



الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

# **الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الناقصية ببعدين بطريقة العناصر المنتهية بشروط حدية مختلطة**

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات البحتة اختصاص ( تحليل عددي)

إعداد المعيدة

**هبة زكريّا اصلاّن**

إشراف

**أ.د. برلنت مطّيط**

أستاذ في قسم الرياضيات

كلية العلوم \_ جامعة دمشق

**أ.م.د. حبيب علي**

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

كلية العلوم \_ جامعة البعث

2020 \_ 1442 هـ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



اللهم إني أسألك علماً نافعاً، ورزقاً طيباً، وعملاً متقبلاً.

## المحتويات

vi.....	قائمة الأشكال
ix.....	قائمة الجداول
xi.....	المستخلص
1.....	تمهيد
3	الفصل الأول: دراسة مرجعية
3.....	1-1. نشوء طريقة العناصر المنتهية.....
4.....	2-1. نشوء المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية.....
5.....	3-1. طريقة العناصر المنتهية والمعادلات التفاضلية الناقصية.....
5.....	1-3-1. طريقة العناصر المنتهية والمعادلات التفاضلية الناقصية ببعد واحد.....
8.....	2-3-1. طريقة العناصر المنتهية والمعادلات التفاضلية الناقصية ببعدين.....
10.....	4-1. لمحة عن الطرائق التقريبية والتكرارية المستخدمة في الأطروحة.....
10.....	1-4-1. طريقة تحليل الهوموتوبي (HAM) Homotopy Analysis Method.....
10.....	2-4-1. طريقة نيوتن رافسون (NRM) Newton Raphson Method.....
11.....	1-2-4-1. تحسين طريقة نيوتن رافسون باستخدام طريقة تقرييق أدوميان المعدلة.....
14.....	3-4-1. طريقة بيكارد التكرارية (PTM) Picard Iterative Method.....
15	الفصل الثاني: دوال الشكل
15.....	1-2. مقدمة.....
15.....	2-2. تعاريف.....
16.....	3-2. كثيرات الحدود في الجمل الإحداثية.....
16.....	1-3-2. كثيرات الحدود في الإحداثيات الديكارتية.....
17.....	2-3-2. كثيرات الحدود في الإحداثيات الطبيعية.....

17.....	1-2-3-2. إحداثيات الطول والمساحة.
18.....	2-2-3-2. الإحداثيات المركزية.
20.....	4-2. دوال الشكل في (1-D).
20.....	1-4-2. مستقيم بدرجتي حرية.
22.....	2-4-2. مستقيم بأربع درجات حرية.
25.....	3-4-2. مستقيم بثلاث درجات حرية.
27.....	5-2. دوال الشكل في (2-D).
27.....	1-5-2. العناصر المثلثية.
28.....	1-1-5-2. المثلث الخطي The Linear Triangular
31.....	2-1-5-2. المثلث التربيعي The Quadratic Triangular
34.....	3-1-5-2. المثلث التكعيبي The Cubic Triangular
34.....	1-3-1-5-2. مثلث بعشرة عقد.
41.....	2-3-1-5-2. مثلث بأربع عقد.
47.....	2-5-2. العناصر المستطيلة.
47.....	1-2-5-2. المستطيل الخطي The Linear Rectangular
50.....	2-2-5-2. المستطيل التربيعي The Quadratic Rectangular
54.....	6-2. دوال الشكل في (3-D).
54.....	1-6-2. عنصر الهرم.
55.....	2-6-2. عنصر متوازي المستطيلات.
57.....	7-2. ملخص الفصل الثاني.

الفصل الثالث: الحلول التقريبية للمعادلات الناقصية الخطية ببعدين باستخدام طريقة العناصر المنتهية

58	1-3. مقدمة.....
58	2-3. طريقة العناصر المنتهية في الإحداثيات الديكارتية.....
58	1-2-3. الصيغة القوية.....
58	2-2-3. تقسيم المنطقة.....
59	1-2-2-3. التقييم العام.....
59	2-2-2-3. التقييم المحلي.....
60	3-2-3. الصيغة الضعيفة.....
61	4-2-3. مصفوفات الصلابة ومتجهات الحمل.....
62	5-2-3. حل المعادلات الجبرية الناتجة.....
90	3-3. طريقة العناصر المنتهية في الإحداثيات المركزية.....
97	4-3. طريقة العناصر المنتهية في إحداثيات المساحة.....
99	5-3. ملخص الفصل الثالث.....

الفصل الرابع: الحلول التقريبية للمعادلات الناقصية غير الخطية ببعدين بطريقة العناصر المنتهية

100	1-4. المقدمة.....
100	2-4. معادلة بواسون غير الخطية.....
101	1-2-4. طريقة نيوتن_ غاوس التكرارية Newton_Guass Method.....
105	2-2-4. طريقة نيوتن_ غالاركين Newton Gkalarkin Method.....
108	3-2-4. طريقة بيكارد التكرارية Picard Iterative Method.....

112.....	4-2-4. طريقة تحليل هوموتوبي العناصر المنتهية.....
121 .....	3-4. المعادلة اللوجستية Logistic Equation.....
121.....	1-3-4. طريقة نيوتن رافسون من الرتبة الثانية.....
124.....	4-4. Ginzburg_Landau Equation.....
124.....	1-4-4. طريقة نيوتن رافسون من الرتبة الخامسة.....
127.....	5-4. ملخص الفصل الرابع.....
128	<b>الفصل الخامس: تحليل الأخطاء لطريقة العناصر المنتهية</b>
128.....	1-5. مقدمة.....
128.....	2-5. تعاريف أساسية.....
129.....	3-5. نظرية الأخطاء.....
133.....	4-5. الإستيفاء.....
133.....	1-4-5. الإستيفاء الخطي.....
133.....	2-4-5. الإستيفاء الخطي المستمر قطعياً.....
133.....	5-5. مؤثر الإسقاط.....
147.....	6-5. ملخص الفصل الخامس.....
148	<b>الخاتمة والرؤى المستقبلية</b>
150	<b>ملحق</b>
165	<b>دليل المصطلحات العلمية</b>
171	<b>المراجع</b>
179	<b>Abstract</b>

## قائمة الأشكال

- الشكل (1-2): الإحداثيات الديكارتية للمستقيم بدرجة حرية ..... 20
- الشكل (2-2): إحداثيات الطول للمستقيم بدرجة حرية ..... 21
- الشكل (3-2): الإحداثيات المركزية للمستقيم بدرجة حرية ..... 22
- الشكل (4-2): الإحداثيات الديكارتية للمستقيم بأربع درجات حرية ..... 23
- الشكل (5-2): الإحداثيات الديكارتية للمستقيم بثلاث درجات حرية ..... 26
- الشكل (6-2): إحداثيات الطول للمستقيم بثلاث درجات حرية ..... 26
- الشكل (7-2): مثلث باسكال لكثيرات الحدود في الفضاء ثنائي البعد للمثلثات ..... 28
- الشكل (8-2): إحداثيات المساحة لمثلث بثلاث درجات حرية ..... 29
- الشكل (9-2): الإحداثيات المركزية لمثلث بثلاث درجات حرية ..... 30
- الشكل (10-2): مثلث بستة عقد ..... 31
- الشكل (11-2): الإحداثيات المركزية لمثلث بستة عقد ..... 33
- الشكل (12-2): إحداثيات المساحة لمثلث بعشر درجات حرية ..... 35
- الشكل (13-2): الإحداثيات الديكارتية لمثلث بعشر درجات حرية ..... 41
- الشكل (14-2): مستطيل بأربع درجات حرية ..... 47
- الشكل (15-2): مستطيل بثمان عقد ..... 51
- الشكل (16-2): الإحداثيات المركزية للمستطيل بثمان عقد ..... 52
- الشكل (17-2): عنصر الهرم ..... 55
- الشكل (18-2): عنصر متوازي مستطيلات ..... 56
- الشكل (1-3): يبين كيفية تقسيم المنطقة في الفضاء ثنائي البعد ..... 59
- الشكل (2-3): التقسيم المثلثي لمنطقة المثلث (1-3) ..... 63
- الشكل (3-3): التقسيم المستطيلي لمنطقة المثلث (2-3) ..... 67

72.....	الشكل (3-4): شبكة العناصر المثلثية للمثال (3-3)
76.....	الشكل (3-5): شبكة من العناصر المثلثية للمثال (4-3)
77.....	الشكل (3-6): يبين المثلثات المحاطة بكل عقدة مجهولة للشكل (3-5)
79.....	الشكل (3-7): شبكة المثلثات للمثال (3-5)
82.....	الشكل (3-8): شبكة المثلثات للمثال (3-6)
85.....	الشكل (3-9): شبكة المثلثات للمثال (3-7)
89.....	الشكل (3-10): شبكة المثلثات للصفحة المعدنية في المثال (3-8)
92.....	الشكل (3-11): تطبيق من (a): شكل رباعي إختياري إلى (b) مربع الوحدة
93.....	الشكل (3-12): تطبيق الانتقال من (a) مربع وحدة في الإحداثيات المركزية إلى (b) مثلث في الإحداثيات الديكارتية
94.....	الشكل (3-13): شبكة المستطيلات للمثال (3-9)
97.....	الشكل (3-14): الانتقال من الإحداثيات الديكارتية في (a) إلى إحداثيات المساحة في (b)
98.....	الشكل (3-15): شبكة المثلثات للمثال (3-9)
102.....	الشكل (4-1): شبكة المثلثات للمثال (4-1)
109.....	الشكل (4-2): شبكة المثلثات للمثال (4-3)
116.....	الشكل (4-3): شبكة المستطيلات للمثال (4-4)
118.....	الشكل (4-4): مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي للمثال (4-4)
119.....	الشكل (4-5): شبكة المثلثات للمثال (4-5)
120.....	الشكل (4-6): مقارنة بين الحل الفعلي والتقريبي للمثال (4-5)
123.....	الشكل (4-7): شبكة المستطيلات للمثال (4-6)
125.....	الشكل (4-8): شبكة المستطيلات للمثال (4-7)
146.....	الشكل (5-1): قيم العقد المجهولة عندما $h = 1$



الشكل (5-2): قيم العقد المجهولة عندما  $h = 0.5$  ..... 146

الشكل (5-3): قيم العقد المجهولة عندما  $h = 0.25$  ..... 147

## قائمة الجداول

الجدول (1-1): أحدث الأبحاث للمعادلات التفاضلية الجزئية ببعد واحد بطريقة العناصر المنتهية....6
الجدول (2-1): طريقة العناصر المنتهية ببعد واحد.....8
الجدول (3-1): أحدث الأبحاث للمعادلات الناقصية الخطية ببعدين.....9
الجدول (1-2): بعض العناصر المثلثية بدرجات حرية مختلفة.....47
الجدول (2-2): بعض العناصر المستطيلة بدرجات حرية مختلفة.....54
الجدول (1-3): العقد العامة وما يقابلها من العقد المحلية لعناصر الشكل (2-3).....63
الجدول (2-3): دوال الشكل لعناصر الشكل (2-3).....64
الجدول (3-3): العقد العامة وما يقابلها من العقد المحلية لعناصر الشكل (3-3).....67
الجدول (4-3): يبين القيم العددية للعقد المحققة للشروط الحدية للشكل (3-3).....68
الجدول (5-3): يبين دوال الشكل لكل عنصر من عناصر الشكل (3-3).....68
الجدول (6-3): يبين التقييم العام والمحلي لكل عقدة من الشكل (4-3).....72
الجدول (7-3): يبين قيم العقد المحققة لشرط ديرخليه للشكل (4-3).....73
الجدول (8-3): يبين العقد المجهولة القيمة والمطلوب إيجادها للشكل (4-3).....73
الجدول (9-3): يبين التقييم العام والمحلي لكل عقدة من الشكل (5-3).....77
الجدول (10-3): يبين العقد العامة وما يقابلها من عقد محلية للشكل (7-3).....79
الجدول (11-3): دوال الشكل للشكل (7-3).....79
الجدول (12-3): دوال الشكل لعناصر الشكل (8-3).....82
الجدول (13-3): دوال الشكل لعناصر الشكل (9-3).....86
الجدول (14-3): الإحداثيات المركزية لعقد الشكل (a-11-3).....92
الجدول (15-3): إحداثيات المساحة لعقد الشكل (a-13-3).....98

103.....	الجدول (1-4): دوال الشكل للمثال (1-4)
104.....	الجدول (2-4): حلول المثال (1-4)
108.....	الجدول (3-4): الحلول التقريبية للمثال (2-4)
110.....	الجدول (4-4): التقييم المحلي لعقد الشكل (2-4)
110.....	الجدول (5-4): دوال الشكل لعناصر الشكل (2-4)
111.....	الجدول (6-4): الحلول التقريبية للمثال (3-4)
116.....	الجدول (7-4): دوال الشكل لعناصر الشكل (3-4)
118.....	الجدول (8-4): الحلول التقريبية للمثال (4-4)
119.....	الجدول (9-4): دوال الشكل للعناصر الشكل (5-4)
120.....	الجدول (10-4): الحلول التقريبية للمثال (5-4)
123.....	الجدول (11-4): توابع الشكل للمثال (6-4)
124.....	الجدول (12-4): الحلول التقريبية للمثال (6-4)
126.....	الجدول (13-4): توابع الشكل للمثال (7-4)
145.....	الجدول (1-5): يبين مقارنة بين القيم الفعلية والتقريبية للعقد الداخلية والخطأ المطلق والنسبي عندما $h = 1$
145.....	الجدول (2-5): يبين مقارنة بين القيم الفعلية والتقريبية للعقد الداخلية والخطأ المطلق والنسبي عندما $h = 0.5$
146.....	الجدول (3-5): يبين مقارنة بين القيم الفعلية والتقريبية للعقد الداخلية والخطأ المطلق والنسبي عندما $h = 0.25$

