالة التحريكية المرنة لجسم **هوك** المذكور.

*الحالة التحريكية المرنة لجسم **هوك** المرن:*

لنرمز بـ $T^{+} :=]0,\infty[$ و $T := [0,\infty[$ وبـ $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ (حيث: $\partial\Omega$ حدود Ω، والتي سنفترض أنها ملساء). عندئذ توصف الحالة التحريكية المرنة لجسم **هوك** المرن ، بواسطة مجموعة الحقول الفيزيائية: $\{\vec{u}\ ,\ \underset{\sim}{\varepsilon}\ ,\ \underset{\sim}{\sigma}\}$، على $\bar{\Omega} \times T$ ، حيث $\vec{u}$ دالة متجهية، وتدعى متجه الإزاحة ، و $\underset{\sim}{\varepsilon}$ دالة تنسورية وتسمى بتنسور الانفعال وهو تنسور متناظر، و $\underset{\sim}{\sigma}$ دالة تنسورية، وتسمى بتنسور الإجهاد وهو أيضاً تنسور متناظر.

*الحالة التحريكية المرنة لجسم **هوك** المرن في النظام الإحداثي الديكارتي:*

توصف الحالة التحريكية المرنة لجسم **هوك** المرن في النظام الإحداثي الديكارتي $[O,(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)]$ ، بواسطة مجموعة الحقول الفيزيائية: $\{\vec{u}\ ,\ \underset{\sim}{\varepsilon}\ ,\ \underset{\sim}{\sigma}\}$ التالية، على $\bar{\Omega} \times T$:

$$\vec{u} \equiv (u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3) \tag{1.1}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

$$\underset{\sim}{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

حيث أن مصفوفتي المركبات لكلٍ من $\underset{\sim}{\varepsilon}$ و $\underset{\sim}{\sigma}$ متناظرتين.

أولاً: النموذج التقليدي لجسم هوك المرن.

١) النموذج الرياضي التقليدي لجسم هوك المرن غير المتجانس والأنيزوتروبي، في النظام الإحداثي الديكارتي:

يطلب إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية $\left\{ \vec{u} \ , \ \underset{\sim}{\varepsilon} \ , \ \underset{\sim}{\sigma} \right\}$ في $\Omega \times T$ ، التي هي من الشكل (1.1) ، (1.2) و (1.3) والتي تحقق معادلات الحقل والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية:

معادلات الحركة المحققة في $\Omega \times T^{+}$ *:*

$$\sigma_{j\,i\,,j}(x\,,t)+X_{i}(x\,,t)=\rho(x)\,\ddot{u}_{i}(x\,,t) \qquad (1.4)$$

حيث: $\vec{X} \equiv (\,X_1, X_2\,, X_3\,)$ هي دالة متجهية معلومة في $\Omega \times T^{+}$ ، وتدل على حقل القوة الحجمية للجسم ، $\rho(x)>0$ تابع الكثافة الحجمية للجسم (وهو نفسه تابع الكثافة الحجمية له في لحظة البدء). النقطة تعني المشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f}=\dfrac{\partial}{\partial t}$ و $\ddot{f}=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$. وهنا ننوه إلى أننا اعتمدنا رموز أينشتاين (اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة في R^3).

معادلات توافق الانفعالات، المحققة في $\Omega \times T$ *:*

$$\varepsilon_{i\,j\,,k\,l}(x\,,t)+\varepsilon_{k\,l\,,i\,j}(x\,,t)-\varepsilon_{i\,k\,,j\,l}(x\,,t)-\varepsilon_{j\,l\,,i\,k}(x\,,t)\ =\ 0 \qquad (1.5)$$

العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega \times T^{+}$ *:*

$$\varepsilon_{i\,j}(x\,,t)=\frac{1}{2}\ [\ u_{i\,,\,j}(x\,,t)+u_{j\,,\,i}(x\,,t)\ ] \qquad (1.6)$$

المعادلات التأسيسية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\sigma_{i\,j}\left(\boldsymbol{x}\,,\,t\right) = C_{i\,j\,k\,l}\left(\boldsymbol{x}\right)\,\varepsilon_{k\,l}\left(\boldsymbol{x}\,,\,t\right) \qquad (1.7)$$

حيث: $\left\{ C_{i\,j\,k\,l}\left(\boldsymbol{x}\right) \right\}_{3\times3\times3\times3}$، مصفوفة المرونة لجسم **هوك** المرن، وهي تحقق الخواص التناظرية التالية في Ω :

$$C_{i\,j\,k\,l}\left(\boldsymbol{x}\right) = C_{j\,i\,k\,l}\left(\boldsymbol{x}\right) = C_{k\,l\,i\,j}\left(\boldsymbol{x}\right) \qquad (1.8)$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$ *(* $\partial\Omega$ *هي الحدودية الملساء لـ* Ω *) :*

$$\sigma_{j\,i}\left(\boldsymbol{x}\,,\,t\right) n_j\left(\boldsymbol{x}\right) = p_i\left(\boldsymbol{x}\,,\,t\right) \qquad (1.9)$$

حيث الدوال $p_i : \partial\Omega \times T \to R$ ، مفروضة، كما أن: $n_i\left(\boldsymbol{x}\right) = n_i^0\left(\boldsymbol{x}\right)$ هي المركبات الديكارتية لمتجه واحدة الناظم $\vec{n}\left(\boldsymbol{x}\right) = \vec{n_0}\left(\boldsymbol{x}\right)$ للسطح $\partial\Omega$ في النقطة المادية اللاغرانجية $\boldsymbol{x}$ واللحظة $t = 0$، والموجه نحو خارج $\partial\Omega$.

الشروط الابتدائية والمحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_i = f_i \qquad \text{و} \qquad \dot{u}_i = g_i \qquad (1.10)$$

حيث f_i و g_i دوال مفروضة في Ω.

ما بين خمسينيات وثمانينات القرن الماضي أثبت العديد من واضعي هذا النموذج ومنهم الباحث **نوفاتسكي** وحدانية الحل لهذا النموذج (مجموعة الدوال $\left\{ \vec{u}\,,\,\underset{\sim}{\varepsilon}\,,\,\underset{\sim}{\sigma} \right\}$، المحققة للوصف التقليدي (1.1) - (1.10) وحيدة)، (انظر **نوفاتسكي** 1970).

٢) الوصف التقليدي لجسم هوك المرن غير المتجانس وغير موحد خواص المرونة ضمن الحالة السكونية المرنة للجسم، وفي النظام الاحداثي الديكارتي:

يطلب إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية $\left\{ \vec{u} \ , \ \underset{\sim}{\varepsilon} \ , \ \underset{\sim}{\sigma} \right\}$ في Ω ، التي هي من الشكل (1.1) ، (1.2) و (1.3) والتي تحقق معادلات الحقل والعلاقات الأساسية والشروط الحدية التالية:

معادلات التوازن، المحققة في Ω:

$$\sigma_{j\,i\,,j}(x) + X_i(x) = 0 \qquad (1.11)$$

حيث الدالة: $\vec{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$ مفروضة في Ω ، وتدل على حقل القوة الحجمية للجسم ،

معادلات توافق الانفعالات، المحققة في Ω:

$$\varepsilon_{i\,j\,,k\,l}(x) + \varepsilon_{k\,l\,,i\,j}(x) - \varepsilon_{i\,k\,,j\,l}(x) - \varepsilon_{j\,l\,,i\,k}(x) = 0 \qquad (1.12)$$

العلاقات الهندسية المحققة في Ω :

$$\varepsilon_{i\,j}(x) = \frac{1}{2}\left[\, u_{i\,,j}(x) + u_{j\,,i}(x) \,\right] \qquad (1.13)$$

العلاقات التأسيسية المحققة في Ω :

$$\sigma_{i\,j}(x) = C_{i\,j\,k\,l}(x)\ \varepsilon_{k\,l}(x) \qquad (1.14)$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega$:

$$\sigma_{j\,i}(\boldsymbol{x})\,n_j(\boldsymbol{x}) = p_i(\boldsymbol{x}) \qquad (1.15)$$

حيث الدوال $p_i : \partial\Omega \to R$ معطاة.

ثانياً : وصف لامي لجسم هوك المرن. *١) وصف **لامي** لجسم **هوك** المرن غير المتجانس وغير موحد خواص المرونة، ضمن الحالة التحريكية للجسم المرن، وفي النظام الاحداثي الديكارتي:*

يطلب إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية $\{\vec{u}\ ,\ \underset{\sim}{\varepsilon}\ ,\ \underset{\sim}{\sigma}\}$ في $\Omega \times T$ ، التي هي من الشكل (1.1) ، (1.2) و (1.3) والتي تحقق معادلات الحقل والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية:

معادلات لامي للحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left\{C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\left[u_{k,l}(\boldsymbol{x},t)+u_{l,k}(\boldsymbol{x},t)\right]\right\}_{,j} + X_i(\boldsymbol{x},t) = \rho_0(\boldsymbol{x})\,\ddot{u}_i(\boldsymbol{x},t) \\ \boldsymbol{x}\in\Omega \quad \wedge \quad t>0 \end{cases} \qquad (1.16)$$

العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}\left[u_{i,j}(\boldsymbol{x},t)+u_{j,i}(\boldsymbol{x},t)\right] \\ \boldsymbol{x}\in\Omega \quad \wedge \quad t>0 \end{cases} \qquad (1.17)$$

العلاقات التي تعطينا الاجهادات بدلالة الإزاحات، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\left[u_{k,l}(\boldsymbol{x},t)+u_{l,k}(\boldsymbol{x},t)\right] \\ \boldsymbol{x}\in\Omega \quad \wedge \quad t>0 \end{cases} \qquad (1.18)$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\frac{1}{2}C_{ijkl}(x)\left[u_{k,l}(x,t)+u_{l,k}(x,t)\right]n_j(x)=p_i(x,t) \quad (1.19)$$

حيث الدوال $p_i : \partial\Omega\times T \to R$ ، مفروضة.

الشروط الابتدائية والمحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_i = f_i \quad \text{و} \quad \dot{u}_i = g_i \qquad (1.20)$$

حيث f_i و g_i دوال مفروضة في Ω.

آلية حل المسألة : بحل معادلات لامي (1.16) ضمن الشروط الحدية (1.19) والشروط الابتدائية (1.20)، نحصل على حل وحيد u_i ، أنظر المرجع (**كوبرادسي** 1965) . نعوض في العلاقات الهندسية (1.17)، فنحصل على ε_{ij} ، الوحيد. وبتعويض الحل u_i في العلاقات(1.18)، التي تعطينا الاجهادات بدلالة الإزاحات، نحصل على σ_{ij}، الوحيد .

تعريف: ندعو مجموعة التوابع $\{\sigma_{ij}(x,t)\ ,\ \varepsilon_{ij}(x,t)\ ,\ u_i(x,t)\}$*، المحققة في* $\bar{\Omega}\times T$ *، لوصف لامي* (1.20) - (1.16)*، ندعوها بالحالة التحريكية المرنة* ***للامي*** *والمتعلقة بجسم* ***هوك*** *المرن غير المتجانس وغير موحد خواص المرونة.*

2.نموذج الجسم المرن دقيق الاستقطاب:(E- N) Eringen- Nowacki:

في البداية سنجمع المعادلات والعلاقات الأساسية للجسم المرن دقيق الاستقطاب من النوع Eringen - Nowacki، الذي يتمتع بست درجات حرية والذي يخضع لشروط معينة. إن الجسم المرن دقيق الاستقطاب متجانس ومتماثل المناحي

ومركـزي التنــاظر. نفـرض وجـود جملــة مقارنــة عطاليــة (ديكارتيــه) قاعـدتها $(\vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_2\ ,\ \vec{e}_3)$ ، كمــا سنســتخدم الجمــع التنســوري (الــديكارتي) علــى رمــوز Eienshtain . ســنرمز بالفاصــلة الدليليــة للمشــتق الجزئــي بالنســبة لمتحــولات الموضع، وبالنقطة للمشتق الجزئي الزمني:

$$f_{,i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}\ ,\ \dot{f} := \frac{\partial f}{\partial t}$$

حيث الأدلة اللاتينية الصغيرة تأخذ القيم : $i\ ,\ j\ ,\ k\ ,\ldots = 1,2,3$

أما الأدلة اللاتينية الكبيرة تأخذ القيم : $K\ ,L\ ,M\ ,N\ ,\ldots = 2,3$

أما الأدلة الإغريقية فتأخذ القيم : $\alpha,\beta,\gamma,\ldots = 1,2$

الرمز e_{ijk} يدل علـى منـاوب Levi - Civita ، و δ_{ij} هو رمز دلتـا - كرونيكر، $\mathbb{R}$ ستمثل مجموعة الأعداد الحقيقية ، $\mathbb{R}^3$ يمثل الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد ، أي فضــاء النقـاط $x = (x_1, x_2, x_3)$ ، Ω هـي منطقـة فـي $\mathbb{R}^3$ ذات حـدود $\partial\Omega$ ملســاء جزئياً .كما سنفرض أن $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ، وسنرمز للمجالات الزمنية على النحو التالي :

$$T := [0,\infty[\ = \{t \in R\,;t \geq 0\}, T_+ =]0,\infty[\ = \{t \in R\,;t > 0\}$$

الرمز $\overline{\Omega}\times T$ يرمز للجداء الديكارتي للمجموعتين $\overline{\Omega}\ ,\ T$:

$$\overline{\Omega}\times T = \{(x\ ,t);x \in \overline{\Omega}, t \in T\}$$

وبالطريقة نفسها يمكن تعريف المجموعات $\Omega\times T_+$ و $\Omega\times T$ و $\partial\Omega\times T$.

سنعتبر الجسم المرن دقيق الاستقطاب $\Omega\ (\mu,\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\rho,J,\kappa,\eta_0,\nu_T)$ ، الموصوف من خلال مجموعة الوسطاء الموجودة ما بين قوسين ، والتي هي عبارة عن مقادير ترموديناميكية مرنة وذات قيم حقيقية .

تمثل المنطقة Ω الحالة البدئية دقيقة الاستقطاب للجسم المرن دقيق الاستقطاب. كافة الحقول الفيزيائية التي تصف الحالات الترموديناميكية المرنة للجسم المرن دقيق الاستقطاب هي عبارة عن دوال حقيقية تتبع لمتحولات الموضع $x \equiv (x_1,x_2,x_3)$ والزمن ايضاً ، سنعبر عن كون f معرفة على $\bar{\Omega}\times T$ بالرمز:

$$f\ :\bar{\Omega}\times T \longrightarrow \mathbb{R}$$

الرمز $f\in C^n(\Omega)$ يعني أن f وجميع مشتقاتها بالنسبة لـ x_3,x_2,x_1 حتى المرتبة n ، جميعها مستمرة في Ω ، سنفرض أن كافة الحقول الفيزيائية التي تصف الجسم ملساء بالقدر الكافي.

إن المعادلات الأساسية لنموذج Eringen – Nowacki تقسم إلى المجموعات التالية:

_ معادلات الحركة في $\Omega\times T_+$:

$$\sigma_{ji,j}+X_i=\rho\ddot{u}_i\ ,\quad \in_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{ji,j}+Y_i=J\ddot{\varphi}_i \qquad (0.1)$$

حيث $\sigma_{ji},\mu_{ji}\in C^1(\Omega\times T_+)$ هما مصفوفتان من السعة 3×3 ، وعلى الترتيب تمثلان مصفوفة مركبات تنسور إجهادات القوة (وهي مصفوفة غير متناظرة) ، ومصفوفة مركبات تنسور إجهادات العزم (وهي أيضاً مصفوفة غير متناظرة).

و $X_i\ ,Y_i\in C^0(\Omega\times T)$ تمثلان على الترتيب المركبات الديكارتية للقوة الحجمية وللعزوم الحجمية .

كمــا أن : $u_i, \varphi_i \in C^2(\Omega \times T_+)$ علــى الترتيــب تمثــل مركبــات متجــه الإزاحــة ومركبات متجه الدوران.

أخيراً ρ, J على الترتيب تمثلان الكثافة الحجمية والعطالة الدورانية للجسم المرن دقيق الاستقطاب ،

معادلات التوافق في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\gamma_{li,h} - \gamma_{hi,l} - \epsilon_{khi}\ \kappa_{lk} + \epsilon_{kli}\ \kappa_{hk} = 0\ , \\ &\kappa_{li,h} - \kappa_{hi,l} = 0 \end{aligned} \tag{0.2}$$

حيث هنا : $\gamma_{ji}, \kappa_{ji} \in C^1(\Omega \times T)$ هما على الترتيب المركبات الديكارتية لتنسور الانفعالات اللاتناظري و تنسور الانفعالات الدقيقة اللاتناظري (تنسور الانفعالات الانثنائية - الدورانية) .

إن المركبات γ_{ji} و κ_{ji} معرفة بالشكل التالي من خلال :

- العلاقات الهندسية في $\Omega \times T_+$:

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji}\ \varphi_k\ , \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j} \tag{0.3}$$

- العلاقات التأسيسية في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + (\lambda \gamma_{\kappa\kappa} - \nu_T \theta)\delta_{ij}\,, \\ &\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ij} + \beta \kappa_{kk} \delta_{ij}\,, \end{aligned} \tag{0.4}$$

حيــث هنــا $\mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ هــي ثوابــت المرونــة دقيقــة الاســتقطاب ، كمــا أن : $\nu_T = (2\psi + 3\lambda)\alpha_T$ ، حيث α_T هو معامل التمدد الحراري الخطي للجسم.

ان الدالة: $\theta := T - T_0$ تصف الحقل الحراري وهي تحقق:

- معادلة التوصيل الحراري المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\theta_{,ii} - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} - \eta_0 \dot{u}_{j,j} = -\frac{Q}{\kappa}, \qquad (0.5)$$

حيث :

$$Q = \frac{\kappa W}{\lambda_0}, \qquad \kappa = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}, \qquad \eta_0 = \frac{\nu_T T_0}{\lambda_0}, \qquad \theta \in C^2(\Omega \times T_+),$$

Q :هي المصادر الحرارية في الجسم ، W :هي كمية الحرارة المشكلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن ، λ_0 معامل التوصيل الحراري ، T_0 : حرارة الحالة الطبيعية للجسم ، c_ε هي الحرارة النوعية أثناء تشوه ثابت للجسم.

بتعويض العلاقات التأسيسية (0.4) في معادلات الحركة (0.1) من ثم باستخدام العلاقات الهندسية (0.3) نحصل على

$$\begin{aligned} &(\mu+\alpha)u_{i,jj} + (\lambda+\mu-\alpha)u_{j,ji} + 2\alpha \in_{ijk} \varphi_{k,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i + \nu_T \theta_{,i}, \\ &(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,jj} - 4\alpha\varphi_i + (\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi_{j,ji} + 2\alpha \in_{ijk} u_{k,j} + Y_i = J\ddot{\varphi}_i. \end{aligned} \qquad (0.6)$$

إن الهدف الأساسي لنظرية المرونة دقيقة الاستقطاب هو تعيين السلوك الترموديناميكي المرن ودقيق الاستقطاب:

$$u_i, \varphi_i, \theta, \sigma_{ji}, \mu_{ji}, \gamma_{ji}, \kappa_{ji} : \bar{\Omega} \times T \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (0.7)$$

للوسط المادي المستمر المرن دقيق الاستقطاب : $\Omega(\mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, J, \kappa, \eta_0, \nu_T)$ في $\bar{\Omega} \times T$ بما يتوافق مع:

- معادلات وعلاقات الحقل الأساسية (0.6) - (0.1)،

(مع المعطيات : القوة الحجمية $X_i : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ ، والعزم الحجمي : $Y_i : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ ، ومع المصادر الحرارية : $Q : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}$) ،

- الشروط الحدية : حيث تعطى فيها الإزاحات و الدورانات على جزء السطح $\partial\Omega_u$ للجسم ، كما تعطى فيها إجهادات القوة وإجهادات العزم على جزء

السطح $\partial\Omega_\sigma = \partial\Omega - \partial\Omega_u$ للجسم ، وتعطى فيها أيضا الحرارة على جزء السطح $\partial\Omega_\theta$ للجسم ، كما يعطى فيها التدفق الحراري على الجزء $\partial\Omega_q = \partial\Omega - \partial\Omega_\theta$ لسطح الجسم .

- الشروط الابتدائية : وتعطى فيها الحقول التالية في لحظة البدء $t = 0$: حقل الازاحات ، حقل الدورانات ، الحقل الحراري ، وحقل سرع الازاحات ، وحقل سرع الدورانات.