## المستخلص

قدمنا في هذه الرسالة دراسة لإيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية الناقصية بطريقة العناصر المنتهية في الفضاء ثنائي البعد بشروط حدية مختلطة تجمع بين شرط ديرخلية وشرط نيومان، ويعود اهتمامنا بالحل العددي لأن الحل الفعلي يصعب إيجاده في كثير من الأحيان، حيث ناقشنا في هذه الرسالة أساسيات بناء طريقة العناصر المنتهية للمعادلات الناقصية الخطية ذات الأمثال الثابتة والمتغيرة في الإحداثيات الديكارتية وإحداثيات المساحة والإحداثيات المركزية، وتوضيح جميع الخطوات اللازمة لذلك، ثم انتقلنا إلى إيجاد الحل التقريبي للمعادلات الناقصية غير الخطية بطريقة العناصر المنتهية والتي يصعب إيجاد حلها التقريبي دون الاستعانة بطرائق أخرى، وذلك لأن طريقة العناصر المنتهية تحتاج عند تطبيقها على معادلات تفاضلية جزئية غير خطية إما لطرائق تكرارية مثل ( طريقة نيوتن\_غاوس، طريقة بيكارد التكرارية، طريقة نيوتن\_غالاركين، طريقة نيوتن رافسون بمختلف درجات تقريبها) أو لدمجها مع طرائق تقريبية أخرى مثل طريقة تحليل الهوموتوبي، حيث استطعنا إدخال جميع الطرائق التكرارية السابقة على طريقة العناصر المنتهية وإيجاد الحلول التقريبية لبعض المعادلات الناقصية غير الخطية، ثم عملنا على دمج طريقة العناصر المنتهية مع طريقة تحليل الهوموتوبي بطريقة واحدة وذلك لتحويل المسألة غير الخطية إلى مسألة خطية من خلال طريقة تحليل الهوموتوبي، وللتغلب على التعقيد الهندسي للمنطقة عن طريق شبكة من العناصر المنتهية من خلال طريقة العناصر المنتهية، حيث تكمن أهمية طريقة الدمج هذه بإمكانية تطبيقها على جميع المعادلات التفاضلية الجزئية، وتعطي نتائج أسرع بكثير من تطبيق كل طريقة بمفردها، ثم انتقلنا إلى تقدير الخطأ المرتكب أثناء تطبيق طريقة العناصر المنتهية واثبات المبرهنات اللازمة للتوصل لعبارة الخطأ، ولأن طريقة العناصر المنتهية تحتاج الكثير من الوقت نظراً لكثرة خطواتها وحاجتها لعدد كبير من العناصر فقد قمنا بإدراج بعض برامج الماتلاب التي تخدم العديد من الأمثلة في هذه الرسالة والتي تساعد في توفير الكثير من الوقت، ومن الجدير بالذكر أن بعض هذه الأمثلة وردت في المراجع، لذلك قمنا بإعادة صياغة هذه الأمثلة وعرضها بأسلوب مبسط وتفصيلي يوضح آلية عمل الطريقة ويساعد على فهم القارئ، وقد أدرجنا الجداول والرسوم التي توضح كيفية التقسيم بطريقة العناصر المنتهية بطريقة سليمة.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التفاضلية الناقصية، طريقة العناصر المنتهية، شروط ديرخلية الحدية، الشروط الحدية المختلطة، الصيغة الضعيفة، مصفوفات الصلابة، متجهات الحمل، دالة الوزن، دوال الشكل، درجات الحرية، طريقة بيكارد التكرارية، طريقة نيوتن غالاركين، طريقة نيوتن رافسون، طريقة تحليل الهوموتوبي.

## تمهيد

نخصص هذا التمهيد لعرض هدفنا من هذا العمل والمشاكل التي واجهتنا ولمحة سريعة عن محتويات هذه الرسالة.

### 1. هدف البحث:

نهتم في هذا البحث بإيجاد الحلول التقريبية للمعادلات الناقصية الخطية وغير الخطية ذات الأمثال الثابتة والمتغيرة بطريقة العناصر المنتهية واتباع جميع الخطوات اللازمة، ووضع خوارزميات وبرامج لجميع الخطوات اللازمة، وقد تم توضيح تلك الخوارزميات من خلال الرسوم والجداول المناسبة.

### 2. مشكلة البحث:

بالرغم من فعالية النتائج العددية لطريقة العناصر المنتهية، إلى أنه تظهر صعوبة هذا البحث كلما زاد عدد العناصر في المنطقة المعطاة، وهنا يُستحال إيجاد الحل يدوياً لذلك نحن بحاجة لصياغة برامج ماثلاً لتساعدنا في ذلك، وتزداد صعوبة هذا النوع من الدراسات كلما كانت الشروط الحدية معقدة أكثر ومطبقة على عدد أكبر من أضلاع المنطقة، وكلما زاد عدد الثوابت غير المعدومة في صيغة المعادلة التفاضلية الجزئية، وتكمن مشكلة البحث الذي قمنا به في إيجاد الحلول التقريبية للمعادلات الناقصية غير الخطية والتي لاكتفي بطريقة العناصر المنتهية، وكان لابد لنا من إدخال طرائق تقريبية وتكرارية تساعدنا في إتمام طريقة الحل، مما زاد من صعوبة إيجاد خوارزميات للمسألة المدروسة.

### 3. مخطط الأطروحة:

تنقسم الدراسة في أطروحتنا هذه إلى خمسة فصول، تم تخصيص الفصل الأول والثاني كدراسة مرجعية لأهم مايلزم لطريقة العناصر المنتهية، أما الدراسة البحثية فقد تمت في الفصول الثلاثة الأخيرة، و سنعرض دراستنا هذه وفق المخطط الآتي:

نعرض في الفصل الأول لمحة تاريخية نركز من خلالها على خمسة محاور أساسية:

نتناول في أولها لمحة تاريخية موجزة عن نشوء طريقة العناصر المنتهية وأهم مجالات استخدامها، في حين نخصص المحور الثاني للحديث عن المعادلات التفاضلية الناقصية و لمحة تاريخية عن أهم الطرائق المستخدمة للحصول على حلولها، ونعرض في المحور الثالث أهم المراحل التي مرت بها طريقة العناصر المنتهية عند توظيفها في حل المعادلات الناقصية ببعد واحد وبعدين مع ذكر لأهم الأسماء التي برزت في هذا المجال حتى وقتنا الزاكن، وفي المحور الأخير نتناول لمحة تاريخية عن الطرائق التقريبية والتكرارية المستخدمة في هذه الأطروحة.

أما الفصل الثاني فيتضمن دراسة مفصلة حول طريقة إيجاد دوال الشكل الأكثر استخداماً في الفضاء أحادي البعد وثنائي البعد وثلثي البعد، والتي تعد الركيزة الأساسية لطريقة العناصر المنتهية والتي لا تكتمل أطروحتنا بدون شرح كيفية إيجادها، حيث تم في هذا الفصل عرض مفصل لبعض العناصر الأكثر شيوعاً وطريقة إيجاد دوال الشكل المناسبة لها في جملة الإحداثيات الديكارتية، الطبيعية والمركزية و تم عرض أشكال مختلفة من درجات الحرية لكل عنصر من العناصر والتي تؤثر بشكل مباشر على الشكل العام لدوال الشكل.

نقوم في الفصل الثالث بشرح جميع الأمور المتعلقة بطريقة العناصر المنتهية في الفضاء ثنائي البعد وكيفية تطبيقها على المعادلات التفاضلية الناقصية الخطية، و نركز في هذا الفصل على محورين: نتناول في المحور الأول عن الحلول التقريبية للمعادلات الناقصية في جملة الإحداثيات الديكارتية، حيث تم عرض الكثير من المسائل التي توضح ذلك، في حين نخصص المحور الثاني عن كيفية الانتقال من جملة الإحداثيات الديكارتية إلى جملة الإحداثيات المركزية وإلى جملة إحداثيات المساحة، وكيفية تطبيق طريقة العناصر المنتهية في كلا الحالتين مع عرض بعض الأمثلة التوضيحية.

ومن ثم نعرض في الفصل الرابع الحل التقريبي لبعض المعادلات الناقصية غير الخطية بطريقة العناصر المنتهية ( معادلة لابلاس وبواسون غير الخطية، المعادلة اللوجستية، Ginzburg Landau equation ) وذلك بالاستعانة بعدد من الطرائق التكرارية مثل ( طريقة نيوتن غاوس، طريقة نيوتن غالاركين، طريقة بيكارد التكرارية، طريقة نيوتن رافسون)، وتم دمج طريقة العناصر المنتهية مع طريقة تحليل الهوموتوبي بطريقة واحدة.

نخصص الفصل الخامس لدراسة الأخطاء المرتكبة الناتجة عن تطبيق طريقة العناصر المنتهية وعرض جميع المبرهنات والنظرية اللازمة لذلك.

وأخيراً تم تخصيص الجزء الأخير من الأطروحة كملحق لبعض برامج الماتلاب التي قمنا ببرمجتها لبعض الأمثلة والطرائق المذكورة في فصول هذه الأطروحة.

## الفصل الأول: دراسة مرجعية

### 1-1 نشوء طريقة العناصر المنتهية:

تُعد طريقة العناصر المنتهية تقنية عديدة لحل المسائل التي توصف بالمعادلات التفاضلية الجزئية، شائعة الاستخدام على نطاق واسع، وهي الطريقة الأولى الناجحة المستخدمة في ميكانيك الصلب، ميكانيك المرونة.

قُدمت طريقة العناصر المنتهية من قبل المهندسين في أواخر الخمسينيات وبداية ستينيات القرن العشرين، وذلك لإيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية في الهندسة الهيكلية.

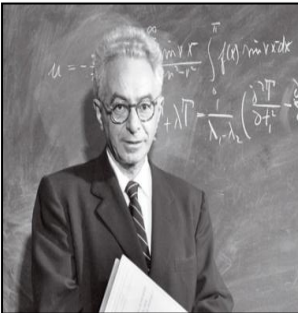
بدأ علماء الرياضيات بدراسة طريقة العناصر المنتهية في منتصف الستينيات وسرعان ما أصبحت هذه الطريقة هي تقنية عامة للحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية.



Walther Ritz

تعود طريقة العناصر المنتهية لعام 1909، عندما طوّر ريتز طرائق الحل التقريبي لمسائل في ميكانيك المواد الصلبة المشوهة، في عام 1943 زاد **Richard Courant** (1888-1972) من إمكانيات طريقة ريتز عن طريق إدخال دوال خطية خاصة معرفة على مناطق مثلثية، وطبق هذه الطريقة في مسائل الفتل.

استنتج **Turner** عام 1956 مصفوفات الصلابة من أجل البنى الشبكية، وفي عام 1959 استخلص



Richard Courant

**Greenstadt** ومن خلال مناقشة وجدت في كتاب ألفه **Feshback**

و **Morse** عام 1953 بعنوان ( طرائق الفيزياء النظرية ) ( Methods

of theoretical physics) طريقة تقطيع تتضمن خلايا بدلاً من

النقاط أي أنه تصور منطقة الحل مقسمة الى مجموعة من الخلايا

الجزئية المستمرة، فوضّح بطريقته هذه إجرائية تمثيل الدالة المجهولة

على شكل متسلسلة من الدوال كل منها مرتبطة بخلية، وبعد وضعه

للدوال التقريب، استخدم شروط الاستمرارية للربط بين معادلات جميع

الخلايا، وبهذا ردّ المسألة المستمرة إلى مسألة متقطعة، فأصبح من الممكن استخدام شبكات ذات خلايا غير منتظمة الشكل.

وفي الوقت الذي بدأت فيه طريقة العناصر المنتهية بالتطور بين فئات المهندسين و الفيزيائيين، اهتم الرياضيون في إعطاء أساس رياضي راسخ لهذه الطريقة، فأجريت دراسات عديدة لتقدير أخطاء التقطيع،

ونسب التقارب، و ركزت هذه الدراسات بشكل أساسي على مسائل القيم الحدية الناقصية الخطية، وفي أواخر الستينيات بدأت تتصاعد محاضرات **FEM** أكثر من أي وقت مضى.

أمّا على الصعيد الفيزيائي، فقد قام **Prager** و **Joun Synge** بتطوير طريقة **Hyper Circle** والتي كانت قد تطوّرت أصلاً مع نظرية المرونة الكلاسيكية، مما جعلها قابلة للتطبيق في حل المسائل المستمرة، كما هو الحال في طريقة العناصر المنتهية.

أدرك **Hernikoff** أنه يمكن التغلب على صعوبة حل مسائل البنية المرنة المستمرة من خلال تقسيم المنطقة المستمرة إلى عناصر تتقاطع بعدد منتهي من النقاط، ولاقت محاولات **Hrenikoff** في تطبيق طريقته المسماة (**Frame-work method**) عام 1941 نجاحاً كبيراً، فنمت بذرة لطريقة العناصر المنتهية في الميكانيك المستمر.

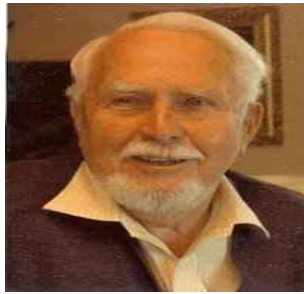
تم تقديم الحل الفعلي لمسائل المرونة المستوية بواسطة عناصر مثلثية حددت خواصها من معادلات نظرية المرونة في مقالة كتبها (**Clough, Turner, Martin, Topp** عام 1956، فكانوا أول من قدّم ما يُعرف اليوم باسم **Direct Stiffness Method**) لتحديد خواص العناصر المنتهية، فساهمت دراستهم هذه وبمساعدة الحواسيب الرقمية التي طوّرت آنذاك في تمهيد الطريق نحو حل مسائل المرونة المستوية المعقّدة.



Clough

إقترح **Clough** دمج تعديل **Courant** مع طريقة ريتز، فحصل على

طريقة تشابه طريقة العناصر المنتهية التي قُدمت لأول مرة عام 1960 وتحمل اسم العناصر المنتهية.



Zienkiewicz

طُبِع الكتاب الأول لطريقة العناصر المنتهية عام 1967 من قبل

**Zienkiewicz** و **Cheung** سُمي (طريقة العناصر المنتهية في الميكانيك الهيكلي و المتصل)

(The finite element method in structural and continuum mechanics).

وفي نهاية الستينيات وبداية السبعينيات لاقت محاضرات **FEM** انتشاراً واسعاً تجلّى في آلاف المقالات ومئات المؤتمرات والكتب العديدة التي ظهرت حينذاك والتي لا تزال في تصاعد مستمر، ففي عام 1985 أدخل مفهوم العناصر المنتهية إلى الديناميكا المغناطيسية [37]، وفي عام 1986 استخدمت في الميكانيكا الحرارية [43]، وفي عام 1987 أصبحت مفهوماً مفيداً في المجالات الكهربائية والمغناطيسية [75]، وتطورت طريقة العناصر المنتهية مع تقدم العلم والتكنولوجيا حتى تم استخدامها عام 1999 في بصريات الجسيمات المشحونة [48]، وأدخلت إلى المجالات الهندسية المختلفة ففي



عام 2001 بدأت الهندسة الكيميائية بتطبيق طريقة العناصر في مختلف فروعها [25]، وفي عام 2003 طبقت هذه الطريقة في مجالات الكهرومغناطيسية [67, 76]، وسرعان ما أصبحت طريقة العناصر المنتهية طريقة أساسية في مناهج طلاب الهندسة في الولايات المتحدة الأمريكية عام 2005 [6]، وحتى المجالات الطبية أخذت هذه الطريقة واستعملتها في مختلف اختصاصاتها، ففي عام 2006 طبقت على معادلات تدفق الدم [13]، وفي عام 2007 بدأ طب الأسنان في استخدام هذه الطريقة في زرع الأسنان [34]، وفي عام 2012 كان لهذه الطريقة دور فعال في تكنولوجيا النانو [68]، وفي عام 2013 ساهمت هذه الطريقة في عمليات تصنيع الآلات [62]، وأصبح لها دور فعال في التحليل التنسوري [41]، ثم تم تطوير الكثير من البرنامج لعرض أهم التطبيقات الهندسية باستخدام طريقة العناصر المنتهية مثل برنامج ANSYS عام 2015 [61]، وبرامج MATLAB, MAPLE, و COMSOL و ذلك عام 2017 [38]، وفي عام 2018 عُرِضَت تطبيقات حديثة لطريقة العناصر المنتهية في هندسة الطيران والهندسة المدنية [90]، وعلى الرغم من أن طريقة العناصر المنتهية احتلت مكانة عالية في المجالات الهندسية إلا أنها تبقى من أهم أعمدة التحليل العددي، حيث ظلت مستمرة وفعالة في هذا الاختصاص إلى يومنا هذا، و أصبحت من أساسيات مناهج الطرائق العددية.

## 1-2 نشوء المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية:

في الرسالة تمت مناقشة المعادلات التفاضلية الناقصية التي بدأت دراستها في القرن التاسع عشر والتي تصف الظواهر التي لا تتغير من لحظة لأخرى، و تظهر عادة في أماكن مختلفة من العلوم والهندسة، وتتضمن مسائل التوازن، ظواهر الحالات المستقرة، الحرارة، التوتر الكهربائي، علم الفلك، التشريد الغشائي، ، وفي عام 1956 بدأت دراسة المعادلات الناقصية شبه الخطية، ومن ثم أصبحت المعادلات الناقصية غير الخطية موضوعاً متداولاً بكثرة ولها الكثير من التطبيقات مثل: نظرية الألعاب، السوائل غير النيوتونية، الريولوجيا، المرونة غير الخطية، التدفق عبر وسط مسامي، معالجة الصور، الهندسة التفاضلية، نقل الكتلة، البرامج الديناميكية، ديناميك السوائل.

تتنوع الطرائق التحليلية، التقريبية التحليلية، والعديد لإيجاد الحل الملائم للمعادلة التفاضلية الجزئية الناقصية، فمن أبرز الطرائق التحليلية هي التحويلات التكاملية التي ينتج من خلال تطبيقها الحل الفعلي [26, 46, 49]، أما الطرائق التقريبية التحليلية فهناك طريقة التكرار التبايري Variational Iteration Method (VIM) [39]، طريقة تفريق أدوميان Adomain Decomposition Method (ADM) [3, 91]، طريقة تحليل الهوموتوبي Homotopy Analysis Method (HAM) [91]، وطريقة اضطراب الهوموتوبي Homotopy Perturbation Method (HPM) [28, 47, 91]، ومن الطرائق العددية الجديرة بالذكر، طريقة الفروق المنتهية Finite Difference Method (FDM) [27, 89]، طريقة الحجوم المنتهية Finite Volume Method (FVM)

[65]، طريقة ليبمان Libmann's Method (LM) [50]، وطريقة الإتجاه المتناوبة الضمنية Alternating Direction Implicit Method (ADIM) [50].

### 1-3 طريقة العناصر المنتهية والمعادلات التفاضلية الناقصية:

بالرغم من قدرة وقوة جميع الطرائق السابقة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية وحتى الشاذة، تبقى هناك حاجة لطريقة أخرى قادرة على إيجاد الحل التقريبي مهما كان شكل المنطقة المدروسة ومهما كان بُعد الفضاء المعرفة عليه وتتعامل مع جميع أنواع الشروط الحدودية المرافقة للمسألة سواء أكانت ( ديرخليه، نيومان، مختلطة)، وهذه الطريقة هي طريقة العناصر المنتهية التي أمكن تطبيقها على جميع المسائل الحدية والابتدائية الخطية وغير الخطية والشاذة في الفضاء أحادي البعد، ثنائي البعد، وثلاثي البعد، سنعرض لمحة تاريخية عن أهم الدراسات المرجعية التي تتمحور حول تطبيق طريقة العناصر المنتهية على المعادلات التفاضلية الناقصية ببعد واحد وبعدين:

### 1-3-1 طريقة العناصر المنتهية والمعادلات التفاضلية الناقصية ببعد واحد:

تُعد طريقة العناصر المنتهية من الطرائق التي حازت على اهتمام الباحثين في مجال البحث عن الحلول التقريبية لمسائل القيم الحدية والابتدائية للمعادلات التفاضلية ببعد واحد، والتي بدأت في سبعينيات القرن الماضي، وظلت تتطور مع مرور الزمن، فعلى سبيل المثال، في عام 1999 تم إيجاد الحلول التقريبية للمعادلات الناقصية ببعد واحد [55]، وفي عام 2005 تم إيجاد الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية غير الخطية والشاذة ببعد واحد [77]، ولم تتوقف الأعمال عند هذا الحد بل استمرت الأبحاث في هذا الموضوع إلى وقتنا الرهن، ومن هذه الأبحاث:

العام	عنوان البحث	اسم الباحث
2017	Nonlinear Galarkin Finite Element Method Applied To The System Of Reaction-Diffusion Equations In One Space Dimension.	MACH, J BENES, M STRACHOTA, P
2018	Formulation Of Finite Element Method For 1-D Poisson Equation.	CHOPADE, P RATOGLI, P
2019	A Weak Galarkin Finite Element Method For Solving Nonlinear Convection-Diffusion Problems In One Dimension.	CHEICHAN, M KASHKOOL, H

**الجدول (1-1):** قائمة بأحدث الأبحاث للمعادلات التفاضلية الجزئية ببعد واحد بطريقة العناصر المنتهية

وتتلخص طريقة العناصر المنتهية في الفضاء أحادي البعد من خلال الجدول الآتي:

## خطوات طريقة العناصر المنتهية ببعد واحد:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x) \frac{\partial u}{\partial x} + r(x) u = f(x)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad ; 0 \leq x \leq 1 \quad (1-1)$$

$$\forall x \in [0,1] \quad q(x) \geq 0 \quad \exists \delta > 0 ; p(x) \geq \delta > 0 ; p, q, r, f \in C^1[0,1]$$

المسألة الابتدائية:

نجزئ المجال المعطى إلى عدد منته من المجالات الجزئية والتي تدعى بالعناصر، أما رؤوس العناصر التي تربط العناصر تدعى بالعقد، نجزئ في مسألتنا المجال  $[0,1]$  إلى  $n$  عنصر باستخدام العقد  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$  فنحصل على  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  والتي طولها  $h = x_j - x_{j-1}$ .

1. التقطيع:

نضرب طرفي المعادلة (1-1) بدالة الوزن  $v \in C^1[0,1]$  وبالمكاملة نجد:

$$\int_0^1 p u' v' dx + \int_0^1 q u' v dx + \int_0^1 r u v dx = \int_0^1 f v dx \quad (2-1)$$

2. إيجاد الصيغة

الضعيفة:

بحث عن الحل من الشكل:

3. تقريب الحل

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i \quad (3-1)$$

حيث  $n$  بعد الفضاء  $V_h$ ،  $u_1, \dots, u_n$  ثوابت يطلب تعيينها.

وهي  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  مستقلة خطياً

ممکن أن تكون:

دوال قبة:

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & ; x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & ; x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & ; x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

4. اختيار دوال

الشكل

وممكن أن تكون:

دوال فقاعات:

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & ; x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ (x - x_{i-1}) \left( x - x_i + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \right) & ; x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x - x_{i+1}) \left( x - x_i + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) & ; x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

نوجد لكل عنصر من العناصر مصفوفة صلابة  $A^{(i)} = (a_{ij})_{(2 \times 2)}$ ، وهي مصفوفة متناظرة، تُعطى عناصرها بالصيغة:

$$a_{ki}^j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} p \varphi_k' \varphi_i' dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} q \varphi_k' \varphi_i dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} r \varphi_k \varphi_i dx$$

ونوجد متجه الحملية لكل عنصر  $B^{(j)} = (b_i)_{(2 \times 1)}$ ، والذي تُحسب عناصره بالصيغة:

$$b_i^j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \varphi_i dx$$

نجمع مصفوفات الصلابة لنحصل على مصفوفة الصلابة العامة  $A = (a)_{n \times n}$  وهي مصفوفة متناظرة، تُحسب عناصرها بالصيغة:

عناصر القطر الرئيسي  $a_{ii} = a_{ii}^i + a_{ii}^{i+1}$ ، العناصر التي تقع فوق القطر الرئيسي

$$a_{i \ i-1} = a_{i \ i-1}^i$$

ونجمع متجهات الحملية لنحصل على متجه الحملية العام  $B = (b_i)_{n \times 1}$  تُحسب

$$i = 1, \dots, n \quad b_i = b_i^i + b_i^{i+1}$$

نطبق الشروط الحدية لمعرفة القيم المعلومة، ثم نوجد حلول الجملة المصفوفية

$$AU = B, \text{ حيث } U = (u_i)_{(n \times 1)} \text{ لإيجاد القيم المجهولة، ثم نعوض في عبارة}$$

الحل (3-1) فيتم المطلوب.

5. إيجاد مصفوفات الصلابة ومتجهات الحملية:

6. التجميع:

7. حل الجملة المصفوفية الناتجة:

الجدول (2-1): طريقة العناصر المنتهية ببعد واحد.

### 1-3-2. تطبيق طريقة العناصر المنتهية على المعادلات التفاضلية الناقصية ببعدين:

بدأ تطبيق طريقة العناصر المنتهية على المعادلات التفاضلية الناقصية ببعدين عام 1978 [20]، وبقي هذا النوع من المعادلات قيد الدراسة، ففي عام 1999 توصل الباحثون للحلول التقريبية للمعادلات الناقصية في الفضاء أحادي البعد، ثنائي البعد، ثلاثي البعد [55]، و مع تطور تقنية العناصر المنتهية كانت المعادلات الناقصية الهدف الأول للباحثين، ففي عام 2010 تم دراسة المعادلات الناقصية بأمثال ثابتة ومتغيرة وبمختلف أنواع الشروط الحدية [17]، وفي عام 2013 تمت مقارنة طريقة العناصر

المنتهية مع طريقة سلاسل ماركوف Markov Chain Method عند إيجاد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس [72]، حيث توصل الباحثون إلى أن طريقة العناصر المنتهية عملية أكثر من طريقة سلاسل ماركوف، وفي عام 2015 أوجدت الحلول التقريبية لبعض المسائل الناقصية ذات التطبيقات الفيزيائية وأجريت مقارنة بين طريقة العناصر المنتهية وطريقة الفروق المنتهية [66]، حيث أكدت الدراسات أن طريقة العناصر المنتهية أقل تعقيداً، ثم قدم الباحثون تقنيات جديدة وسريعة لحساب قيم متجهات الحمولة بوجود الشروط الحدية المختلطة والتي تختلف عن طرائق الحساب التقليدية وذلك في عام 2018 [36].