إن الصياغة السابقة تكافئ الصياغة التالية:

يطلب إيجاد الحل النظامي:

$$u_i, \varphi_i, \theta \in C^2(\Omega \times T) \cap C^1(\bar{\Omega} \times T) \qquad (0.8)$$

لمعادلات الحركة بالازاحات و الدورانات والحرارة (0.6) ولمعادلة التوصيل الحراري (0.5) كل ذلك مضافاً إليه الشروط الحدية والابتدائية التالية:

- الشروط الحدية على $\partial\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ji} n_j = p_i, \quad \mu_{ji} n_j = m_i && on\ \partial\Omega_\sigma \times T, \\ &u_i = f_i, \quad \varphi_i = g_i && on\ \partial\Omega_u \times T, \\ &\theta = \nu && on\ \partial\Omega_\theta \times T, \\ &\frac{\partial\theta}{\partial n} = q && on\ \partial\Omega_q \times T, \end{aligned} \qquad (0.9)$$

حيث التوابع التالية معطاة:

$$\begin{aligned} &p_i, m_i : \partial\Omega_\sigma \times T \to \mathbb{R},\ f_i, g_i : \partial\Omega_u \times T \to \mathbb{R}, \\ &\nu : \partial\Omega_\theta \times T \to \mathbb{R}\ and\ \ q : \partial\Omega_q \times T \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

وحيث الرمز $\frac{\partial\theta}{\partial n}$ يعني مشتق θ وفق متجه واحدة الناظم n : $\frac{\partial\theta}{\partial n} := (grad\,\theta).n$.

- الشروط الابتدائية في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_i = h_i\ , \quad \varphi_i = k_i\ , \qquad \theta = l\ , \qquad \dot{u}_i = \psi_i\ , \qquad \dot{\varphi}_i = \chi_i\ , \tag{0.10}$$

حيث التوابع التالية معطاة :

$$h_i, k_i, l, \psi_i, \chi_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

إن نظرية المرونة دقيقة الاستقطاب تتميز بأنها ظاهرية طبيعية (قائمة على الظواهر الطبيعة) ، حيث الجسم المرن دقيق الاستقطاب والمتماثل المناحي يوصف بالوسطاء الترموديناميكية : $\mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, J, \kappa, \eta_0$ and ν_T التي تُحدد من خلال التجارب وتخضع إلى بعض القيود. وبشكل خاص الوسطاء $\kappa, \eta_0, \nu_T, \rho, J$ يجب أن تتحق المتراجحات التالية:

$$\frac{\nu_T}{\eta_0} > 0, \qquad \kappa > 0, \qquad \rho > 0, \qquad J > 0 \tag{0.11}$$

اعتماداً على ترموديناميك العمليات غير العكوسة ، وفي حالة الجسم المرن دقيق الاستقطاب متماثل المناحي والمتجانس ومركزي التناظر ، نحصل على التمثيل التالي لطاقة هيلمهولتر الحرة للجسم : $F = U - ST$ ، حيث U هي الطاقة الداخلية، و S هي الانتروبية لكل واحدة حجم ، كما أن T هي درجة الحرارة المطلقة لكل واحدة حجم:

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{\mu+\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ji} + \frac{\mu-\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn} + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\kappa_{ji}\kappa_{ji} \\ & + \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\kappa_{ji}\kappa_{ij} + \frac{\beta}{2}\kappa_{kk}\kappa_{nn} - \nu_T\gamma_{kk}\theta + G(\theta), \qquad (\theta = T - T_0). \end{aligned} \tag{0.12}$$

وهنا $G(\theta)$ ترمز لكل الحدود التي تتبع فقط للحرارة.

من عبارة الطاقة الحرة: $F(\gamma_{ji}, \kappa_{ji}, \theta)$ ، ومن العلاقتين:

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ji}}, \qquad \mu_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \kappa_{ji}}, \tag{0.13}$$

تنتج العلاقتان (0.4) اللتان تربطان حقلي الإجهادات بحقلي الانفعالات وبالحقل الحراري ، إن الطاقة الداخلية يجب أن تكون مقدار موجب أو معدوم (في حالة انعدام الانفعالات) ، وبما أن عبارة الطاقة الداخلية هي شكل تربيعي بالنسبة لمركبات تنسوري الانفعالات فإن الاصغريات الرئيسية للمصفوفة المتعلقة بهذا الشكل التربيعي هي مقادير موجبة ، ولنكتب الآن هذه الطاقة الداخلية بالشكل:

$2U = a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ حيث :

$$\alpha = 1,2,\ldots,18, \quad \beta = 1,2,\ldots,18 \; and \quad x_1 = \gamma_{11}, \quad x_2 = \gamma_{22}, \quad x_3 = \gamma_{33}, \quad x_4 = \kappa_{11},$$
$$x_5 = \kappa_{22}, \quad x_6 = \kappa_{33}, \quad x_7 = \gamma_{31}, \quad x_8 = \gamma_{13}, \quad x_9 = \kappa_{13}, \quad x_{10} = \kappa_{31}, \quad x_{11} = \gamma_{21},$$
$$x_{12} = \kappa_{12}, \quad x_{13} = \gamma_{12}, \quad x_{14} = \kappa_{21}, \quad x_{23} = \gamma_{11}, \quad x_{16} = \kappa_{23}, \quad x_{17} = \gamma_{32}, \quad x_{18} = \kappa_{32} .$$

بهذا الشكل نحصل على مصفوفة المعاملات التالية:

$$\left[a_{\alpha\beta}\right]_{18\times18} = \begin{bmatrix} [I] & & & & \\ & [II] & & 0 & \\ & & [III] & & \\ & 0 & & [IV] & \\ & & & & [V] \end{bmatrix} \qquad (0.14)$$

حيث المصفوفات: $[I]_{3\times3}, [II]_{3\times3}, [III]_{4\times4}, [IV]_{4\times4}, [V]_{4\times4}$ تأخذ الأشكال التالية:

$$[I] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu \end{bmatrix}, \qquad [II] = \begin{bmatrix} \beta+2\gamma & \beta & \beta \\ \beta & \beta+2\gamma & \beta \\ \beta & \beta & \beta+2\gamma \end{bmatrix},$$

$$[III] = \begin{bmatrix} \mu+\alpha & \mu-\alpha & 0 & 0 \\ \mu-\alpha & \mu+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma+\varepsilon & \gamma-\varepsilon \\ 0 & 0 & \gamma-\varepsilon & \gamma+\varepsilon \end{bmatrix}, \qquad [IV] = \begin{bmatrix} \mu+\alpha & 0 & \mu-\alpha & 0 \\ 0 & \gamma+\varepsilon & 0 & \gamma-\varepsilon \\ \mu-\alpha & 0 & \mu+\alpha & 0 \\ 0 & \gamma-\varepsilon & 0 & \gamma+\varepsilon \end{bmatrix}.$$

وبتطبيق مبرهنة Sylvester نحصل على متراجحات الطاقة التالية:

$$\begin{aligned} &\mu>0, \quad \alpha>0, \quad \varepsilon>0, \quad \gamma>0, \\ &2\mu+3\lambda>0, \quad 2\gamma+3\beta>0, \quad \lambda+2\mu>0. \end{aligned} \tag{0.15}$$

3.نموذج الجسم المرن دقيق الاستقطاب،الإيزوتروبي، نصف الانتحائي Aero-Kuvshinski (A-K):

سنعتبر الآن الجسم المرن دقيق الاستقطاب، نصف الانتحائي. تمت مناقشة نظرية الجسم المرن دقيق، نصف الانتحائي، من خلال عدة مقالات علمية. تم إعطاء أساسيات هذه النظرية من خلال **Aero** و **Kuvshinski** [1] و [2] (في إطار كلٍ من السكون المرن والتحريك المرن)، وكذلك بواسطة Nowacki [177] (من خلال كتابه: المرونة الحرارية (Thermoelasticity)). إضافةً إلى ذلك علينا أن نذكر أيضاً مقالات:Benedict وLakes [13]، وGawinecki [99]، وLenz [143] و [144]، و Nowacki (الأب)، وNowacki (الابن) [169]، وNowacki [167] و[168]. الجسم المرن دقيق الاستقطاب، نصف الانتحائي هو جسم مرن دقيق الاستقطاب إيزوتروبي، الذي لأجله نتخلى عن فرضية مركزية التناظر، الأمر الذي يجعل صيغة الطاقة الحرة لأجل الجسم المرن نصف الانتحائي أكثر تعقيداً فيما لو كان الجسم دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر، حيث تأخذ صيغة الطاقة الحرة لأجل الجسم المرن نصف الانتحائي الشكل التالي:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mu+\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ji} + \frac{\mu-\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2}\gamma_{\kappa\kappa}\gamma_{nn} + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\kappa_{ji}\kappa_{ji} \\ &+ \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\kappa_{ji}\kappa_{ij} + \frac{\beta}{2}\kappa_{\kappa\kappa}\kappa_{nn} + (\chi+\nu_0)\,\gamma_{ji}\kappa_{ji} + (\chi-\nu_0)\gamma_{ji}\kappa_{ij} \\ &+ \kappa\,\gamma_{\kappa\kappa}\kappa_{nn} - \eta\,\gamma_{\kappa\kappa}\theta - \zeta\,\kappa_{\kappa\kappa}\theta - \frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

بالتالي لأجل الجسم المرن نصف الانتحائي، إضافةً إلى المعاملات المادية الست: $\mu , \lambda , \alpha , \beta , \gamma , \varepsilon$ ، تظهر أيضاً المعاملات المادية الثلاث: χ , ν_0 و κ ، إضافةً إلى المعاملين: ζ , η المتعلقين بالخواص الميكانيكية والحرارية للجسم.

إن وسطاء المرونة الحرارية تخضع لقيود، نحصل عليها باتباع مايلي. بتغيير الرموز في العلاقة السابقة، سنعطي فيمايلي بعض متراجحات الطاقة التي سنحتاج لها في نهاية المطاف. تأخذ الطاقة الحرة F لأجل حالة انعدام الحقل الحراري θ الشكل التالي:

$$2F = a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

حيث فرضنا هنا أن:

$$(\alpha,\beta = 1,2,\ldots,18): \; x_1 = \gamma_{11} , x_2 = \kappa_{11} , x_3 = \gamma_{22} , x_4 = \kappa_{22} , x_5 = \gamma_{33} , x_6 = \kappa_{33} ,$$
$$x_7 = \gamma_{13} , x_8 = \gamma_{31} , x_9 = \kappa_{13} , x_{10} = \kappa_{31} , x_{11} = \gamma_{12} , x_{12} = \kappa_{12} , x_{13} = \gamma_{21} ,$$
$$x_{14} = \kappa_{21} , x_{15} = \gamma_{23} , x_{16} = \kappa_{23} , x_{17} = \kappa_{32} , x_{18} = \gamma_{32} .$$

عندئذٍ مصفوفة المعاملات، الموافقة تأخذ الشكل (2.14) ماعدا المصفوفة $[V]$ ، وحيث تملك المصفوفات: $[I]_{6\times 6}$ و $[II]_{4\times 4}$ و $[III]_{4\times 4}$ و $[IV]_{4\times 4}$ الشكل التالي:

$$[I] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \kappa+2\chi & \lambda & \kappa & \lambda & \kappa \\ \kappa+2\chi & \beta+2\gamma & \kappa & \beta & \kappa & \beta \\ \lambda & \kappa & \lambda+2\mu & \kappa+2\chi & \lambda & \kappa \\ \kappa & \beta & \kappa+2\chi & \beta+2\gamma & \kappa & \beta \\ \lambda & \kappa & \lambda & \kappa & \lambda+2\mu & \kappa+2\chi \\ \kappa & \beta & \kappa & \beta & \kappa+2\chi & \beta+2\gamma \end{bmatrix},$$

$$[II] = \begin{bmatrix} \mu+\alpha & \mu-\alpha & \chi+\nu_0 & \chi-\nu_0 \\ \mu-\alpha & \mu+\alpha & \chi-\nu_0 & \chi+\nu_0 \\ \chi+\nu_0 & \chi-\nu_0 & \gamma+\varepsilon & \gamma-\varepsilon \\ \chi-\nu_0 & \chi+\nu_0 & \gamma-\varepsilon & \gamma+\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$[III]=\begin{bmatrix} \mu+\alpha & \chi+\nu_0 & \mu-\alpha & \chi-\nu_0 \\ \chi+\nu_0 & \gamma+\varepsilon & \chi-\nu_0 & \gamma-\varepsilon \\ \mu-\alpha & \chi-\nu_0 & \mu+\alpha & \chi+\nu_0 \\ \chi-\nu_0 & \gamma-\varepsilon & \chi+\nu_0 & \gamma+\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$[IV]=\begin{bmatrix} \mu+\alpha & \chi+\nu_0 & \chi-\nu_0 & \mu-\alpha \\ \chi+\nu_0 & \gamma+\varepsilon & \gamma-\varepsilon & \chi-\nu_0 \\ \chi-\nu_0 & \gamma-\varepsilon & \gamma+\varepsilon & \chi+\nu_0 \\ \mu-\alpha & \chi-\nu_0 & \chi+\nu_0 & \mu+\alpha \end{bmatrix}$$

الآن، باستخدام مبرهنة Sylvester ، لأجل كل: $i=1,2,\ldots,18$ ، لدينا: $\Delta_i>0$ ، نحصل بالتالي على المتراجحات التالية:

$$\begin{aligned}
&\alpha>0\,,\quad \mu>0\,,\quad \gamma>0\,,\quad \varepsilon>0\,,\quad \lambda+2\mu>0\ ,\\
&(\lambda+2\mu)\,(\beta+2\gamma)-(\kappa+2\chi)^2\ >0\ ,\\
&(\lambda+\mu)\left[\mu(\beta+2\gamma)-\chi^2\right]-2\mu\,\kappa\,(\kappa+\chi)\ >0\ ,\\
&\alpha\,\mu\,(\gamma+\varepsilon)-\mu\,{\nu_0}^2-\alpha\,\chi^2\ >0\,,\\
&(\alpha\varepsilon-{\nu_0}^2)\,(\mu\lambda-\chi^2)\ >0\,,\\
&(\lambda+\mu)\,(\gamma+\varepsilon)-(\chi+\nu_0)^2\ >0\,,\\
&\gamma\,\varepsilon\,(\mu+\alpha)-{\nu_0}^2\,(\gamma+\varepsilon)\ >0\,.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

الآن، تنتج عن الطاقة الحرة المتمثلة بالعلاقة (3.1) وعن العلاقات (2.13)، تنتج العلاقات التأسيسية التالية المحققة في $\Omega\times\mathrm{T}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ji}\ &=(\mu+\alpha)\,\gamma_{ji}\ +(\mu-\alpha)\,\gamma_{ij}\ +(\lambda\gamma_{kk}\ -\eta\,\theta)\,\delta_{ji}\\
&+(\chi+\nu_0)\,\kappa_{ji}\ +(\chi-\nu_0)\,\kappa_{ij}\ +\kappa\,\kappa_{kk}\,\delta_{ji}\ ,\\
\mu_{ji}\ &=(\chi+\nu_0)\,\gamma_{ji}\ +(\chi-\nu_0)\,\gamma_{ij}\ +\kappa\gamma_{kk}\,\delta_{ji}\\
&+(\gamma+\varepsilon)\,\kappa_{ji}\ +(\gamma-\varepsilon)\,\kappa_{ij}\ +(\beta\,\kappa_{kk}\ -\zeta\,\theta)\,\delta_{ji}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

نلاحظ الآن أن حقلي إجهادات القوة وإجهادات العزم، كلاهما يتعلقان بكلٍ من حقل انفعالات القوة، وبحقل الانفعالات الانثنائية الدورانية، كما أن حقل إجهادات العزم يتعلق بالحقل الحراري. وفي هذه الحالة تفقد معادلة التوصيل الحراري (2.5)، تفقد

نمطها التقليدي، فإضافةً إلى حد التوسع الحجمي: $\gamma_{kk} = u_{k,k}$، يظهر أيضاً الحد: $\kappa_{kk} = \varphi_{k,k}$. وتأخذ بالتالي، معادلة التوصيل الحراري لأجل الجسم الإيزوتروبي نصف الإنتحائي الشكل التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\theta_{,ii} - \frac{1}{\hat{\kappa}}\dot{\theta} - \eta_0 \dot{u}_{j,j} - \zeta_0 \dot{\varphi}_{j,j} = -\frac{Q}{\hat{\kappa}}\ , \tag{3.4}$$

حيث :

$$Q = \frac{\hat{\kappa} W}{\lambda_0}, \qquad \hat{\kappa} = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}, \qquad \eta_0 = \frac{\eta T_0}{\lambda_0}, \qquad \zeta_0 = \frac{\zeta T_0}{\lambda_0}.$$

إن مبدئي إنحفاظ كمية الحركة والعزم الحركي، هنا ، يعطيان معادلات الحركة لأجل الجسم المرن نصف الانتحائي الإيزوتروبي، والتي هي نفسها المعادلات (2.1) لحركة الجسم المرن دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر. وبشكل مشابه تبقى العلاقات الهندسية التي تحدد الانفعالات والانفعالات الدقيقة هي نفسها العلاقات (2.3) التي توافق الجسم المرن دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر. وكذلك الأمر بالنسبة لعلاقات توافق الانفعالات والانفعالات الدقيقة تبقى هي نفسها العلاقات (2.2) الموافقة للجسم المرن دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر، وكذلك الأمر بالنسبة للشروط الحدية والشروط الابتدائية، فتبقى هي نفسها الشروط (2.9) و (2.10)، على الترتيب، والتي توافق الجسم المرن دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر.

إن معادلات الحركة (2.1) معبَّر عنها بالإزاحات والدورانات والحرارة، لأجل الجسم المرن نصف الانتحائي والإيزوتروبي والمتجانس، أعقد من المعادلات (2.6)، التي تمثل معادلات حركة الجسم المرن دقيق الاستقطاب، الإيزوتروبي والمتجانس، ومركزي التناظر، معبَّر عنها بالإزاحات والدورانات والحرارة، حيث تأخذ معادلات الحركة للجسم المرن نصف الانتحائي والإيزوتروبي والمتجانس، معبرعنها بالإزاحات والدورانات والحرارة، تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times T_+$:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)u_{i,jj}+(\lambda+\mu-\alpha)u_{j,ji}+2\alpha\in_{ijk}\varphi_{k,j}+\\
&\quad+\underline{(\chi+\nu_0)\varphi_{i,ll}}+\underline{(\chi+\kappa-\nu_0)\varphi_{j,ji}}+X_i=\rho\ddot{u}_i+\eta\,\theta_{,i}\,,\\
&(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,jj}-4\alpha\varphi_i+(\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi_{j,ji}+2\alpha\in_{ijk}\varphi_{k,j}+\underline{4\nu_0\in_{ijk}\varphi_{k,j}}+\\
&\quad+\underline{(\chi+\nu_0)u_{i,ll}}+\underline{(\chi+\kappa-\nu_0)u_{j,ji}}+Y_i=J\ddot{\varphi}_i+\underline{\zeta\,\theta_{,i}}\,,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

حيث الحدود التي تحتها خط في المعادلتين السابقتين، تنتج عن عدم افراض مركزية التناظر للجسم المرن دقيق الاستقطاب.

أن هدف نظرية الجسم المرن نصف الانتحائي والإيزوتروبي، هو إيجاد الحالة الترموديناميكية المرنة:

$$
u_i,\varphi_i,\theta,\sigma_{ji},\mu_{ji},\gamma_{ji},\kappa_{ji}:\bar{\Omega}\times T\longrightarrow\mathbb{R} \tag{3.6}
$$

لجسم المرن نصف الانتحائي والإيزوتروبي:

$$
\Omega(\mu,\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\rho,J,\kappa,\chi,\nu_0,\hat{\kappa},\eta_0,\zeta_0,\eta,\zeta)
$$

في $\bar{\Omega}\times T$ بما يتوافق مع المعادلات وعلاقات الحقل (2.3)-(2.1) و (3.5)-(3.3) (حيث كلاً من القوى الحجمية والعزم الحجمية والمصادر الحرارية، التالية، معطى: $X_i,Y_i,Q:\Omega\times T\longrightarrow\mathbb{R}$)، ومع شروط حدية وابتدائية، معطاة، والتي هي نفسها الشروط الحدية والابتدائية لأجل الجسم المرن دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر. هذا باللغة التقليدية، أما بلغة الإزاحات والدورانات والحرارة، فهدف النظرية هو إيجاد الحل النظامي: $u_i\ ,\ \varphi_i\ ,\ \theta\in C^2(\Omega\times T)\cap C^1(\bar{\Omega}\times T)$ لمعادلات الحركة بالازاحات والدورانات والحرارة: (3.5) ومعادلة التوصيل الحراري:(3.4) ، مع الشروط الحدية: (2.9) ، والشروط الابتدائية (2.10).