ولم تتوقف الأعمال عند هذا الحد بل استمرت الأبحاث في هذا الموضوع إلى وقتنا الرهن، ومن هذه الأبحاث:

اسم الباحث	عنوان البحث	العام
FENG.F HENNING.S.L NEILAN.A	Finite Element Methods For Second Order Linear Elliptic Partial Differential Equations In Non-Divergence Form.	2017
MU.L WANG.J YE.X	A Least-Squares-Based Weak Galerkin Finite Element Method For Second Order Elliptic Equations.	2017
YE.X ZHANG.SH	A Discontinuous Least-Squares Finite Element Method For Second-Order Elliptic Equations.	2018
HE.W	The Local Ultraconvergence Of High-Order Finite Element Method For Second-Order Elliptic Problems With Constant Coefficients Over A Rectangular Partition.	2019
CHOPA.D.P RASTOGI.P	Numerical Solutions For Two-Dimensional Laplace Equation In Electrostatics With Boundary Values.	2019

### الجدول (1-3): أحدث الأبحاث للمعادلات الناقصية الخطية ببعدين.

بدأت دراسة طريقة العناصر المنتهية في مجال المعادلات الناقصية غير الخطية في سبعينيات القرن العشرين [18]، وأهم المعادلات الناقصية غير الخطية التي بدأت دراستها في ذلك الوقت هي معادلة Naveir-Stokes نفير ستوكس [35]، وظلت الأبحاث مستمرة لإيجاد حلول هذه المعادلات مع تطور طريقة العناصر المنتهية مع مرور الزمن وصولاً للأعوام 2016 [5]، 2017 [59]، 2018 [44]، ومن المعادلات الناقصية غير الخطية الجديرة بالذكر هي معادلة Monge-Ampere والتي حظيت باهتمام كبير من قبل الباحثين للوصول لحلولها التقريبية بطريقة العناصر المنتهية [30]، حيث يتم نشر الكثير من الأبحاث والتي تتطور عاماً بعد عام ففي عام 2008 تم نشر أبحاث للمعادلات الناقصية غير الخطية والمعادلات الناقصية شبه الخطية [16]، وبما أن المعادلات الناقصية غير الخطية تحتاج إلى

طرائق تكرارية وتقريبية مع طريقة العناصر المنتهية، فقد تم استخدام دوال ب-سبلاين الرباعية مع طريقة العناصر المنتهية في عام 2009 [87]، وفي عام 2012 استخدمت طريقة نيوتن رافسون مع طريقة العناصر المنتهية للحصول على الحل التقريبي لمعادلة Gizburg-Landau جنزبرج لاندائو [53]، ثم طُبقت طريقة العناصر المنتهية على معادلة Pucci's [54]، وفي عام 2014 استخدمت من أجل المعادلة اللوجستية [52]، وفي عام 2015 تم دمج طريقة العناصر المنتهية مع طريقة تحليل الهوموتوبي لإيجاد الحل التقريبي لمعادلة بواسون غير الخطية [22]، وفي عام 2018 تم دراسة الحل التقريبي لمعادلة The Minimal Surface [8]، وفي عام 2018، 2020 تمت دراسة معادلة Complex Ginzburg-Landau [80, 79].

#### 1-4. لمحة عن الطرائق التقريبية والتكرارية المستخدمة في الأطروحة:

##### 1-4-1. طريقة تحليل الهوموتوبي (HAM): Homotopy Analysis Method



تعود طريقة HAM إلى الرياضي الصيني Shijun Liao حيث قدمها في عام 1992 وقد كانت هذه الطريقة جزءاً من رسالة الدكتوراه لهذا العالم، وقد تم تعديلها فيما بعد لتحتوي الوسيط  $h$ ، ومن الجدير بالذكر أن هذا الباحث كان له دور بارز في هذه الطريقة حيث عرض طريقته مع المبادئ الأساسية المتعلقة بها، إضافة إلى تطبيقاتها على عدة مسائل ذات أهمية في المجالات الهندسية والفيزياء [56, 57, 63].

**Shijun Liao**

لقد أدرك الباحثون أهمية هذه الطريقة، وقدرتها على التعامل مع العديد من المسائل التي تتضمن معادلات تفاضلية، معادلات تكاملية، لذا فقد اهتموا بدراستها وتطبيقها على معادلات غير خطية، هذه الطريقة تمتاز بقدرتها على تحويل المعادلات غير الخطية إلى معادلات خطية سهلة الحل وذلك بالاستفادة من مفهوم الهوموتوبي (تشبه دالة مستمرة إلى دالة أخرى)، في التبولوجيا والهندسة التفاضلية، حيث تكمن أهمية طريقة HAM في قدرتها على استخدام الهوموتوبي، وتوظيفه في حل أصعب المسائل، ففي عام 2006 استخدمت طريقة HAM لحل معادلات تفاضلية غير خطية في مجال الحرارة [2]، وفي عام 2010 تم تطبيق هذه الطريقة لحل معادلات تفاضلية ومعادلات تكاملية [88]، وفي عام 2013 كان لهذه الطريقة دور في حل معادلة التلغراف [73]، وفي عام 2015 استخدمت طريقة HAM لحساب القيم الذاتية لمسائل Sturm-Liouville [45]، بينما ساهمت هذه الطريقة في عام 2016 في حل مسألة Bratu [41]، وقُدمت هذه الطريقة مع طريقة تحليل الهوموتوبي متعددة الخطوات (MHAM) كتطبيقات مهمة للمشتقات الكسرية المعدلة Caputo-Fabrizio في 2018 [64].

#### 2-4-1. طريقة نيوتن رافسون (NRM): Newton Raphson Method

طريقة نيوتن أو طريقة نيوتن رافسون هي تقنية عددية لإيجاد الحل العددي للمعادلات غير الخطية، تعود هذه الطريقة ل Isaac Newton & Joseph Raphson، ومع مرور الزمن تم تطوير هذه الطريقة للحصول على طرائق تكرارية جديدة من طريقة نيوتن رافسون بمراتب تقريب مختلفة، من الرتبة الثالثة [31]، من المراتبة الرابعة [19]، من المراتبة الخامسة [21]، السادسة [86]، السابعة [29]، وماتزال طريقة نيوتن رافسون قيد اهتمام الباحثين لحد الآن للحصول على مراتب تقريب عليا.



George Adomian



Wazwaz

تتنوع التقنيات العددية والتحليلية المستخدمة لتعديل طريقة نيوتن رافسون للحصول على رتب تقريب مختلفة، حيث تم اقتراح دمج طريقة هالي وطريقة هاوس هولدر مع طريقة نيوتن رافسون [69]، وفي رسالتنا هذه سنقوم بتحسين طريقة نيوتن رافسون من خلال طريقة تفريق أدوميان المعدلة Modified Adomian Decomposition Method (MADM) [1]، حيث ظهرت طريقة تفريق أدوميان في بداية الثمانينيات على يد العالم جورج أدوميان، والتي ساهمت بحل أنواع مختلفة من المعادلات الدالية سواء كانت خطية أو غير خطية، ثم قدم Wazwaz طريقة تفريق أدوميان المعدلة للتغلب على صعوبة الحسابات. وخاصة إن لم يكن التقريب الابتدائي ثابتاً، فقد عدل طريقة ADM تعديلاً فعالاً ساهم في تقريب متسلسلة الحل، وفي عام 2003 تم دمج طريقة تفريق أدوميان مع نيوتن رافسون للحصول على رتب تقريب متنوعة، وهذا الدمج سنستفيد منه في أطروحتنا لإيجاد الحل التقريبي للمعادلات الناقصية غير الخطية بطريقة العناصر المنتهية.

#### 1-2-4-1. تحسين طريقة نيوتن رافسون باستخدام طريقة تفريق أدوميان المعدلة [1]:

لتكن لدينا المعادلة غير الخطية:

$$f(x) = 0 \quad (4-1)$$

$f \in C^2$  وليكن  $\alpha$  جذر المعادلة (4-1)، ولنفرض أن  $|f'(\alpha)| > 0$  ولتكن متسلسلة تايلور بالقرب من  $x$ :

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + O(h^2) \quad (5-1)$$

$h$  وسيط صغير، يحقق:

$$f(x-h) \approx f(x) - hf'(x)$$

$$h = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x-h = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (6-1)$$

فإن طريقة نيوتن \_ رافسون، تعطى بالصيغة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (7-1)$$

يتم قياس كفاءة الطريقة من خلال ما يدعى مؤشر الكفاءة كما هو موضح في [53] ويتم تعريفه بـ  $EI = \rho^{\frac{1}{\beta}}$  حيث  $\rho$  رتبة الطريقة،  $\beta$  العدد الإجمالي للدوال اللازمة في كل تكرار، ومن العلاقة (1-1) نجد أن  $\rho = 2$  ومن (7-1) نجد أن  $\beta = 2$  وعليه فإن مؤشر الكفاءة لطريقة نيوتن رافسون من الرتبة الثانية هو 1.4142، ولنوجد التقريب من الرتبة الثالثة:

لتكن متسلسلة تايلور:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^2) \quad (8-1)$$

وعليه فإن:

$$f(x-h) \approx f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) \quad (9-1)$$

وعليه فإن:

$$h = \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{h^2}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)} \quad \text{or} \quad h = C + N(h) \quad (10-1)$$

حيث  $C$  ثابت،  $N(h)$  دالة غير خطية، ومن أجل إيجاد قيمة  $h$  يمكن استخدام طريقة تفريق أدوميان، لنمثل الحل وفق المتسلسلة الآتية:

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \quad (11-1)$$

والدوال غير الخطية يمكن تمثيلها بالشكل:

$$N(h) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (12-1)$$

حيث  $A_n$  دوال أدوميان، التي تعطى بالصيغة:



$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left( N \left( \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i \right) \right)_{\lambda=0} ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (13-1)$$

بتعويض (11-1)، (12-1) في (10-1)، نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n = C + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (14-1)$$

من تقارب المتسلسلة في (14-1)، ينتج:

$$h_0 = C, \quad h_{n+1} = A_n ; n = 0, 1, \dots \quad (15-1)$$

باستخدام (13-1) يتم توليد كثيرات الحدود  $A_n$  لجميع أنواع المعادلات غير الخطية:

$$\begin{aligned} A_0 &= N(h_0) \\ A_1 &= h_1 N'(h_0) \\ A_2 &= h_2 N'(h_0) + \frac{1}{2} h_1^2 N''(h_0) \end{aligned} \quad (16-1)$$

ومنه:

$$H_m = h_0 + h_1 + \dots + h_m = h_0 + A_0 + A_1 + \dots + A_{m-1}$$

من أجل  $m = 0$ :

$$\begin{aligned} h \approx H_0 = h_0 = C = \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \alpha = x - h \approx x - H_0 = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned} \quad (17-1)$$

من أجل  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} h \approx H_1 = h_0 + h_1 = h_0 + A_0 \\ h_0 = C = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad A_0 = N(h_0) = \frac{h_0^2 f''(x)}{2 f'(x)} = \frac{f^2(x) f''(x)}{2 f'^3(x)} \\ \alpha = x - h \approx x - H_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x) f''(x)}{2 f'^3(x)} \\ \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x) f''(x)}{2 f'^3(x)} \end{aligned} \quad (18-1)$$

تُكتب العبارة الأخيرة بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)} \quad (19-1)$$

نلاحظ أن مؤشر الكفاءة لهذه الطريقة هو  $3^{\frac{1}{3}} = 1.44224$  وهو قريب من مؤشر الكفاءة لطريقة نيوتن رافسون من الرتبة الثانية.

وبنفس الخطوات السابقة من أجل  $m = 3$  نجد أن طريقة نيوتن رافسون من الرتبة الخامسة هي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x) + f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - \frac{f(x) + f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}\right)}{f'\left(x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)} \quad (20-1)$$

يمكن كتابة العلاقة (20-1) من خلال ثلاث خطوات متتالية، بالشكل:

$$y_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad z_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_{n+1})}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = z_{n+1} - \frac{f(z_{n+1})}{f'(y_{n+1})} \quad (21-1)$$

### 3-4-1. طريقة بيكارد التكرارية (Picard Iterative Method (PIM):

تُعد طريقة بيكارد التكرارية من الطرائق البسيطة وسهلة التعامل لإيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية سواء أكانت خطية أم غير خطية، تعمل هذه الطريقة في المعادلات غير الخطية على تعويض الحل الابتدائي في المصطلحات غير الخطية الواردة في المعادلة وتحويلها إلى معادلة خطية، وتُعرف أيضاً هذه الطريقة بطريقة البدائل المتتالية Method Of Successive Substitutions، تم التعامل مع هذه الطريقة في مسائل كثيرة، ففي 2006 استخدمت لإيجاد الحل شبه التحليلي لمعادلة Langerin [84]، وفي 2009 تم إيجاد الحل العددي لمعادلة Nonlinear Advection-Reaction-Diffusion [74]، و أوجدت طريقة بيكارد التكرارية في عام 2015 الحل الطيفي لمعادلة التوازن السكاني [81]، ثم تم التعامل معها لإيجاد الحل العددي لمعادلات النقل غير الخطية وذلك في عام 2016 [33]، وكما ساهمت هذه الطريقة في إيجاد الحل لمعادلات Caputo التفاضلية ذات المرتبة الكسرية [60] عام 2017 و مسائل القيم الابتدائية غير الخطية عام 2019 [10] والمعادلات التفاضلية العشوائية عام 2020 [32]، وما تزال هذه الطريقة قيد البحث والدراسة والتطبيق.

## الفصل الثاني

### دوال الشكل وعلاقتها في الجمل الإحداثية

1-2 . مقدمة:

نخصص هذا الفصل للحديث عن دوال الشكل وكيفية استنتاج القوانين المتعلقة بها في الجمل الاحداثية ( الديكارتيّة، الطبيعيّة ( الطول، المساحة، الحجم، المركزية))، وذلك حسب الشكل الموجود لدينا، حيث ندرس الأشكال الأكثر شيوعاً، ونأخذ بعين الاعتبار عدد درجات الحرية المرافقة لكل شكل.

2-2. تعريف [9, 78, 90, 92]:

تعريف 1-2: ثلاثيّة العناصر المنتهية:

لنعرف الثلاثية :  $(K, P_K, \sum)$

$K$ : نوع العنصر. مجال، مثلث، مستطيل،.....

$P_K$ : كثيرة الحدود الموافقة لعدد درجات الحرية.

$\sum$ : درجات الحرّية، وهي عدد الوسطاء المستقلة خطياً اللازمة لتعيين درجة كثيرة الحدود  $P_K$ .

تدعى الثلاثية السابقة بالعناصر المنتهية.

تعريف 2-2: دوال الشكل:

لتكن  $(K, P_K, \sum)$  ثلاثية العناصر المنتهية، حيث  $\sum = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\} = k$  و  $K$  عنصر ما، فإن الفضاء  $P_K$  هو فضاء كثيرات الحدود  $v \in P_K$  تحوي على عدد حدود مساوٍ لعدد درجات الحرية، ولتكن  $\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$  دوال من الفضاء  $P_K$  تحقق:

$$\sigma_i(N_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq k$$

ندعو الدوال السابقة بدوال الشكل.

فمثلاً في الفضاء أحادي البعد :

$K = I = [a, b]$  : مجال،  $P_K = P_1(I)$  كثيرة حدود من الدرجة الأولى على المجال المعطى،

$\sum = \{\sigma_1, \sigma_2\}$  حيث  $\sigma_1 = v(a), \sigma_2 = v(b)$ .

أما في الفضاء  $\mathbb{R}^d$  حيث  $d=2,3$ ، نقسم المنطقة المحدودة  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  إلى  $K$  عنصر (مثلثات أو رباعيات رؤوس عندما  $d=2$ ، رباعيات وجوه عندما  $d=3$ )، أما  $P_K$  يتم تحديدها كما في الفقرة 3-2.

ولنميز الرموز الآتية:

• : قيم كثيرة الحدود عند عقد الشكل .

◦ : قيم المشتق من الرتبة الأولى لكثيرة الحدود عند عقد الشكل .

$O$  : قيم المشتقات من الرتبة الثانية .

/ : قيم المشتقات العادية .

← : قيم المشتقات المختلطة .

3-2. كثيرات الحدود في الجمل الإحداثية :

1-3-2 . كثيرات الحدود في الإحداثيات الديكارتية :

تُعطى في الفضاء أحادي البعد :

$$p_0 = a_0$$

$$p_1 = a_0 + a_1x$$

$$p_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad ; a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

.

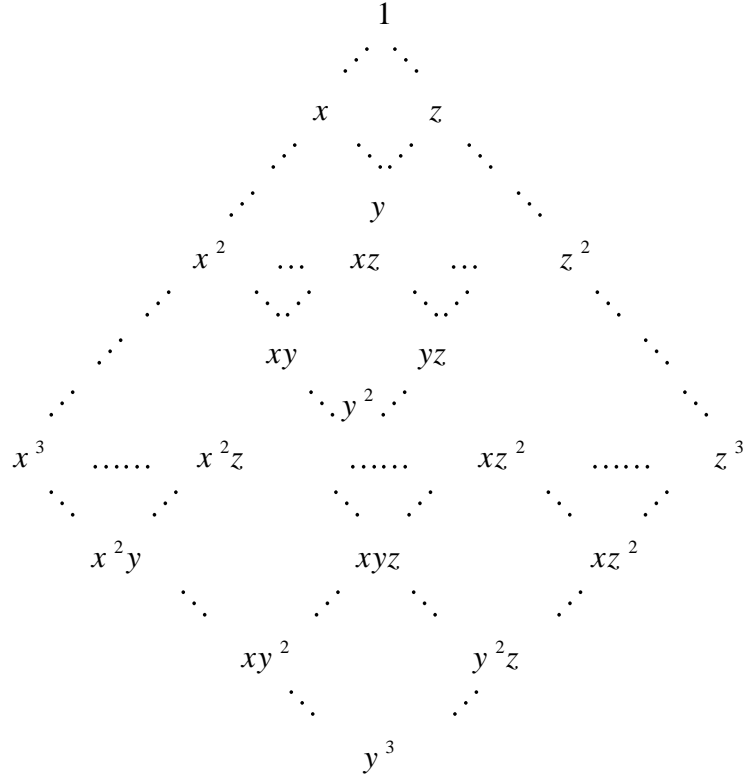
.

$$p_n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

في الفضاء ثنائي بمثلث باسكال :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & x & & & y & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & x^2 & & xy & & y^2 & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4
 \end{array}$$

وفي الفضاء ثلاثي البعد بهرم باسكال:



### 2-3-2. كثيرات الحدود في الإحداثيات الطبيعية :

تسمح هذه الجملة بتحديد موضع نقطة داخل العنصر باستخدام معاملات لابعدية قيمتها المطلقة لا تتجاوز الواحد.

وتستخدم بشكل أساسي لتحديد موضع نقطة داخل العنصر بدلالة إحداثيات عقد هذا العنصر، وفيما يلي بعض الإحداثيات الطبيعية .

### 2-3-2-1. إحداثيات الطول و المساحة :

تدعى بإحداثيات الطول في الفضاء أحادي البعد، وإحداثيات المساحة في فضاء ثنائي البعد، وإحداثيات الحجم في فضاء ثلاثي البعد.

يرمز لإحداثيات الطول (المساحة، الحجم) بالرمز  $(L_1, L_2, L_3, \dots, L_n)$ ، وتُعطى إحداثيات أي نقطة بدلالة إحداثيات الطول (المساحة، الحجم) بالصيغ الآتية وعلى الترتيب :

$$\begin{aligned} x &= x_1 L_1 + \dots + x_n L_n & , & & x &= x_1 L_1 + \dots + x_n L_n & , & & x &= x_1 L_1 + \dots + x_n L_n \\ y &= y_1 L_1 + \dots + y_n L_n & & & y &= y_1 L_1 + \dots + y_n L_n & & & y &= y_1 L_1 + \dots + y_n L_n \\ z &= z_1 L_1 + \dots + z_n L_n & & & z &= z_1 L_1 + \dots + z_n L_n & & & z &= z_1 L_1 + \dots + z_n L_n \end{aligned}$$

حيث  $x_1, \dots, x_n, (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$  : الإحداثيات الديكارتية لعقد الشكل الهندسي في الفضاء الأحادي، الثنائي، الثلاثي على الترتيب والتي عددها  $n$ .

تُعطى كثيرات الحدود في جملة الإحداثيات السابقة بالأشكال الآتية :

إذا كان الشكل مستقيم بعقدتين :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & L_1 & & L_2 & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & L_1^2 & & L_1 L_2 & & L_2^2 & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & L_1^3 & & L_1^2 L_2 & & L_1 L_2^2 & & L_2^3 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 L_1^4 & & L_1^3 L_2 & & L_1^2 L_2^2 & & L_1 L_2^3 & & L_2^4
 \end{array}$$

إذا كان الشكل مستقيم بثلاث عقد، وإذا كان الشكل ثلاثي الرؤوس :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & L_1 & & L_3 & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & L_2 & & & & \\
 & L_1^2 & & L_1 L_3 & & L_3^2 & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & L_1 L_2 & & L_2 L_3 & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 L_1^3 & & L_1^2 L_3 & & L_1 L_3^2 & & L_3^3 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & L_1^2 L_2 & & L_1 L_2 L_3 & & xz^2 & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & L_1 L_2^2 & & L_2^2 L_3 & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & L_2^3 & & & &
 \end{array}$$

وهكذا.

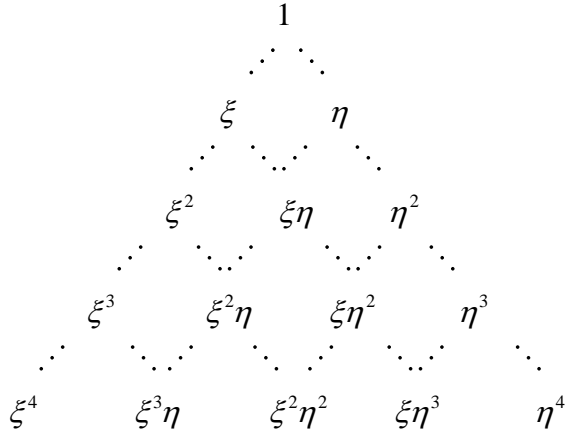
## 2-2-3-2. الإحداثيات المركزية:

هي جملة إحداثية مبدؤها مركز العنصر المدروس، وباستخدام تحويلات على الإحداثيات الديكارتية لجميع عقد العنصر ينسحب العنصر إلى جملة إحداثية مبدؤها مركز ذلك العنصر.

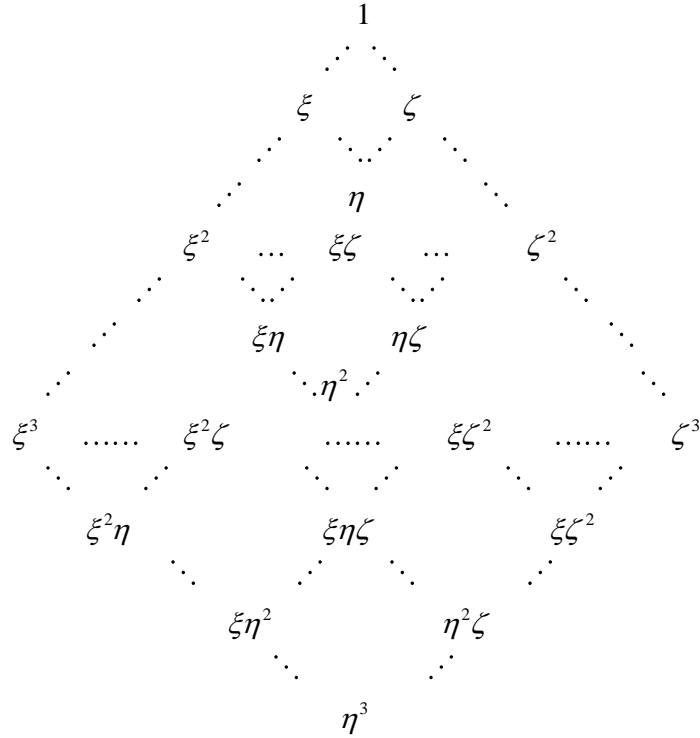
تُعطى كثيرات الحدود في الإحداثيات المركزية في فضاء أحادي البعد بالصيغ:

$$\begin{aligned}
p_0 &= a_0 \\
p_1 &= a_0 + a_1 \xi \\
p_2 &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \\
&\vdots \\
p_n &= a_0 + a_1 \xi + \dots + a_n \xi^n
\end{aligned}
\quad ; a_0, \dots, a_n \in \mathfrak{R}$$

أما في الفضاء ثنائي البعد:



في الفضاء ثلاثي البعد:



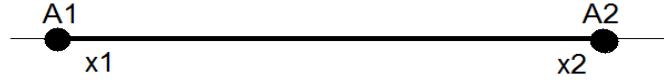
وسنوضح كل ما ذكر سابقاً من خلال ما يلي :

4-2. دوال الشكل في (1-D) :

1-4-2. المستقيم بعقدتين ودرجتين حرية:

أ. في حالة الإحداثيات الديكارتية :

ليكن لدينا العنصر الموضح بالشكل (1-2)، ولتكن  $x_1, x_2$  الإحداثيات الديكارتية للعقد  $A_1, A_2$  على الترتيب:



الشكل (1-2): الإحداثيات الديكارتية للمستقيم بدرجتين حرية

حيث تُعطى درجات الحرية بالعلاقة:

$$\sum_k = \{P(A_1) = u_1, P(A_2) = u_2\} \quad (1-2)$$

فإن كثيرة الحدود الموافقة في هذه الحالة هي:

$$p_1 = a_0 + a_1 x \quad (2-2)$$

وبتعويض درجات الحرية نجد:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1 x_1 \\ u_2 &= a_0 + a_1 x_2 \end{aligned}$$

التي تكتب بالشكل المصفوفي:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{x_2}{x_2 - x_1} u_1 - \frac{x_1}{x_2 - x_1} u_2 \\ a_1 = \frac{-1}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{1}{x_2 - x_1} u_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-2)$$

نعوض (3-2) في (2-2) فنجد:

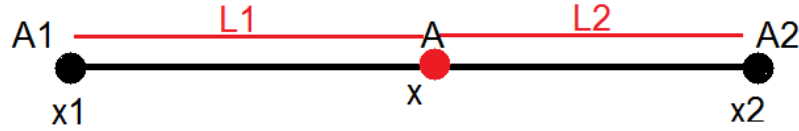
$$p_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 = N_1 u_1 + N_2 u_2$$



حيث:  $N_1, N_2$  دوال الشكل.