أخيراً، في نظرية الجسم المرن نصف الانتحائي، والإيزوتروبي، إذا فرضنا أن:

$\nu_0=0\ ,\ \kappa=0\ ,\ \chi=0$ و $\hat{\kappa}=\kappa\ ,\ \eta=\nu_T\ ,\ \zeta=0$ ، نحصل من العلاقات:

(3.5)-(3.1)، على المعادلات والعلاقات: (2.6) -(2.4) و(2.12) و(2.15) لأجل الجسم المرن دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر:(E–N).

4.نموذج الجسم المرن من نوع Koiter-Mindlin (K-M) ، في إطار نظرية العزوم:

في هذه الفقرة، سنعتبر نظرية العزوم المعدَّلة، التي تعتبر أبسط الأجسام المرنة، القادرة على نقل إجهادات عزم مابين أجزائها. في المراجع المتعلقة بهذا الموضوع، فإن مثل هذا الجسم من المرتبة الثانية والذي يملك توجهات مقيدة، تمت الإشارة إليه باسم الوسط شبه Cosserat ، أو بنموذج الجسم المرن من نوع Koiter-Mindlin ، أو بنموذج الجسم المرن من نوع Grioli-Toupin. إن نظرية العزوم مطوَّرة بشكل جيد، على نحوٍ تم فيه إثبات عدد من المبرهنات العامة ، كما تم تطوير طرق مكاملة المعادلات الأساسية الحاكمة، وتم أيضاً إيجاد الحلول لعدد كبير من المسائل النوعية فيها. وهنا عينا أن نذكر أعمال الباحثين مثل: Gunther [104] ، و Koiter [131] ، وMindlin [157] ، وSavin [207]، وSchaefer [210]، و Bogy و Sternberg [15]، وMuki و Sternberg [161]، و Sokolowski [215]، و Truesdell وNoll [231]، و Toupin [230]، و Mindlin و Tiersten [158]. القضية الأساسية في هذه النظرية تكمن في وجود ثابتي مرونة إضافيين، يعدلان بشكل جوهري حلول عدد من المسائل الأساسية في نظرية المرونة التقليدية. بشكل مختصر سنناقش المعادلات والعلاقات الأساسية للجسم المرن ضمن نظرية العزوم (بشكلها المعدَّل أو المختصر)، حيث سنرتب هذه المعادلات والعلاقات الأساسية في مجموعات وفقاً لمايلي. من معادلات Euler للحركة (المتمثلة بمبدئي انحفاظ كمية الحركة والعزم الحركي)، نحصل على معادلات الحرك (2.1) (لأجل: $J \equiv 0$).

الآن، سنفترض أن تنسوري الإجهادات يملكان الشكل:

$$\sigma_{ji} = s_{ji} + \overset{a}{\sigma}_{ji} \ , \qquad \mu_{ji} = \hat{\mu}\,\delta_{ji} + m_{ji} \ ,$$

حيث :

$$s_{ji} = \frac{1}{2}(\sigma_{ji} + \sigma_{ij}) \ , \qquad \overset{a}{\sigma}_{ji} = \frac{1}{2}(\sigma_{ji} - \sigma_{ij}) \ , \qquad \hat{\mu} = \frac{1}{3}\mu_{ii}$$

وعندئذٍ تَختصر معادلات الحركة (2.1) ($J \equiv 0$)، إلى الشكل التالي في $\Omega \times \mathrm{T}_+$:

$$s_{ji,j} - \frac{1}{2}\epsilon_{kji}\,(m_{lk,lj} + Y_{k,j}) + X_i = \rho \ddot{u}_i \ , \qquad (4.1)$$

حيث :

$$m_{ji} \ , \ u_i \in C^2(\Omega \times \mathrm{T}_+) \ , \quad s_{ji} \in C^1(\Omega \times \mathrm{T}_+) \ ,$$
$$Y_i \in C^1(\Omega \times \mathrm{T}) \ , \quad X_i \in C^0(\Omega \times \mathrm{T}) \ .$$

في النظام المعا دالاتي (4.1) ، تظهر فقط وبوضوح المركبات المتناظرة s_{ji} لتنسور إجهادات القوة، والمركبات المنحرفة m_{ji} لتنسور إجهادات العزم.

في هذه النظرية، يظهر أيضاً تنسور الانفعالات المتناظر ε_{ji}، وتنسور الانفعالات الدقيقة، اللاتناظري κ_{ji} ، حيث يعطى هذان التنسوران من خلال العلاقات الهندسية التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}_+$:

$$\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \ , \qquad \kappa_{ji} = \varphi_{j,i} \ . \qquad (4.2)$$

إن التنسورين ε_{ji} و κ_{ji} ، يجب أن يحقِّقا علاقات تناسق العلاقات الهندسية (علاقات توافق الانفعالات). كل نقطة مادية من نقاط الجسم المرن في إطار نظرية العزوم، تملك ثلاث درجات حرية، المتمثلة بالإزاحات الثلاث u_i لهذه النقطة

المادية. أما التوجهات الثلاثة φ_i لهذه النقطة المادية فهي تعتمد على الإزاحات u_i، وفق العلاقة التقليدية:

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \, u_{k,j} \qquad \text{in } \bar{\Omega} \times \mathrm{T} \tag{4.3}$$

إن صيغة الطاقة الحرة المتعلقة بعنصر الحجم $\mathrm{d}V$ من الجسم المرن في إطار نظرية العزوم المعدَّلة، تملك الشكل التالي:

$$F = \mu \, \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ll} \varepsilon_{kk} + 2\mu l^{*2} (\kappa_{ij} \kappa_{ij} + \eta \kappa_{ij} \kappa_{ji}) - \nu_T \, \varepsilon_{ij} \theta + G(\theta) , \tag{4.4}$$

حيث $G(\theta)$ تضم كل الحدود التي تتبع فقط للحرارة θ.

إن الحرارة θ تحقق المعادلة التقليدية (2.5)، في التوصيل الحراري.

إن كلٍ من صيغة الطاقة الحرة (4.4)، والعلاقتين التاليتين مابين الإجهادات والانفعالات:

$$s_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ji}} , \qquad m_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \kappa_{ji}} \tag{4.5}$$

معاً، تعطينا العلاقات التأسيسية التالية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} s_{ji} &= 2\mu \, \varepsilon_{ji} + (\lambda \, \varepsilon_{kk} - \nu_T \theta) \, \delta_{ji} , \\ m_{ji} &= 4\mu l^{*2} (\kappa_{ji} + \eta \, \kappa_{ij}) \end{aligned} \tag{4.6}$$

القيم: $\mu , \lambda , l^*, \eta$ تمثل ثوابت المرونة في نظرية العزوم المعدَّلة، وهي تحقق متراجحات الطاقة التالية:

$$\mu > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad l^* \geq 0, \qquad |\eta| < 1 \tag{4.7}$$

باستخدام العلاقات التأسيسية (4.6) والعلاقات الهندسية (4.2)، والعلاقات (4.3)، نحصل من معادلات الحركة (4.1)، على الحركة التالية، بالإزاحات والحرارة، التالية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}_+$:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + \mu l^{*2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{knp} u_{p,njll} + F_i = \rho \ddot{u}_i + \nu_T \theta_{,i} \quad , \qquad (4.8)$$

حيث:

$$F_i = X_i + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} Y_{k,j} \ , \ u_i \in C^4(\Omega \times \mathrm{T}_+) .$$

تهدف نظرية العزوم المدلة إلى إيجاد السلوك الديناميكي الحراري المرن:

$$u_i \ , \ \varphi_i \ , \theta, s_{ji}, m_{ji}, \ \varepsilon_{ji}, \kappa_{ji} : \bar{\Omega} \times \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R}$$

للوسط المادي المرن: $\Omega(\mu, \lambda, l^*, \eta, \rho, \kappa, \eta_0, \nu_T)$ في $\bar{\Omega} \times \mathrm{T}$ بما يتوافق مع:

المعادلات وعلاقات الحقل الأساسية (4.8) - (4.1)،

(مع المعطيات : الحمول الحجمية: $F_i : \Omega \times \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، والمصادر الحرارية : $Q : \Omega \times \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R}$) ، ومع الشروط الحدية على $\partial \Omega \times \mathrm{T}$ (التي سنذكرها بعد قليل) ، والشروط الابتدائية في $\Omega \times \{0\}$ (التي سنذكرها أيضاً بعد قليل).

إن الصياغة السابقة تكافئ الصياغة التي يطلب فيها إيجاد الحل (u_i, θ) للنظام المعادلاتي المكوَّن من معادلات الحركة بالإزاحات والحرارة (4.8) ومعادلة التوصيل الحراري (2.5)، مع الشروط الحدية والابتدائية، المصاغة بالشكل المناسب.

فيمايلي، سنعتبر الشروط الحدية الموافقة للجسم المرن في إطار نظرية العزوم المعدَّلة ، وذلك على ضوء الاعتبارات اللاحقة، المتعلقة بالحالة السكونية الحرارية المرنة للجسم المرن في إطار هذه النظرية.

إن بنية معادلات الحركة بالإزاحات والحرارة (4.8)، لا تتوافق مع ستة شروط حدية، بل مع خمسة شروط حدية، شكلها النهائي هو الآتي:

$$
\begin{aligned}
&\bar{p}_i = \left[s_{ji} + \frac{1}{2} \epsilon_{jli} \left(m_{pl,p} - \overset{n}{m}_{,l} + Y_l \right) \right] n_j && \text{on } \partial\Omega_\sigma \times \mathrm{T}, \\
&\bar{m}_i = m_{ji} n_j - \overset{n}{m} n_i && \text{on } \partial\Omega_\sigma \times \mathrm{T}, \\
&u_i = f_i \ , \qquad \varphi_\alpha^0 = g_\alpha && \text{on } \partial\Omega_u \times \mathrm{T}, \\
&\theta = \vartheta && \text{on } \partial\Omega_\theta \times \mathrm{T}, \\
&\frac{\partial\theta}{\partial n} = q && \text{on } \partial\Omega_q \times \mathrm{T},
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

حيث :

$$
\bar{p}_i = p_i - \frac{1}{2} \epsilon_{jli} \overset{n}{m}{}^0_{,l} n_j \ , \qquad \bar{m}_i = m_i - \overset{n}{m}{}^0 n_i
$$

على الترتيب هي القوى السطحية المختصرة، والعزوم السطحية، المختصرة، المناسبة،

و:

$$
\overset{n}{m}{}^0 = m_i n_i \ , \qquad \overset{n}{m} = m_{ji} n_j n_i = m_{ll}
$$

أخيراً φ_α^0 ($\alpha = 1, 2$) هي مركبات متجه الدوران φ، الواقعة في المستوي المماس لـ $\partial\Omega$.

فيما تقدم، الدوال الحقيقية التالية جمعها مفروضة (معطاة):

$$
\begin{aligned}
&p_i, m_i : \partial\Omega_\sigma \times \mathrm{T} \to \mathbb{R} \ , \quad f_i, g_\alpha : \partial\Omega_u \times \mathrm{T} \to \mathbb{R} \ , \\
&\vartheta : \partial\Omega_\theta \times \mathrm{T} \to \mathbb{R} \ , \ q : \partial\Omega_q \times \mathrm{T} \to \mathbb{R} \ ,
\end{aligned}
$$

5. نموذج الجسم الافتراضي (The Hypothetical Medium) (MH):

في هذه الفقرة سنناقش أيضاً الوسط المادي المستمر الافتراضي، التي تظهر فيه فقط التأثيرات الناتجة عن الحقول الفيزيائية التالية: التوجهات φ_i ، الانفعالات الدقيقة

κ_{ji}، إضافةً لإجهادات العزم μ_{ji}، حيث التنسوران κ_{ji} و μ_{ji} غير متناظرين. إن تشوه الوسط المادي المستمر الافتراضي، يُسبب بالعزوم الحجمية، وبالتشوهات (اللدنة) κ^0_{ji} ، وبالعزم السطحي m_i، وبالتوجهات السطحية $\hat{\varphi}_i$.

يمكن ترتيب المعادلات والعلاقات الأساسية للوسط المادي المستمر الافتراضي وفقاً للأنظمة التالية:

- معادلات الحركة المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$\mu_{ji,j} + Y_i = J\ddot{\varphi}_i \ , \tag{5.1}$$

حيث:

$$\mu_{ji} \in C^1(\Omega\times T_+) \ , \ Y_i \in C^0(\Omega\times T) \ , \ \varphi_i \in C^2(\Omega\times T_+)$$

- العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega\times T_+$، والتي تعطي تنسور الانفعالات الدقيقة:

$$\kappa_{ji} = \varphi_{i,j} \ , \tag{5.2}$$

إن تنسور الانفعالات الدقيقة السابق: κ_{ji} يحقق شروط التوافق $(2.2)_2$ في $\Omega\times T$، التي سنعيد فيمايلي كتابتها، للضرورة.

- شروط توافق الانفعالات الدقيقة، المحققة في $\Omega\times T$:

$$\kappa_{li,h} - \kappa_{hi,l} = 0 \tag{5.3}$$

حيث: $\kappa_{ji} \in C^1(\Omega\times T)$.

- عبارة الطاقة الحرة لوسط المادي المستمر الافتراضي، تأخذ الشكل التالي:

$$F = \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\kappa_{ji}\kappa_{ji} + \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\kappa_{ji}\kappa_{ij} + \frac{\beta}{2}\kappa_{kk}\kappa_{nn} \tag{5.4}$$

التي ينتج عنها وعن العلاقة $_2$(2.13) (أي العلاقة: $\mu_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \kappa_{ji}}$)، العلاقات التاأسيسية التالية.

- العلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ij} + \beta \kappa_{kk} \delta_{ji}, \qquad (5.5)$$

حيث: β , ε , γ هي ثوابت المرونة للوسط المادي المستمر الافتراضي، والتي تحقق:

- متراجحات الطاقة:

$$\gamma > 0, \qquad \varepsilon > 0, \qquad 2\gamma + 3\beta > 0 \qquad (5.6)$$

باستخدام العلاقات التأسيسية (5.5) والعلاقات الهندسية (5.2)، تأخذ معادلات الحركة (5.1) ، الشكل التالي في $\Omega \times \mathrm{T}_+$، الذي تتحقق فيه شروط توافق الانفعالات بالشكل التافه.

- معادلات الحركة بالدورانات، والمحققة في $\Omega \times \mathrm{T}_+$:

$$(\gamma + \varepsilon)\, \varphi_{i,jj} - 4\alpha \varphi_i + (\beta + \gamma - \varepsilon)\, \varphi_{j,ji} + Y_i = J \ddot{\varphi}_i \qquad (5.7)$$

لأجل الوسط المادي المستمر الافتراضي، يطلب إيجاد الحالة الديناميكية المرنة:

$$\varphi_i \ , \mu_{ji} \ , \kappa_{ji} \ : \bar{\Omega} \times \mathrm{T} \to \mathbb{R}$$

للوسط المادي المستمر الافتراضي (β , γ , ε , J) Ω في المجموعة $\bar{\Omega} \times \mathrm{T}$، بما يتوافق معادلات الحقل (5.7) - (5.1) (حيث العزوم الحجمية $Y_i : \Omega \times \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ مفروضة)، ومع الشروط الحدية والابتدائية التالية:

- الشروط الحدية على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} \mu_{ji} n_j &= m_i \qquad \text{on } \partial\Omega_\sigma \times \mathrm{T}, \\ \varphi_i &= g_i \qquad \text{on } \partial\Omega_u \times \mathrm{T}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

حيث : $\partial\Omega_\sigma \cap \partial\Omega_u = \varnothing$, $\partial\Omega = \partial\Omega_\sigma \cup \partial\Omega_u$ ، وحيث التوابع التالية معطاة:

$$m_i : \partial\Omega_\sigma \times \mathrm{T} \to \mathbb{R}, \quad g_i : \partial\Omega_u \times \mathrm{T} \to \mathbb{R}$$

- الشروط الابتدائية في $\Omega \times \{0\}$:

$$\varphi_i = k_i , \quad \dot{\varphi}_i = \chi_i , \tag{5.9}$$

حيث التوابع التالية معطاة : $k_i , \chi_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

بعبارة مكافئة، يطلب إيجاد الحل النظامي $\varphi_i \in C^2(\Omega \times \mathrm{T}) \cap C^1(\bar{\Omega} \times \mathrm{T})$ لمعادلات الحركة بالدورانات (5.7)، المحقق لـ (5.2) و(5.6) -(5.4)، مع الشروط الحدية (5.8) والشروط الابتدائية (5.9).

معادلات توافق انفعالات كلٍ من الجسم المرن فن النوع (H) والجسم المرن دقيق الاستقطاب من نوع (A-K)

أولاً: معادلات توافق الانفعالات اللاغرانجية، اللامتناهية في الصغر بطريقة سيزار الهندسية التقليدية، في النظام الإحداثي الديكارتي، للجسم المرن من نوع (H) .

من أجل متطلبات هذا البند ، تلزمنا المبرهنة التالية.

<u>مبرهنة ستوكس :</u>

إذا كان $\sum$ سطحاً في المنطقة بسيطة الترابط C_0 وفرضنا أن Γ منحنياً محيطاً بالسطح $\sum$ وكان $\vec{n}$ متجه واحدة ناظم السطح $\sum$ في النقطة P من $\sum$ والموجه نحو خارج $\sum$. وإذا فرضنا أيضاً أن :

$$\vec{F} : \Sigma \to R^3$$

$$P \to \vec{F}(P)$$

دالة متجهية من الصف C^0 في $\Sigma \cup \Gamma$ ، والصف C^1 في Σ، فإنه عندئذ يكون:

أ) التكاملان التاليان موجودان : المنحني $\int_{\Gamma} \overrightarrow{F} . d\vec{r}$ ، حيث $\vec{r} = \overrightarrow{op}$ ،

والسطحي $\int_{\Sigma} \vec{n}.\overrightarrow{rot}\vec{F}\, d\Sigma$.

ب) تتحقق علاقة ستوكس التالية : $\int_{\Gamma} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{\Sigma} \vec{n}.\overrightarrow{rot}\vec{F}\ d\Sigma$.

لنعد الآن إلى موضوعنا الأساسي، الذي هو دراسة معادلات توافق الانفعالات لجسم المرن ذي الانفعالات اللامتناهية في الصغر، بالطريقة الهندسية التقليدية، وفي النظام الإحداثي الديكارتي.

إذاً في هذه الفقرة سنفرض أن الجسم المرن ذي انفعالات صغيرة جداً ، وعندئذ تصبح المركبات اللاغرانجية لتنسور الانفعال في النظام الإحداثي الديكارتي بالشكل:

$$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad ; \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (1)$$

في ميكانيك الأوساط المستمرة ، نفرض أن الدوال u_i من الصف C^1 في المنطقة بسيطة الترابط (اللاغرانجية) C_0 ، وأن الشرط التالي محقق :

$$D(P;t) := \left|s_{ij} + u_{i,j}(p;t)\right| \neq 0 \quad ; \quad \forall P \equiv (x_1, x_2, x_3) \in C_0$$
$$\forall t > 0$$

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو التالي:

هل ضمن تحقق الشرط السابق ، يمكن أن تكون الدوال ε_{ij} اختيارية أم هناك روابط فيما بينها ؟ والجواب على هذا السؤال هو التالي:

الدوال ε_{ij} لا يمكن أن تكون اختيارية ، نظراً لما يلي. من أجل حساب المركبات u_i لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ ، نستخدم العلاقات (1) التي هي ستة

علاقات . فإذا فرضنا في (1) أن ε_{ij} معاليم و u_i مجاهيل ، فتصبح (1) ست معادلات مستقلة بثلاثة مجاهيل ، هي المركبات u_i لمتجه الإزاحة $\vec{u}$.