ب. في حالة الإحداثيات الطبيعية:

1. إحداثيات الطول:



الشكل (2-2): إحداثيات الطول للمستقيم بدرجة حرية.

لدينا حسب الشكل السابق العقدتين  $A_1, A_2$ ، إحداثياتها الديكارتية  $x_1, x_2$  على الترتيب، ولتكن النقطة  $A$  إحداثياتها الطبيعية  $(L_1, L_2)$ ، والديكارتية  $x$  بحيث:

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= 1 \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 &= x \end{aligned} \quad (4-2)$$

بحل جملة المعادلتين (4-2) نجد أن:

$$L_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5-2)$$

لما كان عدد درجات الحرية  $= 2$  حسب (1-2)، ومنه فإن كثيرة الحدود في إحداثيات الطول تُعطى بالعلاقة :

$$P = a_1 L_1 + a_2 L_2 \quad (6-2)$$

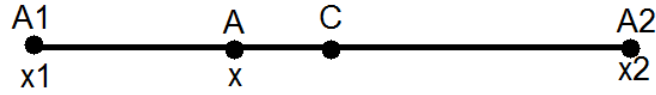
نعوض في (6-2) قيم إحداثيات الطول عند كل من  $A_1, A_2$ ، فنجد :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1(1) + a_2(0) \\ u_2 &= a_1(0) + a_2(1) \end{aligned} \quad (7-2)$$

بحل جملة المعادلتين (7-2) نجد أن :  $a_1 = u_1, a_2 = u_2$ ، نعوض في (6-2)، نجد :

$$P = L_1 u_1 + L_2 u_2 = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

2. الإحداثيات المركزية :



الشكل (2-3): الإحداثيات المركزية للمستقيم بدرجة حرية.

لتكن  $C$  نقطة المنتصف إحداثياتها الديكارتية  $\frac{x_1+x_2}{2}$ ، ولتكن  $A$  نقطة ما من المستقيم إحداثياتها المركزية  $\xi$  التي تُعطى بالصيغة :

$$\xi = \frac{AC}{\frac{x_2-x_1}{2}} = \frac{x-x_C}{\frac{x_2-x_1}{2}} = \frac{2}{x_2-x_1} \left( x - \frac{x_1+x_2}{2} \right) = \frac{2x-x_1-x_2}{x_2-x_1} \quad (8-2)$$

ومنه فإن كثيرة الحدود الملائمة في هذه الحالة وحسب (2-1) هي:

$$P = a_1 + a_2 \xi \quad (9-2)$$

العلاقة (9-2) تصبح عند كلا العقدتين  $A_1, A_2$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 - a_2 \\ u_2 &= a_1 + a_2 \end{aligned} \quad (10-2)$$

بحل جملة المعادلتين (10-2)، نجد إن :

$$a_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2}(-u_1 + u_2) \quad (11-2)$$

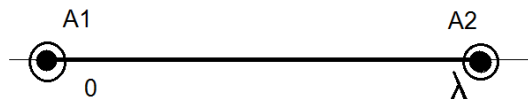
نعوض (11-2) في (10-2) نجد :

$$P = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \xi \right) u_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \xi \right) u_2 = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

2-4-2. مستقيم بعقدتين وأربع درجات حرية:

أ. في الإحداثيات الديكارتية:

ليكن لدينا عنصر المستقيم في الشكل (2-4)، حيث  $0, \lambda$  الإحداثيات الديكارتية للعقدتين  $A_1, A_2$  على الترتيب :



الشكل (4-2): الإحداثيات الديكارتية للمستقيم بأربع درجات حرية.

تُعطى درجات الحرية للعنصر السابق بالصيغة :

$$\sum_k = \left\{ P_3(A_1) = u_1, P_3(A_2) = u_2, \frac{\partial P_3}{\partial x}(A_1) = v_1, \frac{\partial P_3}{\partial x}(A_2) = v_2 \right\} \quad (12-2)$$

حسب العلاقة (12-2)، إن عدد درجات الحرية أربعة، ومنه فإن كثيرة الحدود تحوي على أربع ثوابت:

$$p_3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (13-2)$$

وتأخذ الصيغتين الآتيتين في كل من العقدتين  $A_1, A_2$ :

$$u_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 \quad (14-2)$$

$$u_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3$$

بتطبيق (12-2) على العلاقتين (14-2)، نجد:

$$u_1 = a_0$$

$$u_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$v_1 = a_1$$

$$v_2 = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

$$(15-2)$$

ونكتب بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\lambda & 3\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\lambda & 3\lambda^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{\lambda^2} & \frac{3}{\lambda^2} & -\frac{2}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{2}{\lambda^3} & -\frac{2}{\lambda^3} & \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = u_1 \\ a_1 = v_1 \\ a_2 = \frac{-3}{\lambda^2}u_1 + \frac{3}{\lambda^2}u_2 - \frac{2}{\lambda}v_1 - \frac{1}{\lambda}v_2 \\ a_3 = \frac{2}{\lambda^3}u_1 - \frac{2}{\lambda^3}u_2 + \frac{1}{\lambda^2}v_1 + \frac{1}{\lambda^2}v_2 \end{cases}$$

نعوض قيم الثوابت في (13-2) فنجد:

$$p_3 = \left(1 - \frac{3}{\lambda^2}x^2 + \frac{2}{\lambda^3}x^3\right)u_1 + \left(\frac{3}{\lambda^2}x^2 - \frac{2}{\lambda^3}x^3\right)u_2 + \left(x - \frac{2}{\lambda}x^2 + \frac{1}{\lambda^2}x^3\right)v_1 + \left(-\frac{1}{\lambda}x^2 + \frac{1}{\lambda}x^3\right)v_2$$

$$p_3 = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3v_1 + N_4v_2$$

حيث :  $N_1, N_2, N_3, N_4$  دوال الشكل .

ب. في الإحداثيات الطبيعية:

## 1. إحدائيات الطول:

كثيرة الحدود في إحدائيات الطول تأخذ الصيغة :

$$P_3 = a_0 L_1^3 + a_1 L_1^2 L_2 + a_2 L_1 L_2^2 + a_3 L_2^3 \quad (16-2)$$

من (12-2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_3}{\partial x} &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 = a_1 + 2a_2 (L_1 x_1 + L_2 x_2) + 3a_3 (L_1 x_1 + L_2 x_2)^2 \\ &= a_1 + 2a_2 \lambda L_2 + 3a_3 \lambda^2 L_2^2 \end{aligned}$$

بتعويض إحدائيات المساحة للعقد في (16-2)، نجد:

$$u_1 = a_0, \quad u_2 = a_3, \quad v_1 = a_1, \quad v_2 = 2\lambda a_2 + 3a_3 \lambda^2 \quad (17-2)$$

تكتب المعادلات (17-2) بالشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 3\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2}\lambda & 0 & \frac{1}{2\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = u_1$$

$$a_1 = v_1$$

$$a_2 = \frac{-3}{2}\lambda u_2 + \frac{1}{2\lambda} v_2 \quad (18-2)$$

$$a_3 = u_2$$

نعوض (18-2) في (16-2) نجد:

$$P_3 = (L_1^3)u_1 + \left(\frac{-3}{2}\lambda L_1^2 L_2 + L_2^3\right)u_2 + (L_1^2 L_2)v_1 + \left(\frac{1}{2\lambda} L_1 L_2^2\right)v_2$$

## 2. الإحدائيات المركزية:

تأخذ مجموعة درجات الحرية الصيغة:

$$\sum = \left\{ u_1 = P(A_1), u_2 = P(A_2), v_1 = \frac{\partial P}{\partial \xi}(A_1), v_2 = \frac{\partial P}{\partial \xi}(A_2) \right\} = 4 \quad (19-2)$$

ومنه فإن كثيرة الحدود بالإحدائيات المركزية وبأربع درجات حرية تأخذ الصيغة:

$$P = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (20-2)$$

بتطبيق درجات الحرية على (20-2) نجد مايلي:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ u_2 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ v_1 &= a_1 - 2a_2 + 3a_3 \\ v_2 &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 \end{aligned} \quad (21-2)$$

تكتب المعادلات (21-2) بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3)u_1 + \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3)u_2 + \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)v_1 + \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)v_2$$

$$\Rightarrow P = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

### 3-4-2. مستقيم بثلاث عقد وثلاث درجات حرية:

أ. الإحداثيات الديكارتية:

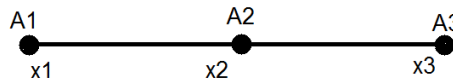
لتكن لدينا العقد  $A_1, A_2, A_3$  ذات الإحداثيات  $x_1, x_2, x_3$  على الترتيب.

وتُعطى درجات الحرية:

$$\sum_k = \{p_2(A_1) = u_1, p_2(A_2) = u_2, p_2(A_3) = u_3\} = 3 \quad (22-2)$$

حيث تُعطى كثيرة الحدود الملائمة لعدد درجات الحرية:

$$p_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (23-2)$$



الشكل (5-2): الإحداثيات الديكارتية للمستقيم بثلاث درجات حرية.

ومنه فإن كثيرة الحدود عند كل عقدة وحسب درجات الحرية تُعطى بالصيغة:

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\
u_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \\
u_3 &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2
\end{aligned} \tag{24-2}$$

تكتب كثيرات الحدود (24-2) بالصيغة المصفوية:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} -x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 & x_1^2 x_3 - x_1 x_3^2 & -x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 \\ x_2^2 - x_3^2 & -x_1^2 + x_3^2 & x_1^2 - x_2^2 \\ -x_2 + x_3 & x_1 - x_3 & -x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

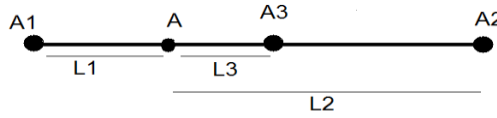
مما سبق نوجد قيم  $a_0, a_1, a_2$ ، ونعوض في (24-2)، فنجد:

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{1}{2\Delta} \left( -x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + (x_2^2 - x_3^2)x + (-x_2 + x_3)x^2 \right) u_1 \\
&+ \frac{1}{2\Delta} \left( x_1^2 x_3 - x_1 x_3^2 + (-x_1^2 + x_3^2)x + (x_1 - x_3)x^2 \right) u_2 + \\
&\frac{1}{2\Delta} \left( -x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)x + (-x_1 + x_2)x^2 \right) u_3 = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3
\end{aligned}$$

حيث:  $2\Delta = -x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 - x_1 x_3^2 - x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$

ب. الإحداثيات الطبيعية:

1. إحداثيات الطول:



الشكل (6-2): إحداثيات الطول للمستقيم بثلاث درجات حرية

حسب درجات الحرية تأخذ كثيرة الحدود الصيغة:

$$P = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 \tag{25-2}$$

بتطبيق درجات الحرية على كثيرة الحدود (25-2)، نجد:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (26-2)$$

نعوض (26-2) في (25-2)، نجد:

$$P = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

## 2. الإحداثيات المركزية :

تأخذ كثيرة الحدود الصيغة :

$$P = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \quad (27-2)$$

نعوض درجات الحرية عند كل عقدة في (27-2)، نجد:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 - a_2 + a_3 \\ u_2 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ u_3 &= a_1 \end{aligned} \quad (28-2)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = u_3 + \left(-\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2\right)\xi + \left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - u_3\right)\xi^2$$

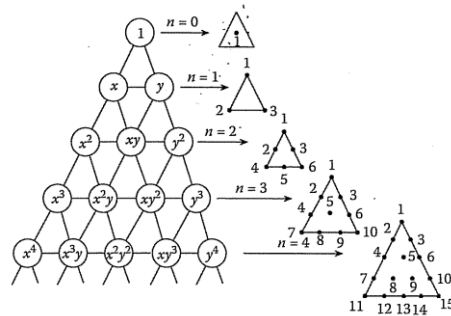
$$\Rightarrow P = \frac{\xi(\xi-1)}{2}u_1 + \frac{\xi(\xi+1)}{2}u_2 + (1-\xi^2)u_3$$

$$\Rightarrow P = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

## 5-2. دوال الشكل في ( 2-D ) :

### 1-5-2. العناصر المثلثية :

تأخذ دوال الشكل في الفضاء ثنائي البعد الأشكال الآتية حسب مثلث باسكال :



الشكل (7-2): مثلث باسكال لكثيرات الحدود في الفضاء ثنائي البعد للمثلثات.

يبين الشكل (7-2) عدد درجات الحرية في كل عنصر مثلثي وما يقابلها من كثيرة حدود.