وإذا كانت التوابع ε_{ij} في هذه الحالة اختيارية ، لا نحصل عندئذ على حل وحيد u_i للجملة المذكورة. إذن ، من المفروض أن نتوقع أن تحقق الدوال الست ε_{ij} شروطاً إضافية ، حتى يكون لجملة المعادلات (1) حلاً وحيداً u_i . في الحالة العامة ، الدوال ε_{ij} ، كل منها يتغير بتغير النقطة $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$ وبتغير الزمن t . فكل عنصر حجمي من الجسم المرن ينتقل بشكل مستقل ، ولو كانت الانفعالات ε_{ij} غير مرتبطة مع بعضها البعض ، أي مستقلة فإن العناصر الحجمية من الجسم المرن التي تقترب من بعضها البعض قبل الانفعال لتشكل الجسم ، لا يمكن أن تقترب من بعضها أثناء الانفعال لتشكل هذا الجسم .

إن الشروط الإضافية المذكورة التي تربط الانفعالات الست ε_{ij} فيما بينها والمسماة شروط الاستمرار المطبقة على الانفعالات ، تم إعطاؤها بالطريقة الهندسية التقليدية بواسطة الباحث ساينت فيستانا [...] .

فيما يلي لنوجد هذه العلاقات المسماة شروط الاستمرار المطبقة على الانفعالات ، بطريقة ي – سيزار [...] وذلك بالطريقة الهندسية التقليدية.

في كل لحظة $t > 0$ ، نفرض أن الدوال ε_{ij} مستمرة في C_0 وتملك مشتقات جزئية بالنسبة لـ x_i حتى المرتبة الثانية مستمرة في C_0 ، أي لنفرض أن هذه

الدوال من الصف C^2 في C_0. وبناءاً على (3) علينا أن نفرض أن الدوال u_i من الصف C^3 في C_0.

لنختـــــر الآن نقطتـــــين لاغـــــرانجيتين اختيـــــاريتين $P_0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ ، $P_1=(x_1^1,x_2^1,x_3^1)$ من المنطقة بسيطة الترابط (اللاغرانجية) C_0 ، ولنرمز عندئذ بـ $u_i^0(P_0;t)$ للإزاحات وبـ $\omega_{ij}^0(P_0;t)$ للدورانات في النقطة P_0 واللحظة $t>0$ ، ولنفرض أيضاً أن المقادير السابقة u_i^0 و ω_{ij}^0 معطاة. ولنرمز أيضاً بـ $u_i^1(P_1;t)$ لمركبات متجه الإزاحة في النقطة P_1 واللحظة $t>0$. وعندئذٍ ، لتحديد وحدانية الإزاحات $u_i^1(P_1;t)$ نستخدم كما ذكرنا طريقة ي – سيزار [...] التالية.

إن $u_i^1(P_1;t)$ يعطى وفقاً للتكامل التالي:

$$u_j^1(P_1;t)=u_j^0(P_0;t)+\int_{P_0}^{P_1}du_j=u_j^0(p_0;t)+\int_{P_0}^{P_1}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(P;t)dx_k$$
$$=u_j^0(P_0;t)+\int_{P_0}^{P_1}u_{j,k}(P;t)dx_k$$

أو اختصاراً نكتب:

$$u_j^1=u_j^0+\int_{P_0}^{P_1}u_{j,k}dx_k \qquad (2)$$

لدينا:

$$u_{j,k} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}) + \frac{1}{2}(u_{j,k} - u_{k,j})$$
$$= \varepsilon_{jk} + \omega_{jk} \qquad (3)$$

وبالتعويض في (2) نجد:

$$u_j^1 = u_j^0 + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{jk} + \omega_{jk}) dx_k$$

وباستخدام خواص التكامل نجد :

$$u_j^1 = u_j^0 + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_{jk} dx_k + \int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k \qquad (4)$$

وإذا ما كاملنا التكامل الأخير في (4) : $\int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k$ ، بطريقة التجزئة نجد:

$$\int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k = [x_k \omega_{jk}(p;t)]_{P_0}^{P_1} - \int_{P_0}^{P_1} x_k d\omega_{jk}$$

أي:

$$\int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k = x_k^1 \omega_{jk}^1 - x_k^0 \omega_{jk}^0 - \int_{P_0}^{P_1} x_k d\omega_{jk}$$

وبإضافة وطرح $x_k^1\omega_{jk}^0$ ، للطرف الأيمن نجد: (5)

$$\int_{P_0}^{P_1}\omega_{jk}dx_k=(x_k^1-x_k^0)\omega_{jk}^0+x_k^1(\omega_{jk}^1-\omega_{jk}^0)-\int_{P_0}^{P_1}x_k d\omega_{jk}$$

وبما أن:

$$x_k^1(\omega_{jk}^1-\omega_{jk}^0)=\int_{P_0}^{P_1}x_k^1 d\omega_{jk}$$

فتصبح (5) ، بعد استخدام خواص التكامل بالشكل:

$$\int_{P_0}^{P_1}\omega_{jk}dx_k=(x_k^1-x_k^0)\omega_{jk}^0+\int_{P_0}^{P_1}(x_k^1-x_k)d\omega_{jk} \qquad (6)$$

وبما أن: $d\omega_{jk}=\omega_{jk,l}dx_l$ ، فتصبح (6) بالشكل:

$$\int_{P_0}^{P_1}\omega_{jk}dx_k=(x_k^1-x_k^0)\omega_{jk}^0+\int_{P_0}^{P_1}(x_k^1-x_k)\omega_{jk,l}dx_l \qquad (7)$$

الآن نعوض (7) في (4) ، فنجد:

$$u_j^1=u_j^0+(x_k^1-x_k^0)\omega_{jk}^0+\int_{P_0}^{P_1}\varepsilon_{jk}dx_k+\int_{P_0}^{P_1}(x_k^1-x_k)\omega_{jk,l}dx_l$$

وباستخدام خواص التكامل ، نجد أن العلاقة السابقة تكتب بالشكل:

$$u_j^1=u_j^0+(x_k^1-x_k^0)\omega_{jk}^0+\int_{P_0}^{P_1}[\varepsilon_{jl}+(x_k^1-x_k)\omega_{jk,l}]dx_l$$

وبما أن العلاقة التالية محققة دوماً :

$$\omega_{jk,l} = \varepsilon_{lj,k} - \varepsilon_{kl,j}$$

فيصبح التكامل السابق بالشكل:

$$u_j^1 = u_j^0 + (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} [\varepsilon_{jl} + (x_k^1 - x_k)(\varepsilon_{lj,k} - \varepsilon_{kl,j})]dx_l$$

وإذا فرضنا أن:

$$U_{jl} = \varepsilon_{jl} + (x_k^1 - x_k)(\varepsilon_{lj,k} - \varepsilon_{kl,j})$$

فيصبح التكامل بالشكل:

$$u_j^1 = u_j^0 + (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} U_{jl} dx_l$$

$$u_j^1 = u_j^0 + (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} U_{jr} dx_r \qquad (8)$$

حيث:

$$U_{jr} = \varepsilon_{jr} + (x_k^1 - x_k)(\varepsilon_{rj,k} - \varepsilon_{kr,j}) \qquad (9)$$

وباستخدام الخاصة التوزيعية التالية لمركبات تنسور ليفي – تشيفتي في النظام الإحداثي الديكارتي : $\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lsm} = \delta_{js}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ks}$

يمكن أن نكتب:

$$(x_k^1 - x_k)(\varepsilon_{rj,k} - \varepsilon_{kr,j}) = \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lsm}(x_k^1 - x_k)\varepsilon_{rs,m}$$

وبذلك تصبح (9) بالشكل:

$$U_{jr} = \varepsilon_{jr} + \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lsm}(x_k^1 - x_k)\varepsilon_{rs,m} \qquad (10)$$

الآن نقول ، الإزاحات u_j^1 تكون وحيدة ، إذا وفقط إذا كان التكامل الموجود في (10) مستقلاً عن طريق التكامل الذي يصل P_0 بـ P_1 ، إذ إن هناك عدة طرق تصل P_0 بـ P_1 . فإذا اخترنا الطريق في C_0 على أنه منحنٍ مغلق Γ يخرج من P_0 ليصل إلى P_1 ثم يعود من P_1 إلى P_0 وعلى نحوٍ يكون فيه هذا المنحني محيطاً لسطح $\sum$ يقع في C_0 ، لكان:

$$\int_\Gamma U_{jr}dx_r = 0 \qquad (11)$$

(كون أن Γ طريقاً مغلقاً تقع عليه P_0 ، P_1)

وباستخدام مبرهنة ستوكس السابقة ، لنحسب التكامل السابق $\int_\Gamma U_{jr}dx_r$.

فإذا فرضنا أن: $\vec{F}^j = U_{jr}\vec{e}_r$ ،عندئذ يصبح لدينا:

$$U_{jr}\,dx_r = \vec{F}^j.\,d\vec{r}$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\int_\Gamma U_{jr}\,dx_r = \int_\Gamma \vec{F}^j.\,d\vec{r}$$

وباستخدام مبرهنة ستوكس السابقة ، يصبح التكامل السابق بالشكل:

$$\int_{\Gamma} U_{jr}\, dx_r = \int_{\Gamma} \vec{F}^{\,j}.\, d\vec{r} = \int_{\sum} \vec{n}.\overrightarrow{rot}\vec{F}^{\,j} d\sum \qquad (12)$$

وبما أن:

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}^{\,j} = \varepsilon_{p\,n\,r}\, F^{j}_{r,n}\vec{e}_p$$

حيث:

$$\vec{F}^{\,j} = F^{j}_{r}\vec{e}_r$$

فإن:

$$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{rot}\vec{F}^{\,j} = n_P\, \varepsilon_{p\,n\,r}\, F^{j}_{r,n}$$

حيث:

$$\vec{n} = n_P\vec{e}_P$$

ولدينا:

$$F^{j}_{r} = U_{jr}$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{rot}\,\vec{F}^{\,j} = \varepsilon_{p\,n\,r}\, F^{j}_{r,n} n_P = \varepsilon_{p\,n\,r}\, U_{jr,n}\, n_P$$

نعوض في (12) ، ونستفيد من كون أن : $\int_{\Gamma} U_{jr}\, dx_r = 0$ ، فنجد أن:

$$0 = \int_{\Gamma} U_{jr}\, dx_r = \int_{\sum} \varepsilon_{pnr} U_{jr,n}\, n_P\, d\sum \qquad (14)$$

وبما أن السطح $\sum$ اختياري في C_0 ، فأن (14) تتحقق إذا وفقط إذا كانت العلاقة التالية محققة في C_0:

$$\varepsilon_{pnr} U_{jr,n} = 0 \qquad (15)$$

وباستخدام (9) ،تصبح (15) بالشكل:

$$\varepsilon_{pnr}[\varepsilon_{jr,n}-\varepsilon_{jnl}\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,m}+\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lsm}(x_k^1-x_k)\varepsilon_{rs,mn}]=0 \quad (16)$$

وباستخدام العلاقة التوزيعية:

$$\varepsilon_{jnl}\varepsilon_{lsm}=\delta_{js}\delta_{nm}-\delta_{jm}\delta_{ns}$$

تصبح (16) بالشكل:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{pnr}[\varepsilon_{jr,n}-(\varepsilon_{rj,n}-\varepsilon_{rn,j})]+\\&+\varepsilon_{jkl}(x_k^1-x_k)\varepsilon_{pnr}\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn}=0\end{aligned} \quad (17)$$

إن الحد الأول يطابق الصفر ، وبذلك يصبح الشرط اللازم والكافي لانعدام الحد الثاني ، وبالتالي لانعدام الطرف الأيسر لـ (17)،هو تحقق العلاقة التالية في C_0 ، لأجل كل $(x_k^1-x_k)$:

$$\varepsilon_{pnr}\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn}=0 \quad (18)$$

في العلاقة (18) هناك دليلان حران فقط هما l,P . إذاً في الحالة العامة فهي تعطي 9 علاقات. وبما أن هناك تناظر بالنسبة لـ l,P ، فإن هذه العلاقة المصفوفية السابقة مبدئياً تعطينا ست معادلات مستقلة من أجل القيم التالية لـ l,P:

$$Pl=11,22,33,12,13,23$$

ولنوجد الآن هذه المعادلات الست المذكورة.

باستخدام علاقة التوزيع الشهيرة التالية:

$$\varepsilon_{pnr}\varepsilon_{lsm} = \begin{vmatrix} \delta_{pl} & \delta_{ps} & \delta_{pm} \\ \delta_{nl} & \delta_{ns} & \delta_{nm} \\ \delta_{rl} & \delta_{rs} & \delta_{rm} \end{vmatrix} =$$

$$= \delta_{pl}(\delta_{ns}\delta_{rm} - \delta_{nm}\delta_{rs}) +$$
$$+ \delta_{ps}(\delta_{nm}\delta_{rl} - \delta_{nl}\delta_{rm}) +$$
$$+ \delta_{pm}(\delta_{nl}\delta_{rs} - \delta_{ns}\delta_{rl})$$

وباستخدام خاصة التصفية بديلتا كرونيكا، نجد أن (18)، تأخذ الشكل التالي:

$$\delta_{pl}(\varepsilon_{mn,mn} - \varepsilon_{mm,nn}) + \varepsilon_{pl,mm} - \varepsilon_{pm,ml} +$$
$$+ \varepsilon_{mm,pl} - \varepsilon_{ln,pn} = 0 \qquad (19)$$

فمن أجل قيم p و l المتساوية، تأخذ العلاقة السابقة الشكل التالي:

$$\varepsilon_{mn,mn} - \varepsilon_{mm,nn} + \varepsilon_{pp,mm} - \varepsilon_{pm,pm} +$$
$$+ \varepsilon_{mm,pp} - \varepsilon_{pn,pn} = 0$$

أو الشكل:

$$\varepsilon_{mn,mn} - \varepsilon_{mm,nn} + \varepsilon_{pp,mm} + \varepsilon_{mm,pp}$$
$$-2\varepsilon_{pm,pm} = 0 \qquad (\text{لاتجمع } p) \quad (20)$$

والتي منها نحصل على المعادلات الثلاث الأولى كمايلي.

المعادلة الأولى: نحصل عليها عندما $Pl = 33$ ، فنجد المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{21,21} = \varepsilon_{22,11} + \varepsilon_{11,22}$$

أو:

$$2\,\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11}$$

المعادلة الثانية : عندما $Pl = 22$ ، فنجد المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{33,33} + \varepsilon_{13,13} + \varepsilon_{31,31} = \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{33,33}$$

وبالاختصار نجد المعادلة الثانية:

$$\varepsilon_{13,13} + \varepsilon_{31,31} = \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33}$$

أو:

$$2\,\varepsilon_{13,13} = \varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11}$$

المعادلة الثالثة : عندما $Pl = 11$ ، فنجد المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{22,22} + \varepsilon_{33,33} + \varepsilon_{23,23} + \varepsilon_{32,32} = \varepsilon_{33,22} + \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{22,22} + \varepsilon_{33,33}$$

وبالاختصار، نجد المعادلة الثالثة التالية:

$$\varepsilon_{23,23} + \varepsilon_{32,32} = \varepsilon_{33,22} + \varepsilon_{22,33}$$

أو:

$$2\,\varepsilon_{23,23} = \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22}$$

أما من أجل قيم p المختلفة عن قيم l؛ أي عندما $pl = 12, 13, 23$ ،

فإن العلاقة (19) تتحول إلى العلاقة التالية :

$$\varepsilon_{pl,mm} - \varepsilon_{pm,ml} + \varepsilon_{mm,pl} - \varepsilon_{ln,pn} = 0 \qquad (21)$$

والتي منها نحصل على بقية المعادلات المتعلقة بالدلائل $pl = 12, 13, 23$ ، كما يلي.

المعادلة الرابعة: عندما $pl = 23$ ، فنجد المعادلة الرابعة التالية:

$$\varepsilon_{32,11} + \varepsilon_{11,23} - \varepsilon_{31,21} - \varepsilon_{12,13} = 0$$

المعادلة الخامسة: عندما $pl = 13$ ، فنجد المعادلة الخامسة:

$$\varepsilon_{31,22} + \varepsilon_{22,13} - \varepsilon_{32,12} - \varepsilon_{21,23} = 0$$

المعادلة السادسة : عندما $pl = 12$ ، فنجد المعادلة السادسة:

$$\varepsilon_{21,33} + \varepsilon_{33,12} - \varepsilon_{23,13} - \varepsilon_{31,32} = 0$$

تسمى هذه المعادلات الست السابقة، بشروط الاستمرار أو بمعادلات توافق الانفعالات. وهي تكتب بعد الإصلاح، بالشكل المبسَّط التالي:

$$\partial_2^2 \varepsilon_{11} + \partial_1^2 \varepsilon_{22} = 2\partial_1 \partial_2 \varepsilon_{12}$$

$$\partial_1^2 \varepsilon_{33} + \partial_3^2 \varepsilon_{11} = 2\partial_1 \partial_3 \varepsilon_{13}$$

$$\partial_2^2 \varepsilon_{33} + \partial_3^2 \varepsilon_{22} = 2\partial_2 \partial_3 \varepsilon_{23} \qquad (22)$$

$$\partial_2 \partial_3 \varepsilon_{11} = \partial_1 (-\partial_1 \varepsilon_{23} + \partial_3 \varepsilon_{12} + \partial_2 \varepsilon_{13})$$

$$\partial_1\partial_3\varepsilon_{22} = \partial_2(-\partial_2\varepsilon_{13} + \partial_3\varepsilon_{12} + \partial_1\varepsilon_{23})$$

$$\partial_1\partial_2\varepsilon_{33} = \partial_3(-\partial_3\varepsilon_{12} + \partial_1\varepsilon_{32} + \partial_2\varepsilon_{31})$$

يمكن أن نثبت أن (22) ، بدورها تعطينا فقط ثلاث معادلات مستقلة بالمركبات الست المستقلة، لتنسور الانفعال ε_{ij} .

إن كل الكلام السابق صحيح إذا كانت C_0 منطقة بسيطة الترابط في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد R^3 . أما إذا كانت C_0 منطقة متعددة الترابط في الفضاء الإقليدي R^3 فهذا موضوع يمكن أن ندرسه فيما بعد.

فيما يلي سنثبت التكافؤ مابين الشكل (18) ، والشكل المستنتج بالطريقة التنسورية لمعادلات توافق الانفعالات، في النظام الإحداثي الديكارتي. ولهذا الغرض يلزمنا التمرين التالي.

تمرين: الشرط اللازم والكافي حتى تكون مصفوفة الأعداد الحقيقية $\{A_{mn}\}_{3\times 3}$ ، متناظرة ، هو أن يحقق حدها العام A_{mn} ،الشرط التالي:

$$\varepsilon_{pmn}\, A_{mn} = 0$$

ولنوجد الآن التكافؤ المذكور، معتمدين على التمرين السابق.

وفقاً للعلاقة (18) ، لدينا: $\varepsilon_{pnr}\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn} = 0$

والتي تكتب بالشكل المكافئ التالي: $\varepsilon_{pnr}(\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn}) = 0$.

وبالاعتماد على التمرين السابق، نجد أن هذا الشيء يكافئ أن المصفوفة التي حدها العام $\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn}$ متناظرة بالنسبة للدليلين n و r ؛أي يكافئ تتحقق العلاقة:

$$\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn} = \varepsilon_{lsm}\varepsilon_{ns,mr}$$

والذي بدوره يكافئ القول بأن:

$$\varepsilon_{lsm}(\varepsilon_{rs,mn} - \varepsilon_{ns,mr}) = 0$$

وحسب التطبيق السابق نفسه ، نجد أن هذا الشيء يكافئ القول بأن المصفوفة ذات الحد العام $\varepsilon_{rs,mn} - \varepsilon_{ns,mr}$ ، متناظرة بالنسبة لـ m , s ؛ أي يكافئ تحقق العلاقة:

$$\varepsilon_{rs,mn} - \varepsilon_{ns,mr} = \varepsilon_{rm,sn} - \varepsilon_{nm,sr}$$

والذي تكافئ العلاقة التالية:

$$\varepsilon_{rs,mn} + \varepsilon_{nm,sr} - \varepsilon_{ns,mr} - \varepsilon_{rm,sn} = 0$$

فإذا غيرنا الآن، رمز الرباعية $rsmn$ إلى الرمز $ijkl$، فتصبح جملة المعادلات السابقة بالشكل:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \qquad (23)$$

وهو الشكل نفسه لمعادلات توافق الانفعالات ، في النظام الإحداثي الديكارتي، والمستنتج في الفصل الرابع.

فيما يلي سنصل إلى المعادلات (22) ، انطلاقاً من المعادلات (23) ،التي حصلنا عليها سابقا وفقاً للطريقة التنسورية.في الفصل الثاني، وجدنا أن $ijkl$، تأخذ - بحسب العلاقة (27)- القيم التالية:

$$ijkl = 3121, 3212, 3132, 1212, 3232, 3131$$

ولنعوض الآن هذه القيم في العلاقات (23) ، فنجد العلاقات التالية:

القيمة الأولى: $ijkl = 3121$ ، تقودنا إلى المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{31,21} + \varepsilon_{21,31} - \varepsilon_{11,32} - \varepsilon_{32,11} = 0$$

وبالتالي:

$$\partial^2_{13}\varepsilon_{12} + \partial^2_{12}\varepsilon_{13} - \partial^2_{11}\varepsilon_{23} - \partial^2_{32}\varepsilon_{11} = 0$$

القيمة الثانية : $ijkl = 3212$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{32,12} + \varepsilon_{12,23} - \varepsilon_{22,13} - \varepsilon_{31,22} = 0$$

وبالتالي :

$$\partial^2_{32}\varepsilon_{12} + \partial^2_{12}\varepsilon_{23} - \partial^2_{22}\varepsilon_{13} - \partial^2_{31}\varepsilon_{22} = 0$$

القيمة الثالثة : $ijkl = 3132$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{31,32} + \varepsilon_{23,13} - \varepsilon_{21,33} - \varepsilon_{33,12} = 0$$

وبالتالي:

$$\partial^2_{13}\varepsilon_{23} + \partial^2_{23}\varepsilon_{13} - \partial^2_{12}\varepsilon_{33} - \partial^2_{33}\varepsilon_{12} = 0$$

القيمة الرابعة: $ijkl = 1212$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{21,21} - \varepsilon_{22,11} - \varepsilon_{11,22} = 0$$

وبالتالي :

$$2\,\partial^2_{12}\varepsilon_{12} - \partial^2_{22}\varepsilon_{11} - \partial^2_{11}\varepsilon_{22} = 0$$

القيمة الخامسة : $ijkl = 3232$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{23,23} + \varepsilon_{32,32} - \varepsilon_{22,33} - \varepsilon_{33,22} = 0$$

وبالتالي:

$$2\,\partial^2_{23}\varepsilon_{23} - \partial^2_{22}\varepsilon_{33} - \partial^2_{33}\varepsilon_{22} = 0$$

أخيرا، لقيمة السادسة: $ijkl = 3131$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{13,13} + \varepsilon_{31,31} - \varepsilon_{11,33} - \varepsilon_{33,11} = 0$$

وبالتالي:

$$2\,\partial^2_{13}\varepsilon_{13} - \partial^2_{11}\varepsilon_{33} - \partial^2_{33}\varepsilon_{11} = 0$$

وهذه المعادلات الست، هي نفسها المعادلات الست، التي حصلنا عليها في هذا الفصل نفسه، بالطريقة الهندسية، وفي الإحداثيات الديكارتية.

ثانياً: معادلات توافق الانفعالات اللاغرانجية، اللامتناهية في الصغر، بطريقة Heinbockel ، التقليدية، في النظام الإحداثي الديكارتي، للجسم المرن من نوع (H).

في عام ١٩٩٦ قام *Heinbockel* باستنتاج معادلات توافق الانفعالات اللاغرانجية اللامتناهية في الصغر بطريقتة التقليدية ، في النظام الإحداثي الديكارتي كما يلي:

نقطة الانطلاق هي العلاقة التالية:

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \tag{24}$$

حيث أن :

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad , \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

وبالتالي، باشتقاق طرفي العلاقة (24) ، جزئياً بالنسبة لـ x_k ، نحصل على العلاقة التالية:

$$u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} + \omega_{ij,k} \tag{25}$$

وبما أن الدوال u_i من الصف C^2 في الشكل اللاغرانجي للجسم المرن المدروس، ذي الانفعالات اللامتناهية في الصغر، فإن:

$$u_{i,jk} = u_{i,kj} \tag{26}$$

وبالاستفادة من (25)، فإن (26) تكتب، بدلالة مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية اللامتناهية في الصغر، ومصفوفة الدورانات اللاغرانجية اللامتناهية في الصغر، بالشكل:

$$\varepsilon_{ij,k} + \omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} + \omega_{ik,j} \qquad (27)$$

أو بالشكل:

$$\varepsilon_{ij,k} - \varepsilon_{ik,j} = \omega_{ik,j} - \omega_{ij,k} \qquad (28)$$

وبما أن :

$$\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_i} \qquad (29)$$

فتصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$\varepsilon_{ij,k} - \varepsilon_{ik,j} = \omega_{jk,i} \qquad (30)$$

وبما أن الدوال ω_{ij} بدورها ، من الصف C^2 في الشكل اللاغرانجي للجسم المرن المدروس، ذي الانفعالات اللامتناهية في الصغر، فإن:

$$\frac{\partial^2 \omega_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} = \frac{\partial^2 \omega_{jk}}{\partial x_l \partial x_i} \qquad (31)$$

فبحذف الدورانات اللاغرانجية اللامتناهية في الصغر، من العلاقة (30) ، وذلك من خلال اشتقاق طرفي هذه العلاقة جزئياً بالنسبة لـ x_l ، ومن ثم استخدام العلاقة (31)، فإننا نحصل على العلاقة التالية:

$$\varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{ik,jl} = \varepsilon_{lj,ki} - \varepsilon_{lk,ji} \qquad (32)$$

بالتالي:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{lk,ji} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{lj,ki} = 0 \qquad (33)$$

وهي معادلات توافق الانفعالات اللاغرانجية اللامتناهية في الصغر، وفقاً لطريقة *Heinbockel* التقليدية.

فيما يلي، في الفقرة القادمة، سنستنتج بنفس الطريقة، معادلات توافق الانفعالات اللاغرانجية اللامتناهية في الصغر، في نظام إحداثي منحني كيفي η_i.

معادلات توافق انفعالات الجسم المرن دقيق الاستقطاب من نوع (A-K)

وجدنا أن التنسورين γ_{ji}, x_{ji} معطيان وفق العلاقات الهندسية التالية:

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \in_{kji} \varphi_k , \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j} , \quad i,j,k = 1,2,3. \qquad (1)$$

من العلاقات الهندسية (1) يمكننا تعيين المركبات الديكارتية u_i و φ_i لكلٍ من مقطع الازاحة المتجهي **u** ومقطع التوجهات المتجهي φ، على الترتيب. ومن أجل تحديد هذه المركبات الست، المذكورة لدينا في (1)، لدينا 18 معا دلة اشتقاقية، تحت تصرفنا. حتى تكون هذه المركبات الست، وحيدة (الأمر الذي يضمن انتقالاً وحيداً لمركز كتل الجزئي ، ودوراناً وحيداً لهذا الجزيئ حول مركز كتله)، فلا يمكن أن تكون الدوال γ_{ji}, x_{ji} اختيارية، بل يجب أن تحقق شروط محددة. فيما يلي سنقوم باستنتاج هذه الشروط المحددة، والتي في المرونة التقليدية تسمى بشروط التوافق الهندسية.

نرمز بـــ $\mathbf{u}^0$ و $\boldsymbol{\varphi}^0$ لمقطع الإزاحة ومقطع التوجهات في النقطة المادية اللاغرانجية $\mathbf{P}^0(\mathbf{x}^0)$، وبـــ $\mathbf{u}'$ و $\boldsymbol{\varphi}'$ لمقطع الإزاحة ومقطع التوجهات في النقطة المادية اللاغرانجية $\mathbf{P}'(\mathbf{x}')$ من المنطقة بسيطة الترابط التي يشغلها الجسم في لحظة البدء.

إن مقطع الإزاحة في النقطة المادية $\mathbf{P}'(\mathbf{x}')$ يمكن التعبير عنه بواسطة تكامل منحني على طول منحني C يصل النقطتين $\mathbf{P}^0(\mathbf{x}^0)$ و $\mathbf{P}'(\mathbf{x}')$ وفق العلاقة التكاملية التالية:

$$u_i'(\mathbf{x}') = u_i^0(\mathbf{x}^0) + \int_{p^0}^{p'} du_i = u_i^0(\mathbf{x}^0) + \int_{p^0}^{p'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d x_j \qquad (2)$$

وبشكلٍ مشابه من أجل مقطع التوجهات في النقطة المادية $\mathbf{P}'(\mathbf{x}')$ ، نحصل على:

$$\varphi_i'(\mathbf{x}') = \varphi_i^0(\mathbf{x}^0) + \int_{p^0}^{p'} d\varphi_i = \varphi_i^0(\mathbf{x}^0) + \int_{p^0}^{p'} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} d x_j \qquad (3)$$

باستخدام (1) يمكن كتابة (2) بالشكل :

$$u_i'(\mathbf{x}') = u_i^0(\mathbf{x}^0) + \int_{p^0}^{p'} (\gamma_{ji} + \epsilon_{kji}\ \varphi_k)\, d x_j\,. \qquad (4)$$

بمكاملة الحد الأخير من الطرف الأيمن من العلاقة السابقة (أي الحد: $\epsilon_{kji} \int_{p^0}^{p'} \varphi_k\, d x_j$)، بمكاملته بالتجزئة، نحصل على:

$$\begin{aligned} \epsilon_{kji} \int_{p^0}^{p'} \varphi_k\, d x_j &= \epsilon_{kji} \int_{p^0}^{p'} \varphi_k\, d(x_j - x_j') = \\ &= -\epsilon_{kji}\ (x_j^0 - x_j')\, \varphi_k^0 - \epsilon_{kji} \int_{p^0}^{p'} (x_j - x_j')\, \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\ell}\, d x_\ell \end{aligned} \qquad (5)$$

حيث هنا φ^0 تمثل قيمة المقطع المتجهي φ في النقطة المادية اللاغرانجية $\mathbf{P}^0(\mathbf{x}^0)$.

حيث في(5) استبدلنا dx_j بـ $d(x_j - x_j')$، كون أن $\mathbf{P}'(\mathbf{x}')$ نقطة مثبتة، بالتالي $dx_j' = 0$. ينتج عن (1) أن (5) تأخذ الشكل التالي:

$$\epsilon_{kji} \int_{p^0}^{p'} \varphi_k \, dx_j = -\epsilon_{kji} (x_j^0 - x_j') \varphi_k^0 - \epsilon_{kji} \int_{p^0}^{p'} (x_j - x_j') \kappa_{\ell k} \, dx_\ell \qquad (6)$$

وبتعويض(6) في (4)، نجد:

$$u_i'(\mathbf{x}') = u_i^0(\mathbf{x}^0) - \epsilon_{kji} (x_j^0 - x_j') \varphi_k^0 + \int_{p^0}^{p'} \left[\gamma_{\ell i} - \epsilon_{kji} (x_j - x_j') \kappa_{\ell k} \right] dx_\ell \qquad (7)$$

أو:

$$u_i'(\mathbf{x}') = u_i^0(\mathbf{x}^0) + \epsilon_{kji} (x_j' - x_j^o) \varphi_k^0 + \int_{p^0}^{p'} U_{\ell i} \, dx_\ell \qquad (8)$$

حيث: $U_{\ell i} = \gamma_{\ell i} - \epsilon_{kji} (x_j - x_j') \kappa_{\ell k}$.

أما باستخدام (1)، تأخذ (3) الشكل:

$$\varphi_i'(\mathbf{x}') = \varphi_i^0(\mathbf{x}^0) + \int_{p^0}^{p'} d\varphi_i = \varphi_i^0(\mathbf{x}^0) + \int_{p^0}^{p'} \kappa_{\ell i} \, dx_\ell \qquad (9)$$

الآن، إذا كانت الدوال $u_i'(\mathbf{x}')$ و $\varphi_i'(\mathbf{x}')$ مستمرة ووحيدة القيمة ، عندئذٍ كلاً من التكاملين (8) و(9) لا يتعلق بالطريق المسلوك الذي يصل النقطة المادية $\mathbf{P}^0(\mathbf{x}^0)$ بالنقطة المادية $\mathbf{P}'(\mathbf{x}')$، بينما يتعلق فقط بنقطة البداية $\mathbf{P}^0(\mathbf{x}^0)$ وبنقطة النهاية $\mathbf{P}'(\mathbf{x}')$، بالتالي يجب أن يكون كلٌّ من التابعين المكاملين: $U_{\ell i}$ و $\kappa_{\ell i}$ تفاضلاً تاماً.

إن الشرط اللازم حتى تكون الدوال المكاملة $U_{\ell i}$ و $\kappa_{\ell i}$ تفاضلات تامة هو أن يكون:

$$\frac{\partial U_{\ell i}}{\partial x_h} = \frac{\partial U_{hi}}{\partial x_\ell} \quad , \quad \frac{\partial \kappa_{\ell i}}{\partial x_h} = \frac{\partial \kappa_{hi}}{\partial x_\ell} \tag{10}$$

وفي الوقت نفسه ، تمثل أيضاً الشروط السابقة (10) شروطاً كافية كي يكون كلاً من التكامليين المنحنيين (8) و(9) وحيد القيمة في المنطقة بسيطة الترابط المعتبرة.

ينتج عن العلاقات (10)، تحقق الشروط التالية:

$$\gamma_{\ell i,h} - \gamma_{hi,\ell} - \epsilon_{khi}\, \kappa_{\ell k} + \epsilon_{k\ell i}\, \kappa_{hk} = 0 \,, \tag{11}$$

$$\kappa_{\ell i,h} = \kappa_{hi,\ell} \,, \tag{12}$$

التي هي شروط التوافق المطلوبة.

الفصل الثالث: طريقة متجه Schaefer في حل مسائل النموذج (E-N):

أولاً) الشكل المتجهي طريقة متجه Schefer في كتابة النموذج (E-N) بالشكل:

$$\left(\mathrm{E}-\mathrm{N}\right)=\mathrm{Nonhomgeneous}\left(\mathrm{H}\right)+\mathrm{Homgeneous}\left(\mathrm{E}-\mathrm{N}\right)$$

لمحة عن الطريقة: استخدمت هذه الطريقة في [35] في حل المسائل الحدية للحالة المستوية لانفعالات الجسم (E-N)، وذلك انطلاقاً من متجه Schaefer :

$\zeta \equiv \left(0\,,\,0\,,\,\frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}\right)$ ،(حيث: $\alpha\,,\,\beta=1\,,2$)، وحيث $\in_{\alpha\beta}$ هو شبه تنسور Levi-Civita على الفضاء الاقليدي ثنائي البعد: $\mathbb{R}^2$. بعدها تم وبالطريقة نفسها، حل مسائل القيم الحدية للحالة ثنائية البعد لانفعالات الجسم من النموذج (E-N)، حيث الانفعالات المرنة متناظرة محورياً ([75]-[72] و[48]-[43] و[53]-[50])، كما أشار الباحثون انفسهم إلى إمكانية حل نفس هذه المسائل، أي مسائل القيم الحدية للحالة ثنائية البعد وكذلك الحالة ثلاثية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E-N)، بوجود حقل درجات حرارة، وبوجود حقل لدونة. وفي عام 2004 قام الباحث Dyszlewicz في [1] باستخدام متجه Schefer بشكله العام، في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية للحالة الفراغية للانفعالات المرنة للجسم من نموذج (E-N)، بما يتوافق مع الحالة الديناميكية لهذا الجسم.

نعرض فيمايلي كيف ناقش الباحث Dyszlewicz طريقة متجه Schefer بشكله العام، في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية للحالة الفراغية للانفعالات المرنة للجسم من نموذج (E-N)، بما يتوافق مع الحالة الديناميكية لهذا الجسم.

<u>نقطة البداية</u>: هي المعادلات المتجهية التالية للحركة لـ Lame للجسم من نوع (E-N)، والمحققة في $\Omega \times \mathrm{T}_+$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\square}_2\,\mathbf{u}+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+2\alpha\;\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{X}=\mathbf{0}\;,\\&\overrightarrow{\square}_4\,\boldsymbol{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}+2\alpha\;\mathbf{curl}\,\mathbf{u}+\mathbf{Y}=\mathbf{0}\end{aligned}\qquad(1)$$

حيث: $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\varphi}$، على الترتيب، هما مقطع الإزاحة ومقطع التوجهات، المتجهيين، كما أن: $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$، على الترتيب، هما مقطع القوة الحجمية، المتجهي للجسم، ومقطع العزم الحجمي، المتجهي له، أيضاً $\mathbf{0}$ هو المقطع المتجهي الصفري، أخيراً:

$$\vec{\square}_2=(\mu+\alpha)\vec{\nabla}^2-\rho\,\partial_t^2 \;\;,\;\; \vec{\square}_4=(\gamma+\varepsilon)\vec{\nabla}^2-4\alpha-J\,\partial_t^2$$

حيث $\vec{\nabla}^2$ هو مؤثر Laplace الاشتقاقي، المتجهي، المعطى بحسب تعريفه بالعلاقة:

$\vec{\nabla}^2 := \mathbf{grad}\,\mathrm{div} - \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}$، كما أن الرمز ∂_t يدل على المشتق الجزئي الزمني الأول: $\partial_t f = \dot{f} = \partial f/\partial t$؛ $\partial_t^2 f = \partial_t(\partial_t f) = \ddot{f}$.

إلى المعادلات (1) نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية.

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times\mathrm{T}$:

$$\mathbf{u}=\mathbf{f} \;\;,\;\; \boldsymbol{\varphi}=\mathbf{g} \tag{2}$$

حيث المقاطع المتجهية التالية معلومة: $\mathbf{f}\,,\,\mathbf{g}:\partial\Omega\times\mathrm{T}\to\mathbb{R}^3$،

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\mathbf{u}=\mathbf{h} \;\;,\;\; \boldsymbol{\varphi}=\mathbf{k} \;\;,\;\; \dot{\mathbf{u}}=\Psi \;\;,\;\; \dot{\boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{\chi} \tag{3}$$

حيث المقاطع المتجهية التالية معلومة: $\mathbf{h},\mathbf{k},\Psi,\boldsymbol{\chi}:\Omega\to\mathbb{R}^3$.

في الخطوة الثانية، نُدخل متجه Schefer ([1, Pages:21-24]):

$$\boldsymbol{\zeta}=\frac{1}{2}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\varphi} \tag{4}$$

علماً أن: $\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\zeta}^0+\boldsymbol{\zeta}'$، و $\boldsymbol{\zeta}^0=\mathbf{0}$ يتوافق مع الجسم من نوع (H). عندئذٍ نحصل على مسألة Lame التالية في القيم الحدية والابتدائية، المتوافقة مع الجسم من نوع (H)، لأجل الحالة الديناميكية له:

معادلات الحركة المحققة في $\Omega\times\mathrm{T}_+$:

$$\overset{*}{\vec{\square}}_2\,\mathbf{u}^0+(\lambda+\mu)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}^0+\mathbf{X}=\mathbf{0} \tag{5}$$

حيث $\mathbf{u}^0$ مقطع الإزاحة المتجهي الموافق للجسم من نموذج (H)، والمؤثر التحريكي: $\overset{*}{\vec{\square}}_2=\mu\,\vec{\nabla}^2-\rho\,\partial_t^2$ ، مع الشروط الحدية والابتدائية التالية:

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times T$:

$$\mathbf{u^0}=\mathbf{f} \tag{6}$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\mathbf{u^0}=\mathbf{h}\ ,\ \ \dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{0}}=\Psi \tag{7}$$

إضافةً إلى ما تقدم، نحصل على نظام معادلات حركة Lame ، المتمم التالي، المحقق في $\Omega\times T_+$:

$$\begin{aligned}&\vec{\square}_2\,\mathbf{u}'+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'+2\alpha\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'+\hat{\mathbf{X}}=\ \mathbf{0}\ ,\\&\overset{*}{\vec{\square}}_2\left[\vec{\square}_4\,\boldsymbol{\varphi}'+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'+2\alpha\ \mathbf{curl}\,\mathbf{u}'\right]+\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{8}$$

حيث المقطعان المتجهيان $\hat{\mathbf{X}}\ ,\ \hat{\mathbf{Y}}$ معطيان بـ:

$$\hat{\mathbf{X}}=\ \mathbf{0}\ ,\ \hat{\mathbf{Y}}=\overset{*}{\vec{\square}}_2\,\mathbf{Y}-\frac{1}{2}\overset{*}{\vec{\square}}_4\ \mathbf{curl}\,\mathbf{X} \tag{9}$$

حيث: $\overset{*}{\vec{\square}}_4=(\gamma+\varepsilon)\vec{\nabla}^2-J\,\partial_t^2$.