### 2-5-1-1: المثلث الخطي The linear triangular

أ. الإحداثيات الديكارتية:

عندما  $n = 1$  في الشكل (7-2)، نلاحظ أن المثلث المرافق بثلاث عقد:

$$A_1 = (x_i, y_i), A_2 = (x_j, y_j), A_3 = (x_k, y_k)$$

وبثلاث درجات حرية:

$$\sum_k = \{p(A_1) = u_i, p(A_2) = u_j, p(A_3) = u_k\} = 3 \quad (29-2)$$

نختار كثيرة الحدود الملائمة لعدد درجات الحرية بالصيغة:

$$p = a_1 + a_2x + a_3y \quad (30-2)$$

ويكون عند العقد:

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + a_2x_i + a_3y_i \\ u_j &= a_1 + a_2x_j + a_3y_j \\ u_k &= a_1 + a_2x_k + a_3y_k \end{aligned} \quad (31-2)$$

تكتب بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}$$

نعوض في (30-2) نجد :

$$p = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k$$

حيث:



$$N_i = \frac{1}{2\Delta} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y]$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta} [(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] \quad (32-2)$$

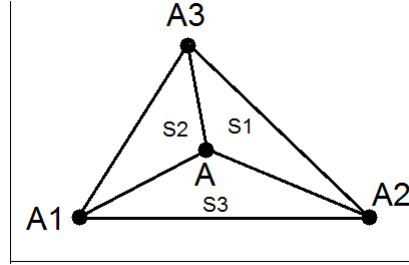
$$N_k = \frac{1}{2\Delta} [(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y]$$

$$2\Delta = (x_i - x_k)(y_j - y_k) - (x_j - x_k)(y_i - y_k)$$

وبنفس الطريقة نوجد دوال الشكل في الإحداثيات الديكارتية لكل من مثلث (ست عقد، عشر عقد، ....)

ب. الإحداثيات الطبيعية :

1. إحداثيات المساحة:



الشكل (2-8): إحداثيات المساحة لمثلث بثلاث درجات حرية.

تُعطى إحداثيات المساحة  $(L_1, L_2, L_3)$  في المثلث بالقوانين الآتية:

$$L_1 = \frac{S_1}{S}, \quad L_2 = \frac{S_2}{S}, \quad L_3 = \frac{S_3}{S}$$

حيث  $S_1, S_2, S_3, S$  مساحة المثلثات  $AA_2A_3, AA_1A_3, AA_1A_2, A_1A_2A_3$  على التوالي.

وتتحقق إحداثيات المساحة:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (a)$$

$$L_i(A_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (b) \quad (33-2)$$

ولما كان عدد درجات الحرية = 3 حسب (2-29)، تُعطى كثيرة الحدود:

$$P = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 \quad (34-2)$$

ومن (2-29)، (33-2) (b)، نجد:

$$u_1 = a_1$$

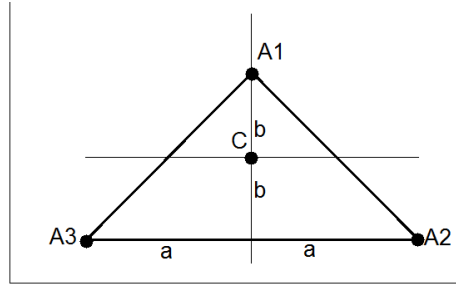
$$u_2 = a_2$$

$$u_3 = a_3$$

بحل المعادلة المصفوفية، نجد:

$$N_1 = L_1, N_2 = L_2, N_3 = L_3$$

## 2. الإحداثيات المركزية :



**الشكل (2-9):** الإحداثيات المركزية لمثلث بثلاث درجات حرية.

لتكن  $C(a,b)$  مركز المثلث، و  $A_1, A_2, A_3$  رؤوس المثلث إحداثياتها الديكارتية على الترتيب  $(a, 2b), (0, 0), (2a, b)$ ، ولتكن  $m$  نقطة ما من المثلث إحداثياتها الديكارتية  $(x, y)$  وتأخذ الإحداثيات المركزية:

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}, \quad \eta = \frac{y - y_c}{b} \quad (35-2)$$

بتعويض الإحداثيات الديكارتية لرؤوس المثلث في (2-35)، نجد الإحداثيات المركزية لها وهي :

$$A_1(\xi = 0, \eta = 1), \quad A_2(\xi = -1, \eta = -1), \quad A_3(\xi = 1, \eta = -1) \quad (36-2)$$

ومن (2-29)، لدينا ثلاث درجات حرية ومنه:

$$P = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta \quad (37-2)$$

بتعويض (2-36) في (2-37)، نجد:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_2 \\ u_2 &= a_0 - a_1 - a_2 \\ u_3 &= a_0 + a_1 - a_2 \end{aligned} \quad (38-2)$$

بحل الجملة (2-38)، نجد:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_3 \\
a_1 &= -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \\
a_2 &= \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{4}u_2 - \frac{1}{4}u_3
\end{aligned} \tag{39-2}$$

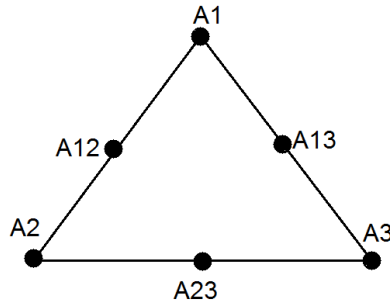
نعوض (39-2) في (37-2)، فنجد:

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta\right)u_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4}\eta\right)u_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4}\eta\right)u_3 \\
&= N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3
\end{aligned}$$

## 2-1-5-2. المثلث التربيعي The quadratic triangular :

في الشكل (7-2) عندما  $n = 2$ ، نلاحظ أن المثلث يمتلك ستة درجات حرية وهي :

$$\sum_k = \left\{ \begin{aligned} p(A_i) &= u_i, 1 \leq i \leq 3 \\ p(A_{ij}) &= u_k, 1 \leq i < j \leq 3, k = 4, 5, 6 \end{aligned} \right\} = 6 \tag{40-2}$$



الشكل (10-2): مثلث بستة عقد.

حيث  $A_1, A_2, A_3, A_{12}, A_{13}, A_{23}$  عقد المثلث (7-2).

أ. في إحداثيات المساحة :

إن إحداثيات المساحة للعقد السابقة تُعطى بالصورة :

$$L_i(A_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad L_i(A_{jk}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = j \text{ or } k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{41-2}$$

وحسب (40-2)، تُعطى كثيرة الحدود في إحداثيات المساحة بالشكل :

$$P = a_1L_1^2 + a_2L_2^2 + a_3L_3^2 + a_4L_1L_2 + a_5L_2L_3 + a_6L_1L_3 \tag{42-2}$$

نعوض (40-2) و (41-2) في (42-2):

$$u_1 = a_1$$

$$u_2 = a_2$$

$$u_3 = a_3$$

$$u_4 = \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_4$$

$$u_5 = \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{4}a_5$$

$$u_6 = \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{4}a_6$$

والتي نكتب بالشكل المصفوفي:

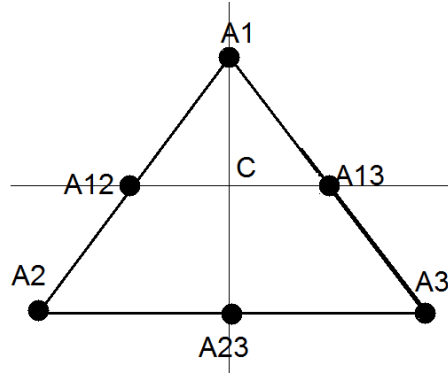
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_2 = u_2 \\ a_3 = u_3 \\ a_4 = -u_1 - u_2 + 4u_4 \\ a_5 = -u_2 - u_3 + 4u_5 \\ a_6 = -u_1 - u_3 + 4u_6 \end{cases}$$

بالتعويض في (42-2) نجد :

$$\begin{aligned} P &= L_1(L_1 - L_2 - L_3)u_1 + L_2(L_2 - L_1 - L_3)u_2 + L_3(L_3 - L_1 - L_2)u_3 + 4L_1L_2u_4 + 4L_2L_3u_5 + 4L_1L_3u_6 \\ &= L_1(2L_1 - 1)u_1 + L_2(2L_2 - 1)u_2 + L_3(2L_3 - 1)u_3 + 4L_1L_2u_4 + 4L_2L_3u_5 + 4L_1L_3u_6 \\ &= N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 + N_5u_5 + N_6u_6 \end{aligned}$$

ب. الإحداثيات المركزية:



الشكل (11-2): الإحداثيات المركزية لمثلث بستة عقد.

لتكن  $A_1, A_2, A_3, A_{12}, A_{13}, A_{23}$  عقد في المثلث، إحداثياتها الديكارتية على الترتيب:

$$(a, 2b), (0, 0), (2a, 0), \left(\frac{a}{2}, b\right), \left(\frac{3a}{2}, b\right), (a, 0) \quad (43-2)$$

وحسب (40-2)، تُعطى كثرة الحدود بالإحداثيات المركزية بالصيغة:

$$P = a_1 + a_2\zeta + a_3\eta + a_4\zeta^2 + a_5\zeta\eta + a_6\eta^2 \quad (44-2)$$

وبتعويض (43-2) في (35-2) نجد أن الإحداثيات المركزية للعقد هي على الترتيب:

$$(0, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 0), (1, 0), (0, -1) \quad (45-2)$$

نعوض (45-2) في (44-2) مع مراعاة (40-2)، فنجد جملة المعادلات :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{-1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}u_5 + u_6 \\ a_2 = -\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}u_5 \\ a_3 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_6 \\ a_4 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 - u_6 \\ a_5 = \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}u_5 \\ a_6 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{2}u_5 - \frac{1}{2}u_6 \end{cases}$$

وبالتعويض في (2-44) نجد :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta^2\right)u_1 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{2}\eta^2\right)u_2 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{2}\eta^2\right)u_3 \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{2}\eta^2\right)u_4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{2}\eta^2\right)u_5 + \left(1 - \frac{1}{2}\eta - \xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right)u_6 \\ &= N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 + N_5u_5 + N_6u_6 \end{aligned}$$

**3-1-5-2. المثلث التكعيبي The cubic triangular**

**1-3-1-5-2. مثلث بعشرة عقد:**

تُعطى درجات الحرية في هذه الحالة بالصيغة:

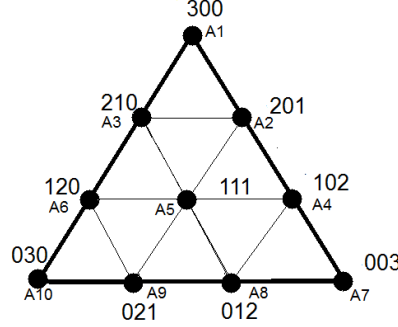
$$\sum = \{P(A_i) = u_i ; 1 \leq i \leq 10\} = 10 \quad (2-46)$$

تأخذ كثيرة الحدود في الإحداثيات الديكارتية الصيغة:

$$P_3 = a_1 + a_2x^3 + a_3y^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6xy + a_7x^2 + a_8y^2 + a_9x + a_{10}y \quad (47-2)$$

أ. إحداثيات المساحة :

ليكن لدينا الشكل :



الشكل (12-2): إحداثيات المساحة لمتلث بعشر درجات حرية.

كثيرة الحدود بإحداثيات المساحة تُعطى بالصيغة:

$$P = a_1L_1^3 + a_2L_1^2L_2 + a_3L_1^2L_3 + a_4L_1L_2^2 + a_5L_1L_2L_3 + a_6L_3^2L_1 + a_7L_2^3 + a_8L_2^2L_3 + a_9L_3^2L_2 + a_{10}L_3^3 \quad (48-2)$$

و تُعطى الإحداثيات الطبيعية  $L_1, L_2, L_3$  عند العقدة  $A_{ijk}$ :

$$(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) \quad (49-2)$$

حيث  $n = 3$  درجة كثيرة الحدود (48-2)، ومنه حسب التقييم المرافق لكل عقدة في الشكل (12-2) و حسب العلاقة (49-2)، نجد أن إحداثيات المساحة لكل عقدة هي :

$$\begin{aligned} A_{300} &= (1, 0, 0) & A_{102} &= \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) & A_{030} &= (0, 1, 0) \\ A_{201} &= \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) & A_{120} &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) & A_{021} &= \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ A_{210} &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) & A_{111} &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) & A_{012} &= \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ A_{003} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (50-2)$$

نعوض (50-2) في (48-2) مع مراعاة (47-2) فنجد:

$$u_1 = a_1$$

$$u_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) a_3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) a_6 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 a_{10}$$

$$u_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) a_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) a_4 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 a_7$$

$$u_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 a_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) a_3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) a_6 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_{10}$$

$$u_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10})$$

$$u_6 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 a_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) a_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) a_4 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_7$$

$$u_7 = a_{10}$$

$$u_8 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 a_7 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) a_8 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) a_9 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_{10}$$

$$u_9 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_7 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) a_8 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) a_9 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 a_{10}$$

$$u_{10} = a_7$$

والتي تكتب بالشكل :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{27} & 0 & \frac{4}{27} & 0 & 0 & \frac{2}{27} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} \\ \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & 0 & \frac{2}{27} & 0 & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{27} & 0 & \frac{2}{27} & 0 & 0 & \frac{4}{27} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & 0 & \frac{4}{27} & 0 & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-5}{2} & 0 & 9 & 0 & 0 & \frac{-9}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-5}{2} & 9 & 0 & \frac{-9}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-9}{2} & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{2} \\ 2 & \frac{-9}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{-9}{2} & 27 & \frac{-9}{2} & 2 & \frac{-9}{2} & \frac{-9}{2} & 2 \\ 1 & \frac{-9}{2} & 0 & 9 & 0 & 0 & \frac{-5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{2} & 9 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{2} & 9 & \frac{-9}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} P = & \left( L_1^3 - \frac{5}{2} L_1^2 L_2 - \frac{5}{2} L_1^2 L_3 + L_1 L_2^2 + 2 L_1 L_2 L_3 + L_1 L_3^2 \right) u_1 + \left( 9 L_1^2 L_3 - \frac{9}{2} L_1 L_2 L_3 - \frac{9}{2} L_1 L_3^2 \right) u_2 \\ & + \left( 9 L_1^2 L_2 - \frac{9}{2} L_1 L_2 L_3 - \frac{9}{2} L_1 L_2^2 \right) u_3 + \left( 9 L_3^2 L_1 - \frac{9}{2} L_1 L_2 L_3 - \frac{9}{2} L_3 L_1^2 \right) u_4 + (27 L_1 L_2 L_3) u_5 \\ & + \left( 9 L_2^2 L_1 - \frac{9}{2} L_1 L_2 L_3 - \frac{9}{2} L_2 L_1^2 \right) u_6 + \left( L_3^3 - \frac{5}{2} L_3^2 L_2 - \frac{5}{2} L_3^2 L_1 + L_3 L_2^2 + 2 L_1 L_2 L_3 + L_3 L_1^2 \right) u_7 \\ & + \left( 9 L_3^2 L_2 - \frac{9}{2} L_1 L_2 L_3 - \frac{9}{2} L_3 L_2^2 \right) u_8 + \left( 9 L_2^2 L_3 - \frac{9}{2} L_1 L_2 L_3 - \frac{9}{2} L_2 L_3^2 \right) u_9 \\ & + \left( L_2^3 - \frac{5}{2} L_2^2 L_1 - \frac{5}{2} L_2^2 L_3 + L_2 L_1^2 + 2 L_1 L_2 L_3 + L_2 L_3^2 \right) u_{10} \end{aligned}$$