<u>الاثبات:</u>

من مقطع Schefer المتجهي، نحصل لأجل $\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{0}}=\mathbf{0}$ على:

$$\mathbf{0}=\frac{1}{2}\ \mathbf{curl}\,\mathbf{u^0}-\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}}$$

أو:

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}}=\frac{1}{2}\ \mathbf{curl}\,\mathbf{u^0} \tag{10}$$

أما بأخذ دوران طرفي المعادلة المتجهية الاشتقاقية (5)، نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$\mathbf{curl}\left(\overset{*}{\vec{\square}}_2\,\mathbf{u^0}\right)+(\lambda+\mu)\,\mathbf{curl}\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u^0}\right)+\ \mathbf{curl}\,\mathbf{X}=\ \mathbf{0} \tag{11}$$

بما أن:

$$\mathbf{curl}\left(\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\,\mathbf{u^0}\right)=\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\mathbf{u^0}\right)\ ,\quad \mathbf{curl}\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u^0}\right)=\mathbf{0}$$

فتصبح (11) بالشكل:

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\mathbf{u^0}\right)+\mathbf{curl}\,\mathbf{X}=\mathbf{0} \qquad (12)$$

بتعويض (10) في (12) نحصل على المعادلة الاشتقاقية التالية المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\,\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}}+\frac{1}{2}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{X}=\mathbf{0} \qquad (13)$$

ندعو المعادلة الاشتقاقية السابقة، بالمعادلة المساعدة الأولى. هذا من جهة أولى. ومن جهة ثانية،

تكتب معادلات Lame (1) بالشكل:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\square}_2\,\mathbf{u^0}+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u^0}+2\alpha\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}}+\hat{\mathbf{X}}+\\&+\overrightarrow{\square}_2\,\mathbf{u}'+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'+2\alpha\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'+\mathbf{X}=\mathbf{0}\ ,\\&\overrightarrow{\square}_4\,\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}}+2\alpha\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u^0}+\\&+\overrightarrow{\square}_4\,\boldsymbol{\varphi}'+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'+2\alpha\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'+\mathbf{Y}=\mathbf{0}\end{aligned} \qquad (14)$$

الآن بتعويض (10) في المعادلة الأولى في (14)، وبالاستفادة من تعريف اللابلاسيان المتجهي $\vec{\nabla}^2$، نحصل على المعادلة الاشتقاقية، المتجهية التالية، المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\,\mathbf{u^0}+(\lambda+\mu)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u^0}+\mathbf{X}+\\&+\overrightarrow{\square}_2\,\mathbf{u}'+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'+2\alpha\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'+\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{0}\ ,\end{aligned}$$

بتعويض (5) في المعادلة السابقة، نحصل على المعادلة الاشتقاقية، المتجهية، التالية، المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$\overrightarrow{\square}_2\,\mathbf{u}'+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'+2\alpha\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'+\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{0} \qquad (15)$$

وهو المطلوب، الأول.

ومن جهة ثانية، بتطبيق المؤثر الاشتقاقي المتجهي $\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2$ على طرفي المعادلة الثانية في (14) وبالأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \overrightarrow{\square}_4 = \overrightarrow{\square}_4 \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \quad , \quad \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \,\mathbf{grad}\,\mathrm{div} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2$$

ومن ثم باستخدام المعادلتين (13) و(12)، نحصل على المعادلة الاشتقاقية المتجهية التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{\square}_4 \mathbf{curl}\,\mathbf{X} - 2\alpha\ \mathbf{curl}\,\mathbf{X} +$$
$$+\ \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \left[\overrightarrow{\square}_4 \boldsymbol{\varphi}' + (\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}' + 2\alpha\ \mathbf{curl}\,\mathbf{u}'\right] + \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

ينتج عن ذلك وعن العلاقة:

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{\square}_4 \mathbf{curl}\,\mathbf{X} - 2\alpha\ \mathbf{curl}\,\mathbf{X} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\square}_4 + 4\alpha\right)\mathbf{curl}\,\mathbf{X} =$$
$$= -\frac{1}{2}\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4 \mathbf{curl}\,\mathbf{X}$$

أن المعادلة الاشتقاقية المتجهية التالية محققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \left[\overrightarrow{\square}_4 \boldsymbol{\varphi}' + (\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}' + 2\alpha\ \mathbf{curl}\,\mathbf{u}'\right] +$$
$$+\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \mathbf{Y} - \frac{1}{2}\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4 \mathbf{curl}\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

أو:

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \left[\overrightarrow{\square}_4 \boldsymbol{\varphi}' + (\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}' + 2\alpha\ \mathbf{curl}\,\mathbf{u}'\right] + \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$$

حيث: $\hat{\mathbf{Y}} = \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \mathbf{Y} - \frac{1}{2}\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4\ \mathbf{curl}\,\mathbf{X}$. بذلك نكون قد أثبتنا الجزء المتبقي من المطلوب.

إلى نظام Lame المعادلاتي المتمم (8) نضيف الشروط الحدية والابتدائية، المعدَّلة التالية:

- الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{0} \ , \ \ \boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{g} - \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}} \qquad (16)$$

- الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{0} \ , \ \ \boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{k} - \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}}, \ \ \dot{\mathbf{u}}' = \mathbf{0} \ , \ \ \dot{\boldsymbol{\varphi}}' = \boldsymbol{\chi} - \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathbf{0}} \qquad (17)$$

حيث في (16) و(17)، ينتج المتجه $\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}}$ عن حل مسألة القيم الحدية والابتدائية، التقليدية (7) -(5) و (10).

بهذا الشكل فإن حل مسألة القيم الحدية والابتدائية، الأصلية (3) - (1) للجسم المرن دقيق الاستقطاب في إطار النموذج الرياضي (E-N)، يستبدل بحل مسألتي قيم حدية وابتدائية؛ الأولى هي التقليدية (7) - (5) و (10) لجسم Hooke في إطار النموذج الرياضي التقليدي (H)، والثانية هي المتممة (9) - (8) و (17) -(16) لجسم مرن دقيق الاستقطاب في إطار النموذج الرياضي الحاكم هو النموذج الرياضي (E-N) مع شروط حدية وابتدائية متجانسة.

عندئذٍ الحل الأصلي يعطى بـ:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathbf{0}} + \mathbf{u}' \ , \ \ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\varphi}' \qquad (18)$$

ومن أجل متطلبات هذه الرسالة، يلزمنا فيما يلي فصل المعادلة الاشتقاقية التقليدية (5)، وفصل المعادلتين الاشتقاقيتين المتممتين (8).

أولاً: فصل المعادلة الاشتقاقية التقليدية (5) :

لهذا الغرض نأخذ تفرق طرفي المعادلة الاشتقاقية (5)، ونأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\operatorname{div} \overset{*}{\overline{\square}}_2 = \overset{*}{\square}_2 \operatorname{div} \qquad (19)$$

حيث: $\overset{*}{\square}_2 = \mu \nabla^2 - \rho \, \partial_t^2$ و $\nabla^2 := \operatorname{div} \mathbf{grad}$ هو مؤثر Laplace الاشتقاقي السلمي، عندئذٍ نجد:

$$\overset{*}{\square}_2 \left(\operatorname{div} \mathbf{u}^{\mathbf{0}} \right) + (\lambda + \mu) \nabla^2 \left(\operatorname{div} \mathbf{u}^{\mathbf{0}} \right) + \operatorname{div} \mathbf{X} = 0$$

بالتالي نحصل على المعادلة الاشتقاقية، المنفصلة التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\square_1 \left(\operatorname{div} \mathbf{u}^{\mathbf{0}} \right) + \operatorname{div} \mathbf{X} = 0 \qquad (20)$$

حيث: $\square_1 := (\lambda+2\mu)\nabla^2 - \rho\,\partial_t^2$.

لنضع: $\overrightarrow{\square}_1 := (\lambda+2\mu)\overrightarrow{\nabla}^2 - \rho\,\partial_t^2$. عندئذٍ بتطبيق المؤثر الاشتقاقي المتجهي $\overrightarrow{\square}_1$ على طرفي المعادلة الاشتقاقية المتجهية (5)، نحصل على المعادلة الاشتقاقية المتجهية التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overrightarrow{\square}_1 \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \mathbf{u^0} + (\lambda+\mu)\,\overrightarrow{\square}_1\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u^0}\right) + \overrightarrow{\square}_1 \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

ينتج عن المعادلة السابقة، وعن العلاقة:

$$\overrightarrow{\square}_1 \mathbf{grad} = \mathbf{grad}\,\square_1 \qquad (21)$$

وعن المعادلة الاشتقاقية السلمية (20)، أن المعادلة الاشتقاقية التالية محققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overrightarrow{\square}_1 \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \mathbf{u^0} - (\lambda+\mu)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{X} + \overrightarrow{\square}_1 \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

أو

$$\boxed{\overrightarrow{\square}_1 \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \mathbf{u^0} = (\lambda+\mu)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{X} - \overrightarrow{\square}_1 \mathbf{X}} \qquad (22)$$

وهي المعادلة الاشتقاقية المتجهية، المحققة في $\Omega \times T_+$، والناتجة عن فصل المعادلة الاشتقاقية المتجهية التقليدية (5).

ثانياً: فصل المعادلتان الاشتقاقيتان المتجهيتان المتممتان (8) :

لهذا الغرض تلزمنا أربعة معادلات اشتقاقية متجهية مساعدة محققة في $\Omega \times T_+$؛ الأولى منفصلة بـ $\mathrm{div}\,\mathbf{u}'$ والثانية منفصلة بـ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'$، والثالثة والرابعة مترابطتين بـ $\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'$ و $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'$. وسنقوم فيمايلي باستنتاج كلٍ منها، بشكلٍ مفصل.

- المعادلة المنفصلة بـ $\mathrm{div}\,\mathbf{u}'$:

لإيجاد هذه المعادلة نطبق المؤثر div على طرفي المعادلة الأولى في (8)، ونستخدم العلاقة:

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\square}_2 = \square_2\,\mathrm{div} \qquad (23)$$

حيث: $\square_2 = (\mu+\alpha)\nabla^2 - \rho\,\partial_t^2$،

فنحصل على المعادلة الاشتقاقية السلمية، التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\square_2\left(\operatorname{div}\mathbf{u}'\right)+(\lambda+\mu-\alpha)\nabla^2\left(\operatorname{div}\mathbf{u}'\right)+\operatorname{div}\hat{\mathbf{X}}=0$$

أو

$$\square_1\left(\operatorname{div}\mathbf{u}'\right)+\operatorname{div}\hat{\mathbf{X}}=0 \qquad (24)$$

وهي المعادلة الأولى المساعدة، والمنفصلة بـ $\operatorname{div}\mathbf{u}'$ والمحققة في $\Omega \times T_+$.

- المعادلة المنفصلة بـ $\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}'$:

لإيجاد هذه المعادلة نطبق المؤثر div على طرفي المعادلة الثانية في (8)، ونستخدم العلاقة (19) والعلاقة:

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\square}_4=\square_4\operatorname{div} \qquad (25)$$

حيث: $\square_4=(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha-J\,\partial_t^2$،

فنحصل على المعادلة الاشتقاقية، السلمية، التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}_2\left[\square_4\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}'\right)+(\beta+\gamma-\varepsilon)\nabla^2\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}'\right)+2\alpha\times 0\right]+\operatorname{div}\hat{\mathbf{Y}}=0$$

أو:

$$\overset{*}{\square}_2\square_3\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}'\right)+\operatorname{div}\hat{\mathbf{Y}}=0 \qquad (26)$$

حيث: $\square_3=(\beta+2\gamma)\nabla^2-4\alpha-J\,\partial_t^2$،

وهي المعادلة الثانية المساعدة، والمنفصلة بـ $\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}'$ والمحققة في $\Omega \times T_+$.

- المعادلتان المترابطتان بـ $\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'$ و $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'$:

لإيجاد هاتين المعادلتين نطبق المؤثر **curl** على طرفي المعادلتين (8)، ونستخدم العلاقات التالية:

$$\begin{aligned}&\mathbf{curl}\,\overrightarrow{\square}_2=\overrightarrow{\square}_2\mathbf{curl}\ ,\ \mathbf{curl}\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2=\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\mathbf{curl}\ ,\\&\mathbf{curl}\,\overrightarrow{\square}_4=\overrightarrow{\square}_4\mathbf{curl}\ ,\ \mathbf{curl}\,\mathbf{grad}=\mathbf{0}\end{aligned} \qquad (27)$$

فنحصل على جملة المعادلتين الاشتقاقيتين، المتجهيتين، المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\square}_2\left(\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'\right)+2\alpha\ \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'+\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}=\ \mathbf{0}\ , \\ &\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[\overrightarrow{\square}_4\left(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)+2\alpha\ \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'\right]+\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{0} \end{aligned} \tag{28}$$

وهما جملة المعادلتين الاشتقاقيتين المتجهيتين المساعدتين، بـ $\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'$ و $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'$ ، والمحققتين في $\Omega \times T_+$.

بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4$ على طرفي المعادلة الأولى في (8)، والمؤثر $\overrightarrow{\square}_2$ على طرفي المعادلة الثانية في (8)، نحصل على المعادلتين الاشتقاقيتين المتجهيتين، التاليتين المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\overrightarrow{\square}_2\mathbf{u}'+(\lambda+\mu-\alpha)\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'+ \\ &+2\alpha\ \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\left(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)\ +\ \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\hat{\mathbf{X}}=\ \mathbf{0}\ , \\ &\overrightarrow{\square}_2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\boldsymbol{\varphi}'+(\beta+\gamma-\varepsilon)\overrightarrow{\square}_2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)+ \\ &+2\alpha\ \overrightarrow{\square}_2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'\right)\ +\ \overrightarrow{\square}_2\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{0} \end{aligned} \tag{29}$$

الآن، بتعويض $(28)_2$ في $(29)_1$ و $(28)_1$ في $(29)_2$، نحصل على المعادلتين الاشتقاقيتين المتجهيتين التاليتين، المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\overrightarrow{\square}_2\mathbf{u}'+(\lambda+\mu-\alpha)\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'+ \\ &-4\alpha^2\ \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'\right)\ -2\alpha\,\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}+\ \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\hat{\mathbf{X}}=\ \mathbf{0}\ , \\ &\overrightarrow{\square}_2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\boldsymbol{\varphi}'+(\beta+\gamma-\varepsilon)\overrightarrow{\square}_2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)+ \\ &-4\alpha^2\ \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)-2\alpha\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)\ +\ \overrightarrow{\square}_2\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{0}\ , \end{aligned} \tag{30}$$

ينتج عن ذلك وعن تعريف مؤثر Laplace المتجهي $\overrightarrow{\nabla}^2$، أن (30) تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\overrightarrow{\square}_2\mathbf{u}'+\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[(\lambda+\mu-\alpha)\,\overrightarrow{\square}_4-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'\right)+$$
$$+4\alpha^2\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\vec{\nabla}^2\mathbf{u}'\;-2\alpha\,\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}+\;\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\hat{\mathbf{X}}=\;\mathbf{0}\;,$$
$$(31)$$
$$\overrightarrow{\square}_2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\boldsymbol{\varphi}'+\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\overrightarrow{\square}_2-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)+$$
$$+4\alpha^2\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\vec{\nabla}^2\boldsymbol{\varphi}'-2\alpha\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)\;+\;\overrightarrow{\square}_2\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{0}$$

أو:

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\vec{\nabla}^2\right)\mathbf{u}'+\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[(\lambda+\mu-\alpha)\,\overrightarrow{\square}_4-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'\right)$$
$$-2\alpha\,\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}+\;\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\hat{\mathbf{X}}=\;\mathbf{0}\;,$$
$$(32)$$
$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\vec{\nabla}^2\right)\boldsymbol{\varphi}'+\;\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\overrightarrow{\square}_2-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)$$
$$-2\alpha\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)\;+\;\overrightarrow{\square}_2\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{0}$$

أخيراً، بتطبيق المؤثر $\overrightarrow{\square}_1$ على $(32)_1$، والمؤثر $\overrightarrow{\square}_3$ على $(32)_2$، من ثم باستخدام العلاقتين: (21) والعلاقة:

$$\left(\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_3\right)\mathbf{grad}\;=\;\mathbf{grad}\left(\overset{*}{\square}_2\square_3\right)\qquad(33)$$

من ثم باستخدام المعادلتين، المنفصلتين المساعدتين (24) و (26)، نحصل على المعادلتين الاشتقاقيتين، المتجهيتين، التاليتين، المحققتين في $\Omega\times T_+$:

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_1\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\vec{\nabla}^2\right)\mathbf{u}'=\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[(\lambda+\mu-\alpha)\,\overrightarrow{\square}_4-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{X}}\right)$$
$$+2\alpha\,\overrightarrow{\square}_1\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}-\;\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_1\overrightarrow{\square}_4\hat{\mathbf{X}}\;,$$

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_3\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\vec{\nabla}^2\right)\boldsymbol{\varphi}'=\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\overrightarrow{\square}_2-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{Y}}\right)$$
$$+2\alpha\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_3\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)\;-\;\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_3\hat{\mathbf{Y}}$$

أو:

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_1\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\vec{\nabla}^2\right)\mathbf{u}'= \\
&=\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left\{\left[(\lambda+\mu-\alpha)\,\overrightarrow{\square}_4-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{X}}\right)-\overrightarrow{\square}_1\overrightarrow{\square}_4\hat{\mathbf{X}}\right\}+ \\
&+2\alpha\,\overrightarrow{\square}_1\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}\ , \\
&\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_3\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\vec{\nabla}^2\right)\boldsymbol{\varphi}'=2\alpha\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_3\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)+ \\
&+\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\overrightarrow{\square}_2-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{Y}}\right)-\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_3\hat{\mathbf{Y}}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

أخيراً، سنوجد الآن، المعادلة المنفصلة بـ متجه Schefer: $\zeta=\zeta^0+\zeta'=\zeta'$، حيث: ($\zeta^0=\mathbf{0}\ ,\ \zeta'=\frac{1}{2}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'-\boldsymbol{\varphi}'$)، انطلاقاً من المعادلتين الاشتقاقيتين المتجهيتين (31)، باتباع مايلي. بتطبيق المؤثر **curl** على طرفي المعادلة $(32)_1$ ، وبضرب طرفي المعادلة $(32)_2$ بـ 2 ، نحصل على:

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\vec{\nabla}^2\right)\left(\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'\right)+\mathbf{0} \\
&-2\alpha\,\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}+\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)=\mathbf{0}\ , \\
&\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\vec{\nabla}^2\right)\left(2\boldsymbol{\varphi}'\right)+ \\
&+2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\overrightarrow{\square}_2-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'\right) \\
&-4\alpha\,\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)+2\,\overrightarrow{\square}_2\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

بطرح $(35)_2$ من $(35)_1$، والأخذ بعين الاعتبار العلاقة:

$$\zeta=\zeta'=\frac{1}{2}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}'-\boldsymbol{\varphi}'$$

نحصل على المعادلة الاشتقاقية المتجهية التالية، المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\overrightarrow{\nabla}^2\right)\zeta-2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\overrightarrow{\square}_2-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)$$
$$-2\alpha\,\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}-2\overrightarrow{\square}_2\hat{\mathbf{Y}}+\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_4\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)+4\alpha\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)=\mathbf{0}\ ,$$

ينتج عن ذلك وعن تعريف مؤثر Laplace المتجهي $\overrightarrow{\nabla}^2$، وعن تعريف المؤثرين الاشتقاقيين المتجهيين $\overrightarrow{\square}_2$ و $\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2$ والمؤثرين الاشتقاقيين المتجهيين $\overrightarrow{\square}_4$ و $\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4$ ، أن المعادلة الاشتقاقية السابقة تأخذ الشكل التالي في $\Omega\times T_+$:

$$2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\overrightarrow{\nabla}^2\right)\zeta-2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\overrightarrow{\square}_2-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)$$
$$-2\alpha\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{Y}}-2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\hat{\mathbf{Y}}+\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)=\mathbf{0}$$

أو:

$$2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\overrightarrow{\nabla}^2\right)\zeta-2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\overrightarrow{\square}_2-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}'\right)$$
$$-2\alpha\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{Y}}-\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\left[2\hat{\mathbf{Y}}-\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)\right]=\mathbf{0}$$

الأن، بتطبيق المؤثر الاشتقاقي المتجهي $\overrightarrow{\square}_3$ على طرفي المعادلة الاشتقاقية المتجهية السابقة، وبالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (33) والمعادلة المنفصلة المساعدة (26) ، نحصل على المعادلة الاشتقاقية، المتجهية، المنفصلة التالية، المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_3\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\overrightarrow{\nabla}^2\right)\zeta=-2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\overrightarrow{\square}_2-4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{Y}}\right)$$
$$+2\alpha\overrightarrow{\square}_3\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{Y}}\right)+\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_3\left[2\hat{\mathbf{Y}}-\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)\right]$$

أو:

$$2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_3\left(\overrightarrow{\square}_2\overrightarrow{\square}_4+4\alpha^2\overrightarrow{\nabla}^2\right)\zeta=$$
$$=2\left[\alpha\overrightarrow{\square}_3-(\beta+\gamma-\varepsilon)\overrightarrow{\square}_2+4\alpha^2\right]\left(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{Y}}\right)+$$
$$+\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\overrightarrow{\square}_3\left[2\hat{\mathbf{Y}}-\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4\left(\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}\right)\right]$$

وبما أن:

$$\alpha \overrightarrow{\square}_3 - (\beta+\gamma-\varepsilon)\overrightarrow{\square}_2 + 4\alpha^2 = \alpha \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4 - (\beta+\gamma-\varepsilon)\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \qquad (36)$$

فتأخذ بذلك المعادلة الاشتقاقية، المتجهية، المنفصلة السابقة، تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\boxed{\begin{aligned} & 2\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \overrightarrow{\square}_3 \left(\overrightarrow{\square}_2 \overrightarrow{\square}_4 + 4\alpha^2 \overrightarrow{\nabla}^2 \right) \zeta = \\ & 2\left[\alpha \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4 - (\beta+\gamma-\varepsilon)\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \right] \left(\mathbf{grad}\ \mathrm{div}\ \hat{\mathbf{Y}} \right) + \\ & + \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2 \overrightarrow{\square}_3 \left[2\hat{\mathbf{Y}} - \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_4 \left(\mathbf{curl}\ \hat{\mathbf{X}} \right) \right] \end{aligned}} \qquad (37)$$

إن المعادلة السابقة، هي المعادلة الاشتقاقية، المتجهية، المنفصلة بمتجه Schefer: ζ، والمحققة في $\Omega \times T_+$.

ثانياً)الشكل السلمي لطريقة متجه Schefer في كتابة النموذج (E-N) بالشكل:

$$(\mathrm{E}-\mathrm{N}) = \mathrm{Nonhomgeneous}(\mathrm{H}) + \mathrm{Homgeneous}(\mathrm{E}-\mathrm{N})$$

في هذه الفقرة، ستسقط طريقة متجه Schefer في كتابة النموذج (E-N) بالشكل السابق، سنسقطها في النظام الاحداثي الديكارتي: $[O\ ,\ (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)]$ ، (J.Dyszlewicz [1, pp. 333]).

<u>نقطة البداية</u>: هي المعادلات السلمية الديكارتية التالية للحركة لـ Lame للجسم من نوع (E-N)، والمحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned} & \square_2 u_i + (\lambda+\mu-\alpha)\, u_{k,ki} + 2\alpha \in_{ijk} \varphi_{k,j} + X_i = 0\ , \\ & \square_4 \varphi_i + (\beta+\gamma-\varepsilon)\, \varphi_{k,ki} + 2\alpha \in_{ijk} u_{k,j} + Y_i = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث هنا نعود ونذكر بأن:

$$\square_2 = (\mu+\alpha)\nabla^2 - \rho\,\partial_t^2 \ ,\quad \square_4 = (\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha - J\,\partial_t^2$$

حيث ∇^2 هو مؤثر Laplace الاشتقاقي، السلمي، المعطى بحسب تعريفه بالعلاقة:

$\nabla^2 := \text{div}\,\mathbf{grad} = (\cdots)_{,ii}$، كما أن الرمز ∂_t يدل على المشتق الجزئي الزمني الأول: $\partial_t f = \dot{f} = \partial f / \partial t$؛ $\partial_t^2 f = \partial_t(\partial_t f) = \ddot{f}$.

إلى المعادلات (1) نضيف الشروط الحدية والابتدائية، السلمية الديكارتية التالية.

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$u_i = f_i \ , \ \varphi_i = g_i \tag{2}$$

حيث التوابع الحقيقية التالية معلومة: $f_i \ , \ g_i : \partial\Omega \times \mathrm{T} \to \mathbb{R}$،

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_i = h_i \ , \ \varphi_i = k_i \ , \ \dot{u}_i = \Psi_i \ , \ \dot{\varphi}_i = \chi_i \tag{3}$$

حيث التوابع الحقيقية التالية معلومة: $h_i \ , k_i \ , \Psi_i \ , \ \chi_i : \Omega \to \mathbb{R}$.

في الخطوة الثانية، نُدخل المركبات الديكارتية لمتجه Schefer ([1, Pages:29-33]):

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \in_{ijk} u_{k,j} - \varphi_i \tag{4}$$

علماً أن: $\zeta_i = \zeta_i^0 + \zeta_i'$، و $\zeta_i^0 = 0$ يتوافق مع الجسم من نوع (H). عندئذٍ نحصل على مسألة Lame التالية في القيم الحدية والابتدائية، بشكلها الديكارتي، والمتوافقة مع الجسم المرن من نوع (H)، لأجل الحالة الديناميكية له:

معادلات الحركة المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}_+$:

$$\overset{*}{\square}_2 u_i^0 + (\lambda + \mu) u_{k,ki}^0 + X_i = 0 \tag{5}$$

حيث u_i^0 هي المركبات الديكارتية لمقطع الإزاحة المتجهي، الموافق للجسم المرن من نموذج (H)، والموثر التحريكي، السلمي : $\overset{*}{\square}_2 = \mu \nabla^2 - \rho \partial_t^2$ ، مع الشروط الحدية والابتدائية التالية، بالشكل الديكارتي لها:

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$u_i^0 = f_i \tag{6}$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_i^0 = h_i \ , \ \dot{u}_i^0 = \Psi_i \tag{7}$$

إضافةً إلى ما تقدم، نحصل على نظام معادلات حركة Lame ، المتمم التالي، بشكله الديكارتي، والمحقق في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned} &\Box_2 u_i' + (\lambda + \mu - \alpha) u_{k,ki}' + 2\alpha \in_{ijk} \varphi_{k,j}' + \hat{X}_i = 0 \ , \\ &\overset{*}{\Box}_2 \left[\Box_4 \varphi_i' + (\beta + \gamma - \varepsilon) \varphi_{k,ki}' + 2\alpha \in_{ijk} u_{k,j}' \right] + \hat{Y}_i = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

حيث المركبات الديكارتية للمقطعين المتجهيين: $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{\mathbf{Y}}$ ، تعطى على الترتيب بـ:

$$\hat{X}_i = 0 \ , \hat{Y}_i = \overset{*}{\Box}_2 Y_i - \frac{1}{2} \overset{*}{\Box}_4 \in_{ijk} X_{k,j} \tag{9}$$

حيث: $\overset{*}{\Box}_4 = (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - J \partial_t^2$.

<u>الاثبات:</u>

من المركبات الديكارتية لمقطع Schefer المتجهي، نحصل لأجل $\zeta_i^0 = 0$ على:

$$0 = \frac{1}{2} \in_{ijk} u_{k,j}^0 - \varphi_i^0$$

أو:

$$\varphi_i^0 = \frac{1}{2} \in_{ijk} u_{k,j}^0 \tag{10}$$

في المعادلة الاشتقاقية (5)، باستبدال رمز الدليل الحر i بالرمز k ، واستبدال رمز Einstein k بـ s، تأخذ المعادلة الناتجة الشكل التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\Box}_2 u_k^0 + (\lambda + \mu) u_{s,sk}^0 + X_k = 0 \tag{11}$$

بتطبيق الآن المؤثر الاشتقاقي $\in_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}$ على طرفي المعادلة السابقة، نحصل على المعادلة الاشتقاقية التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\Box}_2 \left(\in_{ijk} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_j} \right) + (\lambda + \mu) \in_{ijk} \frac{\partial u_{s,sk}^0}{\partial x_j} + \in_{ijk} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = 0$$

أو

$$\overset{*}{\square}_2\left(\in_{ijk} u^0_{k,j}\right)+(\lambda+\mu)\in_{ijk} u^0_{s,skj}+\in_{ijk} X_{k,j} = 0 \qquad (12)$$

ينتج عن ذلك وعن (10) ، وعن العلاقة:

$$\in_{ijk} u^0_{s,skj} = 0 \qquad (13)$$ (لأن $u^0_{s,skj}$ متناظرة بالنسبة لـ i و j)

أن العلاقة الاشتقاقية (12) تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}_2 \varphi^0_i + \frac{1}{2}\in_{ijk} X_{k,j} = 0 \qquad (14)$$

ندعو المعادلة الاشتقاقية، السلمية، السابقة، بالمعادلة السلمية، المساعدة الأولى. هذا من جهة أولى. ومن جهة ثانية،

تكتب معادلات Lame (1) بالشكل:

$$\begin{aligned}&\square_2 u^0_i+(\lambda+\mu-\alpha)u^0_{s,si}+2\alpha\in_{isp}\varphi^0_{p,s}+\hat{X}_i+\\&+\square_2 u'_i+(\lambda+\mu-\alpha)u'_{s,si}+2\alpha\in_{isp}\varphi'_{p,s}+X_i=0\,,\\&\square_4\varphi^0_i+2\alpha\in_{isp}u^0_{p,s}+\square_4\varphi'_i+(\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi'_{s,si}+\\&+2\alpha\in_{isp}u'_{p,s}+Y_i=0\end{aligned} \qquad (15)$$

وهنا استفدنا من العلاقة:

$$\varphi^0_{s,s} = \frac{1}{2}\in_{sjk} u^0_{k,js} = 0 \qquad (16)$$

الناتجة بدورها عن اشتقاق طرفي (10) بالنسبة لـ x_i.

الآن بتعويض (10) في المعادلة الأولى في (15)، نحصل على المعادلة الاشتقاقية السلمية التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned}&\square_2 u^0_i+(\lambda+\mu-\alpha)u^0_{s,si}+\alpha\in_{isp}\in_{pjk}u^0_{k,js}+\hat{X}_i+\\&+\square_2 u'_i+(\lambda+\mu-\alpha)u'_{s,si}+2\alpha\in_{isp}\varphi'_{p,s}+X_i=0\end{aligned} \qquad (17)$$

وبما أن:

$$\in_{isp}\in_{pjk}=-\in_{psi}\in_{pjk}=-\left(\delta_{sj}\delta_{ik}-\delta_{sk}\delta_{ij}\right)=\delta_{sk}\delta_{ij}-\delta_{sj}\delta_{ik} \qquad (18)$$

فينتج عن ذلك أن:

$$\begin{aligned}&\in_{isp}\in_{pjk} u^{0}_{k,js} = \left(\delta_{sk}\delta_{ij} - \delta_{sj}\delta_{ik}\right)u^{0}_{k,js} = \\ &= u^{0}_{s,si} - u^{0}_{i,ss} = u^{0}_{s,si} - \nabla^2 u^{0}_{i}\end{aligned} \tag{19}$$

بتعويض (19) في (17) نحصل على المعادلة الاشتقاقية، السلمية التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\square}_2 u^{0}_{i} + (\lambda+\mu)u^{0}_{s,si} + X_i + \\ &+ \square_2 u'_i + (\lambda+\mu-\alpha)u'_{s,si} + 2\alpha \in_{isp} \varphi'_{p,s} + \hat{X}_i = 0\end{aligned} \tag{20}$$

فبتعويض (5) في (20)، نحصل على المعادلة الاشتقاقية، المتجهية، التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\square_2 u'_i + (\lambda+\mu-\alpha)u'_{s,si} + 2\alpha \in_{isp} \varphi'_{p,s} + \hat{X}_i = 0 \tag{21}$$

وهو المطلوب، الأول.

ومن جهة ثانية، بتطبيق المؤثر الاشتقاقي السلمي $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة الثانية في (15) وبالأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\square}_2 \square_4 \varphi^{0}_{i} + 2\alpha \in_{isp} \overset{*}{\square}_2 u^{0}_{p,s} + \\ &+ \overset{*}{\square}_2 \left[\square_4 \varphi'_i + (\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi'_{s,si} + 2\alpha \in_{isp} u'_{p,s}\right] + \overset{*}{\square}_2 Y_i = 0\end{aligned}$$

والتي تكتب بالشكل:

$$\begin{aligned}&\square_4\left(\overset{*}{\square}_2 \varphi^{0}_{i}\right) + 2\alpha \in_{isp} \overset{*}{\square}_2 u^{0}_{p,s} + \\ &+ \overset{*}{\square}_2 \left[\square_4 \varphi'_i + (\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi'_{s,si} + 2\alpha \in_{isp} u'_{p,s}\right] + \overset{*}{\square}_2 Y_i = 0\end{aligned}$$

الآن، بتعويض (10) و(14) في المعادلة الاشتقاقية السابقة، نحصل على المعادلة الاشتقاقية السلمية، التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\square_4\left(\in_{ijk} X_{k,j}\right) - 2\alpha \in_{ijk} X_{k,j} + \\ &+ \overset{*}{\square}_2 \left[\square_4 \varphi'_i + (\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi'_{s,si} + 2\alpha \in_{isp} u'_{p,s}\right] + \overset{*}{\square}_2 Y_i = 0\end{aligned}$$

أو:

$$\overset{*}{\square}_2\left[\square_4\varphi'_i+(\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi'_{s,si}+2\alpha\in_{isp}u'_{p,s}\right]+$$
$$+\overset{*}{\square}_2 Y_i-\frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4\left(\in_{ijk}X_{k,j}\right)=0$$

بالتالي نكون قد حصلنا على المعادلة الاشتقاقية، السلمية التالية المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$\overset{*}{\square}_2\left[\square_4\varphi'_i+(\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi'_{s,si}+2\alpha\in_{isp}u'_{p,s}\right]+\hat{Y}_i=0 \qquad (22)$$

حيث: $\hat{Y}_i=\overset{*}{\square}_2 Y_i-\frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4\left(\in_{ijk}X_{k,j}\right)=0$. وهو المطلوب الثاني.

إلى نظام Lame المعادلاتي السلمي الديكارتي، المتمم (8)، نضيف الشروط الحدية والابتدائية، السلمية الديكارتية، المعدَّلة التالية:

- الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times T$:

$$u'_i=0\ ,\ \ \varphi'_i=g_i-\varphi^0_i \qquad (23)$$

- الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u'_i=0\ ,\ \ \varphi'_i=k_i-\varphi^0_i\ ,\ \ \dot{u}'_i=0\ ,\ \ \dot{\varphi}'_i=\chi_i-\dot{\varphi}^0_i \qquad (24)$$

حيث في (23) و(24)، ينتج المركبات الديكارتية φ^0_i للمتجه φ^0 عن حل مسألة القيم الحدية والابتدائية، التقليدية، الديكارتية (7) -(5) و (10).

بهذا الشكل فإن حل مسألة القيم الحدية والابتدائية، الديكارتية، الأصلية (3) - (1) للجسم المرن دقيق الاستقطاب في إطار النموذج الرياضي (E-N)، يستبدل بحل مسألتي قيم حدية وابتدائية، ديكارتيتين؛ الأولى هي التقليدية، الديكارتية: (7) - (5) و (10) لجسم Hooke في إطار النموذج الرياضي التقليدي (H)، والثانية هي المتممة، الديكارتية: (9) - (8) و (24) -(23) لجسم مرن دقيق الاستقطاب في إطار النموذج الرياضي الحاكم هو النموذج الرياضي (E-N) مع شروط حدية وابتدائية، ديكارتية، متجانسة.

عندئذٍ الحل الأصلي يعطى بـ:

$$u_i=u^0_i+u'_i\ ,\ \ \varphi_i=\varphi^0_i+\varphi'_i \qquad (25)$$

ومن أجل متطلبات هذه الرسالة، أيضاً يلزمنا فيما يلي فصل المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية التقليدية (5) ، وفصل المعادلتين الاشتقاقيتين السلميتين الديكارتيتين المتممتين (8) .

فصل المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية التقليدية (5) ، وفصل المعادلتين الاشتقاقيتين السلميتين الديكارتيتين المتممتين (8) :

أولاً: فصل المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية التقليدية (5) :

لهذا الغرض نشتق طرفي المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية (5)، جزئياً مرة واحدة بالنسبة لـ x_i فنحصل على المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}_2 u^0_{i,i} + (\lambda+\mu) u^0_{k,kii} + X_{i,i} = 0$$

أو:

$$\overset{*}{\square}_2 u^0_{k,k} + (\lambda+\mu)\, \nabla^2 u^0_{k,k} + X_{k,k} = 0$$

بالتالي نحصل على المعادلة الاشتقاقية، السلمية الديكارتية، المنفصلة التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\square_1 u^0_{k,k} + X_{k,k} = 0 \qquad (26)$$

حيث: $\square_1 := (\lambda+2\mu)\, \nabla^2 - \rho\, \partial_t^2$.

وعندئذٍ بتطبيق المؤثر الاشتقاقي السلمي $\square_1$ على طرفي المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية (5)، نحصل على المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية، التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\square_1 \overset{*}{\square}_2 u^0_i + (\lambda+\mu) \left(\square_1 u^0_{k,k}\right)_{,i} + \square_1 X_i = 0$$

ينتج عن المعادلة السابقة، وعن المعادلة (26)، أن المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية التالية محققة في $\Omega \times T_+$:

$$\square_1 \overset{*}{\square}_2 u^0_i - (\lambda+\mu)\, X_{k,ki} + \square_1 X_i = 0$$

أو

$$\boxed{\Box_1 \overset{*}{\Box}_2 u_i^0 = (\lambda+\mu)\, X_{k,ki} - \Box_1 X_i} \qquad (27)$$

وهـي المعادلـة الاشـتقاقية السـلمية الديكارتيـة، المحققـة فـي $\Omega \times T_+$، والناتجـة عـن فصل المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية، التقليدية (5).

ثانياً: فصل المعادلتان الاشتقاقيتان السلميتان الديكارتيتان المتممتان (8) :

لهذا الغرض تلزمنـا أربـع معـادلات اشتقاقية سلمية ديكارتيـة، مسـاعدة محققـة فـي $\Omega \times T_+$؛ الأولـى منفصـلة بـ $u'_{s,s}$ والثانيـة منفصـلة بـ $\varphi'_{s,s}$، والثالثـة والرابعـة مترابطتين بـ $\in_{isp} u'_{p,s}$ و $\in_{isp} \varphi'_{p,s}$. وسنقوم فيمـايلي باسـتنتاج كلٍ منهـا، بشكلٍ مفصل.

- المعادلة المنفصلة بـ $u'_{s,s}$:

لإيجاد هذه المعادلة نشتق طرفي المعادلة الأولى في (8)، جزئياً مرة واحدة بالنسبة لـ x_i ، ومن ثم نستخدم العلاقة:

$$\in_{ijk} \varphi'_{k,ji} = 0 \qquad (28)$$

فنحصل على المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية، التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\Box_2 u'_{s,s} + (\lambda+\mu-\alpha)\nabla^2 u'_{s,s} + \hat{X}_{s,s} = 0 \qquad (29)$$

أو:

$$\Box_1 u'_{s,s} + \hat{X}_{s,s} = 0 \qquad (30)$$

وهي المعادلة الأولى المساعدة، والمنفصلة بـ $u'_{s,s}$ والمحققة في $\Omega \times T_+$.

- المعادلة المنفصلة بـ $\varphi'_{s,s}$:

لإيجاد هذه المعادلة نشتق طرفي المعادلة الثانية في (8)، جزئياً مرة واحدة بالنسبة لـ x_i ، ومن ثم نستخدم العلاقة:

$$\in_{ijk} u'_{k,ji} = 0 \qquad (31)$$

$$\overset{*}{\square}_2\left[\square_4\varphi'_{s,s}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\nabla^2\varphi'_{s,s}+2\alpha\times 0\right]+\hat{Y}_{s,s}=0$$

ومنه نحصل على المعادلة الاشتقاقية، السلمية الديكارتية، التالية، المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$\overset{*}{\square}_2\square_3\varphi'_{s,s}+\hat{Y}_{s,s}=0 \qquad (32)$$

حيث: $\square_3=(\beta+2\gamma)\nabla^2-4\alpha-J\,\partial_t^2$،

وهي المعادلة الثانية السلمية الديكارتية، المساعدة، والمنفصلة بـ $\varphi'_{s,s}$ المحققة في $\Omega\times T_+$.

- المعادلتان المترابطتان بـ $\in_{isp}u'_{p,s}$ و $\in_{isp}\varphi'_{p,s}$:

لإيجاد هاتين المعادلتين، نجري التغيير المناسب في الأدلة $(i\to p)$ في المعادلتين (8)، حيث تأخذان الشكل التالي في $\Omega\times T_+$:

$$\begin{aligned}&\square_2 u'_p+(\lambda+\mu-\alpha)u'_{k,kp}+2\alpha\in_{pjk}\varphi'_{k,j}+\hat{X}_p=0\,,\\&\overset{*}{\square}_2\left[\square_4\varphi'_p+(\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi'_{k,kp}+2\alpha\in_{pjk}u'_{k,j}\right]+\hat{Y}_p=0\end{aligned} \qquad (33)$$

الآن، لإيجاد هاتين المعادلتين نطبق المؤثر $\in_{isp}\frac{\partial}{\partial x_s}$ على طرفي المعادلتين (8)، نحصل على المعادلتين الاشتقاقيتين السلميتين الديكارتيتن، التاليتين، المحققتين في $\Omega\times T_+$:

$$\begin{aligned}&\square_2\in_{isp}u'_{p,s}+(\lambda+\mu-\alpha)\in_{isp}u'_{k,kps}+2\alpha\in_{isp}\in_{pjk}\varphi'_{k,js}+\\&\qquad+\in_{isp}\hat{X}_{p,s}=0\,,\\&\overset{*}{\square}_2\left[\square_4\in_{isp}\varphi'_{p,s}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\in_{isp}\varphi'_{k,kps}+2\alpha\in_{isp}\in_{pjk}u'_{k,js}\right]\\&\qquad+\in_{isp}\hat{Y}_{p,s}=0\end{aligned} \qquad (34)$$

وبما أن:

$$\in_{isp}u'_{k,kps}=0\,,\quad \in_{isp}\varphi'_{k,kps}=0 \qquad (35)$$

فنحصل على جملة المعادلتين الاشتقاقيتين، السلميتين الديكارتيتين التاليتين، المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned} &\Box_2 \in_{isp} u'_{p,s} + 2\alpha \in_{isp} \in_{pjk} \varphi'_{k,js} + \in_{isp} \hat{X}_{p,s} = 0 , \\ &\overset{*}{\Box}_2 \left[\Box_4 \in_{isp} \varphi'_{p,s} + 2\alpha \in_{isp} \in_{pjk} u'_{k,js} \right] + \in_{isp} \hat{Y}_{p,s} = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

نـدعو(36)، بالمعـادلتين الاشـتقاقيتين، الـديكارتيتين، المتـرابطتين بـــ $\in_{isp} u'_{p,s}$ و $\in_{isp} \varphi'_{p,s}$.

ولكن ينتج عن (18) أن:

$$\begin{aligned} &\in_{isp} \in_{pjk} u'_{k,js} = \left(\delta_{sk} \delta_{ij} - \delta_{sj} \delta_{ik} \right) u'_{k,js} = \\ &= u'_{s,si} - u'_{i,ss} = u'_{s,si} - \nabla^2 u'_i , \\ &\in_{isp} \in_{pjk} \varphi'_{k,js} = \left(\delta_{sk} \delta_{ij} - \delta_{sj} \delta_{ik} \right) \varphi'_{k,js} = \\ &= \varphi'_{s,si} - \varphi'_{i,ss} = \varphi'_{s,si} - \nabla^2 \varphi'_i \end{aligned} \tag{37}$$

وبذلك تأخذ (36) الشكل التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned} &\Box_2 \in_{isp} u'_{p,s} + 2\alpha \left(\varphi'_{s,si} - \nabla^2 \varphi'_i \right) + \in_{isp} \hat{X}_{p,s} = 0 , \\ &\overset{*}{\Box}_2 \left[\Box_4 \in_{isp} \varphi'_{p,s} + 2\alpha \left(u'_{s,si} - \nabla^2 u'_i \right) \right] + \in_{isp} \hat{Y}_{p,s} = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

الآن، بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\Box}_2 \Box_4$ على طرفي المعادلة الأولى في (8)، والمؤثر $\Box_2$ على طرفي المعادلة الثانية في (8)، نحصل على المعادلتين الاشتقاقيتين االسلميتين الديكارتيتين، التاليتين المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\Box}_2 \Box_2 \Box_4 u'_i + (\lambda + \mu - \alpha) \overset{*}{\Box}_2 \Box_4 u'_{k,ki} \\ &-4\alpha^2 \overset{*}{\Box}_2 \left(u'_{s,si} - \nabla^2 u'_i \right) - 2\alpha \in_{isp} \hat{Y}_{p,s} + \overset{*}{\Box}_2 \Box_4 \hat{X}_i = 0 , \\ &\overset{*}{\Box}_2 \Box_2 \Box_4 \varphi'_i + (\beta + \gamma - \varepsilon) \overset{*}{\Box}_2 \Box_2 \varphi'_{k,ki} \\ &-4\alpha^2 \overset{*}{\Box}_2 \left(\varphi'_{s,si} - \nabla^2 \varphi'_i \right) - 2\alpha \overset{*}{\Box}_2 \in_{isp} \hat{X}_{p,s} + \Box_2 \hat{Y}_i = 0 \end{aligned}$$

وبالإصلاح نحصل على المعادلتين الاشتقاقيتين السلميتين الديكارتيتين، التاليتين، المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)u_i'+\overset{*}{\square}_2\left[(\lambda+\mu-\alpha)\square_4-4\alpha^2\right]u_{k,ki}' \\
&-2\alpha\in_{isp}\hat{Y}_{p,s}+\overset{*}{\square}_2\square_4\hat{X}_i=0\ , \\
&\overset{*}{\square}_2\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)\varphi_i'+\overset{*}{\square}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\square_2-4\alpha^2\right]\varphi_{k,ki}' \\
&-2\alpha\overset{*}{\square}_2\in_{isp}\hat{X}_{p,s}+\square_2\hat{Y}_i=0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

أخيراً، بتطبيق المؤثر $\square_1$ على $(39)_1$، والمؤثر $\square_3$ على $(39)_2$، من ثم باستخدام المعادلتين، المنفصلتين المساعدتين (30) و (32)، نحصل على المعادلتين الاشتقاقيتين، السلميتين الديكارتيتين، المنفصلتين ، التاليتين، المحققتين في $\Omega\times T_+$:

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2\square_1\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)u_i'=\overset{*}{\square}_2\left[(\lambda+\mu-\alpha)\square_4-4\alpha^2\right]\hat{X}_{k,ki}+ \\
&+2\alpha\square_1\in_{isp}\hat{Y}_{p,s}-\overset{*}{\square}_2\square_1\square_4\hat{X}_i\ , \\
&\overset{*}{\square}_2\square_3\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)\varphi_i'=\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\square_2-4\alpha^2\right]\hat{Y}_{k,ki} \\
&+2\alpha\overset{*}{\square}_2\square_3\in_{isp}\hat{X}_{p,s}-\square_2\square_3\hat{Y}_i
\end{aligned}
$$

أو:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2\square_1\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)u_i'= \\
&=\overset{*}{\square}_2\left\{\left[(\lambda+\mu-\alpha)\square_4-4\alpha^2\right]\hat{X}_{k,ki}-\square_1\square_4\hat{X}_i\right\}+ \\
&+2\alpha\square_1\in_{isp}\hat{Y}_{p,s}\ , \\
&\overset{*}{\square}_2\square_3\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)\varphi_i'=2\alpha\overset{*}{\square}_2\square_3\in_{isp}\hat{X}_{p,s}+ \\
&+\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\square_2-4\alpha^2\right]\hat{Y}_{k,ki}-\square_2\square_3\hat{Y}_i
\end{aligned}
}
\tag{40}
$$

أخيراً، سنوجد الآن، المعادلة المنفصلة بالمركبة الديكارتية: $\zeta_i=\zeta_i^0+\zeta_i'$، لمتجه Schefer، حيث:($\zeta_i^0=0\ ,\ \zeta_i'=\frac{1}{2}\in_{ijk}u_{k,j}'-\varphi'$)، انطلاقاً من المعادلتين الاشتقاقيتين الديكارتيتين (39)، باتباع مايلي. بإجراء التغييرات المناسبة على

الأدلة في المعادلة الأولى من (39)، نحصل على المعادلتين الاشتقاقيتين السلميتين الديكارتيتين، التاليتن المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\Box}_2\left(\Box_2\Box_4 + 4\alpha^2\nabla^2\right)u'_p + \overset{*}{\Box}_2\left[(\lambda+\mu-\alpha)\Box_4 - 4\alpha^2\right]u'_{k,kp} \\
&- 2\alpha \in_{pjk} \hat{Y}_{k,j} + \overset{*}{\Box}_2\Box_4\hat{X}_p = 0\ , \\
&\overset{*}{\Box}_2\left(\Box_2\Box_4 + 4\alpha^2\nabla^2\right)\varphi'_i + \overset{*}{\Box}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\Box_2 - 4\alpha^2\right]\varphi'_{k,ki} \\
&- 2\alpha\overset{*}{\Box}_2 \in_{ijk} \hat{X}_{k,j} + \Box_2\hat{Y}_i = 0
\end{aligned}
\tag{41}
$$

بتطبيق المؤثر $\frac{\partial}{\partial x_s}\in_{isp}$ على طرفي المعادلة $(41)_1$ ، وبضرب طرفي المعادلة $(41)_2$ بـ 2 ، والأخذ بعين الاعتبار العلاقة الأولى في (35)، والعلاقة:

$$
\begin{aligned}
&\in_{isp}\in_{pjk}\hat{Y}_{k,js} = \left(\delta_{sk}\delta_{ij} - \delta_{sj}\delta_{ik}\right)\hat{Y}_{k,js} = \\
&= \hat{Y}_{s,si} - \hat{Y}_{i,ss} = \hat{Y}_{s,si} - \nabla^2\hat{Y}_i\ ,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

فنحصل بذلك عل العلاقتين الاشتقاقيتين الديكارتيتين التاليتين، المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\Box}_2\left(\Box_2\Box_4 + 4\alpha^2\nabla^2\right)\in_{isp} u'_{p,s} \\
&- 2\alpha\left(\hat{Y}_{s,si} - \nabla^2\hat{Y}_i\right) + \overset{*}{\Box}_2\Box_4\in_{isp}\hat{X}_{p,s} = 0\ , \\
&\overset{*}{\Box}_2\left(\Box_2\Box_4 + 4\alpha^2\nabla^2\right)\left(2\varphi'_i\right) + \\
&+2\overset{*}{\Box}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\Box_2 - 4\alpha^2\right]\varphi'_{k,ki} \\
&- 4\alpha\overset{*}{\Box}_2 \in_{ijk} \hat{X}_{k,j} + 2\Box_2\hat{Y}_i = 0
\end{aligned}
\tag{43}
$$

الآن، بطرح المعادلة الثانية في (43) من المعادلة الأولى فيها، منثم بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة:

$$
\zeta_i = \zeta'_i = \frac{1}{2}\in_{ijk} u'_{k,j} - \varphi' \tag{44}
$$

نحصل على المعادلة الاشتقاقية الديكارتية التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$2\overset{*}{\square}_2\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)\zeta_i = 2\overset{*}{\square}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\square_2-4\alpha^2\right]\varphi'_{k,ki}$$
$$+2\alpha\left(\hat{Y}_{s,si}-\nabla^2\hat{Y}_i\right)-\overset{*}{\square}_2\square_4\in_{isp}\hat{X}_{p,s}-4\alpha\overset{*}{\square}_2\in_{ijk}\hat{X}_{k,j}+ \quad (45)$$
$$+2\square_2\hat{Y}_i$$

ينتج عن تعريف المؤثرين الاشتقاقيين السلميين $\square_2$ و $\overset{*}{\square}_2$ والمؤثرين الاشتقاقيين السلميين $\square_4$ و $\overset{*}{\square}_4$ ، أن المعادلة الاشتقاقية السلمية السابقة تأخذ الشكل التالي في $\Omega\times T_+$:

$$2\overset{*}{\square}_2\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)\zeta_i = 2\overset{*}{\square}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\square_2-4\alpha^2\right]\varphi'_{k,ki}+$$
$$+2\alpha\hat{Y}_{s,si}-\overset{*}{\square}_2\overset{*}{\square}_4\in_{isp}\hat{X}_{p,s}+2\overset{*}{\square}_2\hat{Y}_i$$

أو:

$$2\overset{*}{\square}_2\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)\zeta_i = 2\overset{*}{\square}_2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\square_2-4\alpha^2\right]\varphi'_{k,ki}+$$
$$+2\alpha\hat{Y}_{s,si}+\overset{*}{\square}_2\left[2\hat{Y}_i-\overset{*}{\square}_4\in_{isp}\hat{X}_{p,s}\right]$$

الآن بتطبيق المؤثر الاشتقاقي السلمي $\square_3$ على طرفي المعادلة الاشتقاقية السلمية الديكارتية السابقة، وبالأخذ بعين الاعتبار المعادلة المنفصلة المساعدة (32)، نحصل على المعادلة الاشتقاقية، السلمية الديكارتية، المنفصلة التالية، المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$2\overset{*}{\square}_2\square_3\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)\zeta_i = -2\left[(\beta+\gamma-\varepsilon)\square_2-4\alpha^2\right]\hat{Y}_{s,si}+$$
$$+2\alpha\square_3\hat{Y}_{s,si}+\overset{*}{\square}_2\square_3\left[2\hat{Y}_i-\overset{*}{\square}_4\in_{isp}\hat{X}_{p,s}\right]$$

أو:

$$2\overset{*}{\square}_2\square_3\left(\square_2\square_4+4\alpha^2\nabla^2\right)\zeta_i =$$
$$= 2\left[\alpha\square_3-(\beta+\gamma-\varepsilon)\square_2+4\alpha^2\right]\hat{Y}_{s,si}+$$
$$+\overset{*}{\square}_2\square_3\left[2\hat{Y}_i-\overset{*}{\square}_4\in_{isp}\hat{X}_{p,s}\right]$$

وبما أن:

$$\alpha \square_3 - (\beta + \gamma - \varepsilon) \square_2 + 4\alpha^2 = \alpha \overset{*}{\square}_4 - (\beta + \gamma - \varepsilon) \overset{*}{\square}_2 \qquad (46)$$

فتأخذ بذلك المعادلة الاشتقاقية، السلمية، المنفصلة السابقة، تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\boxed{\begin{aligned} & 2 \overset{*}{\square}_2 \square_3 \left(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2 \right) \zeta_i = \\ & = 2 \left[\alpha \overset{*}{\square}_4 - (\beta + \gamma - \varepsilon) \overset{*}{\square}_2 \right] \hat{Y}_{s,si} + \\ & + \overset{*}{\square}_2 \square_3 \left[2\hat{Y}_i - \overset{*}{\square}_4 \in_{isp} \hat{X}_{p,s} \right] \end{aligned}} \qquad (47)$$

إن المعادلة السابقة، هي المعادلة الاشتقاقية، السلمية الديكارتية ، المنفصلة، بالمركبات الديكارتية: ζ_i لمتجه Schefer: ζ، والمحققة في $\Omega \times T_+$.

ملخص الرسالة

تتضمن الرسالة على مناقشة نماذج رياضية موصوفة من خلال معادلات اشتقاقية وعلاقات أساسية، جميعها أوساط مستمرة مرنة، مهملة ومعقدة البنية الجزيئية، حيث تتوزع ثلاثة فصول، على النحو التالي:

الفصل الأول:

يتضمن مايلزمنا من الرياضيات بشكلٍ عام ومن الطبولوجية والهندسة التفاضلية، والتحليل النتجهي بشكلِ خاص؛ مثال: رموز Einstein وخواصها، المناطق متعددة الترابط في الفضاء الاقليدي ذي الـ n بعداً، مفاهيم التدرج والتفرق والدوران لمقاطع متجهية، وبعض المبرهنات المتعلقة بها، ... الخ.

الفصل الثاني:

يتضمن مناقشة نماذج رياضية مهمَّه موصوفة، بأنظمة معادلاتية اشتقاقية وجبرية وبشروط ، تحكم مجتمعتاً أوساط مستمرة من النوع المرن، مهملة، ومعتبرة البنية الجزيئية؛ حيث تمت مناقشة النماذج الرياضية التالية:

(A - K) و **(E - N)** و **(K - M)** و **(N - D)** و **(H)**

الفصل الثالث:

تم فيه مناقشة طريقة متجه Schefer في كتابة النموذج (E-N) بالشكل:

$$\left(\mathrm{E}-\mathrm{N}\right)=\mathrm{Nonhomgeneous}\left(\mathrm{H}\right)+\mathrm{Homgeneous}\left(\mathrm{E}-\mathrm{N}\right)$$

من ثم تمت مناقشة ذلك بالشكل الديكارتي.

Dissertation Summary

This dissertation treats most mathematical models, described by systems of partial differential equations ,fundamental relations and conditions, which together governs continuous media of elastic type, with neglected and considerable microstructure. The dissertation contains the three following sections:

The first section:

Contains what we need generally from mathematics, and especially from topology, differential geometry, and vector analysis ; for example: Einstein symbols and its properties, the multi-connected regions in the euclidesian n dimensional spaces, the grad, div, curl concepts and its related theorems, … etc.

The Second Sections:

Study mathematical models described by fundamental equations, relations, and conditions, governing continuous media of elastic type, of neglected and considerable microstructure. We discuss the following mathematical models:

(A – K) , (E – N) , (K – M) , (N – D) , (H)

The Third Sections:

In which we discuss the Schefer vector method of writing the (E – N) mathematical method in the following form:

$$\left(\mathrm{E}-\mathrm{N}\right)=\mathrm{Nonhomgeneous}\left(\mathrm{H}\right)+\mathrm{Homgeneous}\left(\mathrm{E}-\mathrm{N}\right)$$

and we discuss this method in the Cartesian coordinate system.

المراجع

[1] - Nowacki, W. , 1970, Theory of Elasticity, PWN , Warsaw.

[2] Voit W., *Theoretiche Studien über die Elastizitätsverhäl – tnisse der Kristalle*, I, II, Abh. Der Königl. Ges. Der Wiss., Göttingen, 1887, **34**.

[3] Cosserat E., Cosserat F., *Théorie des Corps Déformables*, A. Hermann, Paris 1909.

[4] Aero E. L., Kuvshinski E. V., *Continuum theory of asymmetric elasticity. Equilibrium of isotropic body (in Russian)*, Phiz. Tverd. Tela, **6** (1964), 2689 - 2699.

[5] Aero E. L., Kuvshinski E. V., *Fundamental equations of the theory of elasticity with rotational particle interactions (in Russian)*, Phiz. Tverd. Tela, **2** (1969), 7 - 1399.

[6]-*Heinbockel ,J.H, 1996*- Introductio to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.

[7] Eringen A. C., *Mechanics of Continua*, Robert E. Krieger Publishing Company , Huntington, New York, 1980.

[8] Drobot S., *On Cosserat Continua*, Zastos. Mat. **12** (1971), 323 - 346.

[9] Koiter W.T. , *Couple – stresses in the theory of elasticity, Koninkl. Nederl. Acad. Van Wentenschappen. Proc. Ser. B, I – 1964 , 67 , 1, 17; II – 1964, 67 , 1, 30.*

[10] Mindlin R.D, Tiersten H.f., Effects of *couple – stresses in linear elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal.,1962, 11 5, 415.*

[11] Nowacki W., *Teoria Niesymetrycznej Sprężystości*, Warszawa, PWN, 1981.

[12] Nowacki W., *Theory of Asymmetric Elasticity*, Warszawa, PWN, 1986.

[13] Dyszlewicz , J, 2004 - Micropolar Theory of Elasticity , in: Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer.

Syrian Arab Republic
Al-Baath University
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

The Fundamental Equations of Some Continuous Media of Elastic Type

Dissertation for m.sc degree in Applied Mathematics

Submitted By:
Ali Lolo
Supervised by :

Professor : Mountajab AL-Hasan : Department of Mathematics

Faculty of Science
Al-Baath University

1441 - 2020