بالإصلاح نجد :

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{2} L_1 (3L_1 - 1)(3L_1 - 2) u_1 + \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_1 - 1) u_2 + \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1) u_3 + \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_3 - 1) u_4 \\ & + (27 L_1 L_2 L_3) u_5 + \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1) u_6 + \frac{1}{2} L_3 (3L_3 - 1)(3L_3 - 2) u_7 + \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1) u_8 \\ & + \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_2 - 1) u_9 + \frac{1}{2} L_2 (3L_2 - 1)(3L_2 - 2) u_{10} \end{aligned}$$

ب. الإحداثيات المركزية :

حسب الشكل الموضح في (2-12)، وحسب العلاقة (2-47)، تُعطى كثيرة الحدود في الإحداثيات المركزية:

$$P = a_1 + a_2\xi^3 + a_3\xi^2\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi + a_6\xi\eta + a_7\eta + a_8\eta^2 + a_9\xi\eta^2 + a_{10}\eta^3 \quad (51-2)$$

ولنفرض أن الإحداثيات الديكارتية لكل من العقد  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$  هي على الترتيب:

$$(a, 2b), (\frac{4a}{3}, \frac{4b}{3}), (\frac{2a}{3}, \frac{4b}{3}), (\frac{5a}{3}, \frac{2b}{3}), (a, \frac{2b}{3}), (\frac{a}{3}, \frac{2b}{3}), (2a, 0), (\frac{4a}{3}, 0), (\frac{2a}{3}, 0), (0, 0)$$

ولتكن  $C = (x_c, y_c) = (a, b)$  مركز المثلث، ومنه فإن الإحداثيات المركزية للعقد السابقة توجد

$$\text{بالتعويض في: } \eta = \frac{y - y_c}{b}, \quad \xi = \frac{x - x_c}{a} \quad \text{نجد:}$$

$$\begin{aligned} &(0, 1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}), (0, \frac{-1}{3}), \\ &(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}), (1, -1), (\frac{1}{3}, -1), (\frac{-1}{3}, -1), (-1, -1) \end{aligned} \quad (52-2)$$

نعوض (52-2) في (51-2)، نجد:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_7 + a_8 + a_{10} \\ u_2 &= a_1 + \frac{1}{27}a_2 + \frac{1}{27}a_3 + \frac{1}{9}a_4 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{1}{9}a_6 + \frac{1}{3}a_7 + \frac{1}{9}a_8 + \frac{1}{27}a_9 + \frac{1}{27}a_{10} \\ u_3 &= a_1 - \frac{1}{27}a_2 + \frac{1}{27}a_3 + \frac{1}{9}a_4 - \frac{1}{3}a_5 - \frac{1}{9}a_6 + \frac{1}{3}a_7 + \frac{1}{9}a_8 - \frac{1}{27}a_9 + \frac{1}{27}a_{10} \\ u_4 &= a_1 + \frac{8}{27}a_2 - \frac{4}{27}a_3 + \frac{4}{9}a_4 + \frac{2}{3}a_5 - \frac{2}{9}a_6 - \frac{1}{3}a_7 + \frac{1}{9}a_8 - \frac{2}{27}a_9 - \frac{1}{27}a_{10} \\ u_5 &= a_1 - \frac{1}{3}a_7 + \frac{1}{9}a_8 + \frac{1}{27}a_{10} \\ u_6 &= a_1 - \frac{8}{27}a_2 - \frac{4}{27}a_3 + \frac{4}{9}a_4 - \frac{2}{3}a_5 + \frac{2}{9}a_6 - \frac{1}{3}a_7 + \frac{1}{9}a_8 + \frac{2}{27}a_9 - \frac{1}{27}a_{10} \\ u_7 &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 + a_9 - a_{10} \\ u_8 &= a_1 + \frac{1}{27}a_2 - \frac{1}{9}a_3 + \frac{1}{9}a_4 + \frac{1}{3}a_5 - \frac{1}{3}a_6 - a_7 + a_8 + \frac{1}{3}a_9 - a_{10} \\ u_9 &= a_1 - \frac{1}{27}a_2 - \frac{1}{9}a_3 + \frac{1}{9}a_4 - \frac{1}{3}a_5 + \frac{1}{3}a_6 - a_7 + a_8 - \frac{1}{3}a_9 - a_{10} \\ u_{10} &= a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 - a_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{-1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{27} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{8}{27} & \frac{-4}{27} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{27} & \frac{-1}{27} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{-8}{27} & \frac{-4}{27} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{27} & \frac{-1}{27} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{27} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & \frac{-1}{27} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 1 & \frac{-1}{3} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-13}{136} & \frac{45}{136} & \frac{45}{136} & \frac{-45}{272} & \frac{27}{34} & \frac{-45}{272} & \frac{47}{1088} & \frac{-63}{1088} & \frac{-63}{1088} & \frac{47}{1088} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{16} & \frac{-27}{16} & \frac{27}{16} & \frac{-9}{16} \\ \frac{9}{68} & \frac{-27}{136} & \frac{-27}{136} & \frac{243}{136} & \frac{-54}{17} & \frac{243}{136} & \frac{-117}{136} & \frac{27}{34} & \frac{27}{34} & \frac{-117}{136} \\ \frac{9}{68} & \frac{-27}{136} & \frac{-27}{136} & \frac{243}{136} & \frac{-54}{17} & \frac{243}{136} & \frac{-81}{272} & \frac{63}{272} & \frac{63}{272} & \frac{-81}{272} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{-3}{8} & \frac{-5}{32} & \frac{15}{32} & \frac{-15}{32} & \frac{5}{32} \\ 0 & \frac{15}{8} & \frac{-15}{8} & \frac{-3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{16} & \frac{-15}{16} & \frac{15}{16} & \frac{-3}{16} \\ \frac{-1}{34} & \frac{27}{34} & \frac{27}{34} & \frac{-27}{68} & \frac{-27}{34} & \frac{-27}{68} & \frac{53}{544} & \frac{-45}{544} & \frac{-45}{544} & \frac{53}{544} \\ \frac{81}{136} & \frac{-45}{136} & \frac{-45}{136} & \frac{45}{272} & \frac{-27}{34} & \frac{45}{272} & \frac{-81}{1088} & \frac{369}{1088} & \frac{369}{1088} & \frac{-81}{1088} \\ 0 & \frac{9}{8} & \frac{-9}{8} & \frac{-9}{8} & 0 & \frac{9}{8} & \frac{9}{32} & \frac{9}{32} & \frac{-9}{32} & \frac{-9}{32} \\ \frac{9}{17} & \frac{-27}{34} & \frac{-27}{34} & \frac{27}{68} & \frac{27}{34} & \frac{27}{68} & \frac{-9}{136} & \frac{-27}{136} & \frac{-27}{136} & \frac{-9}{136} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix}$$

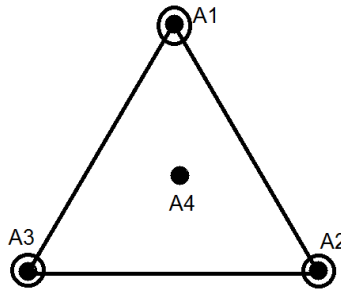
بإيجاد قيم الثوابت والتعويض في (2-51) نجد :

$$\begin{aligned}
P_3 = & \left( \frac{-13}{136} + \frac{9}{68} \xi^2 \eta + \frac{9}{68} \xi^2 - \frac{1}{34} \eta + \frac{81}{136} \eta^2 + \frac{9}{17} \eta^3 \right) u_1 \\
& + \left( \frac{45}{136} - \frac{27}{136} \xi^2 \eta - \frac{27}{136} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{15}{8} \xi \eta + \frac{27}{34} \eta - \frac{45}{136} \eta^2 + \frac{9}{8} \xi \eta^2 - \frac{27}{34} \eta^3 \right) u_2 \\
& + \left( \frac{45}{136} - \frac{27}{136} \xi^2 \eta - \frac{27}{136} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi - \frac{15}{8} \xi \eta + \frac{27}{34} \eta - \frac{45}{136} \eta^2 - \frac{9}{8} \xi \eta^2 - \frac{27}{34} \eta^3 \right) u_3 \\
& + \left( -\frac{45}{272} + \frac{243}{136} \xi^2 \eta + \frac{243}{136} \xi^2 + \frac{3}{8} \xi - \frac{3}{4} \xi \eta - \frac{27}{68} \eta + \frac{45}{272} \eta^2 - \frac{9}{8} \xi \eta^2 + \frac{27}{68} \eta^3 \right) u_4 \\
& + \left( \frac{27}{34} - \frac{54}{17} \xi^2 \eta - \frac{54}{17} \xi^2 - \frac{27}{34} \eta - \frac{27}{34} \eta^2 + \frac{27}{34} \eta^3 \right) u_5 \\
& + \left( -\frac{45}{272} + \frac{243}{136} \xi^2 \eta + \frac{243}{136} \xi^2 - \frac{3}{8} \xi + \frac{3}{4} \xi \eta - \frac{27}{68} \eta + \frac{45}{272} \eta^2 + \frac{9}{8} \xi \eta^2 + \frac{27}{68} \eta^3 \right) u_6 \\
& + \left( \frac{47}{1088} + \frac{9}{16} \xi^3 - \frac{117}{136} \xi^2 \eta - \frac{81}{272} \xi^2 - \frac{5}{32} \xi + \frac{3}{16} \xi \eta + \frac{53}{544} \eta - \frac{81}{1088} \eta^2 + \frac{9}{32} \xi \eta^2 - \frac{9}{136} \eta^3 \right) u_7 \\
& + \left( \frac{-63}{1088} - \frac{27}{16} \xi^3 + \frac{27}{34} \xi^2 \eta + \frac{63}{272} \xi^2 + \frac{15}{32} \xi - \frac{15}{16} \xi \eta - \frac{45}{544} \eta + \frac{369}{1088} \eta^2 + \frac{9}{32} \xi \eta^2 - \frac{27}{136} \eta^3 \right) u_8 \\
& + \left( \frac{47}{1088} - \frac{9}{16} \xi^3 - \frac{117}{136} \xi^2 \eta - \frac{81}{272} \xi^2 + \frac{5}{32} \xi - \frac{3}{16} \xi \eta + \frac{53}{544} \eta - \frac{81}{1088} \eta^2 - \frac{9}{32} \xi \eta^2 - \frac{9}{136} \eta^3 \right) u_9 \\
& + \left( \frac{47}{1088} - \frac{9}{16} \xi^3 - \frac{117}{136} \xi^2 \eta - \frac{81}{272} \xi^2 + \frac{5}{32} \xi - \frac{3}{16} \xi \eta + \frac{53}{544} \eta - \frac{81}{1088} \eta^2 - \frac{9}{32} \xi \eta^2 - \frac{9}{136} \eta^3 \right) u_{10}
\end{aligned}$$

**2-3-1-5-2. مثلث بأربع عقد:**

ليكن لدينا المثلث في الشكل (2-13)، ومن الملاحظ أن عدد درجات الحرية له = 10 وذلك لان:

$$\sum = \left\{ \begin{array}{l} P(A_i) = u_i ; i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\partial P}{\partial x}(A_j) = v_j ; j = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(A_k) = w_k ; k = 1, 2, 3 \end{array} \right\} = 10 \quad (53-2)$$



**الشكل (2-13):** الإحداثيات الديكارتية لمثلث بعشر درجات حرية.

تُعطى كثيرة الحدود في الإحداثيات الديكارتية بالعلاقة (2-47).

أ. في إحداثيات المساحة:

تُعطى كثيرة الحدود في إحداثيات المساحة بالصيغة:

$$P_3 = a_1 L_1^3 + a_2 L_2^3 + a_3 L_3^3 + a_4 L_1^2 L_2 + a_5 L_1^3 L_3 + a_6 L_1 L_2^2 + a_7 L_1 L_3^2 + a_8 L_2^2 L_3 + a_9 L_2 L_3^2 + a_{10} L_1 L_2 L_3 \quad (54-2)$$

باشتقاق (47-2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_3}{\partial x} &= 3a_1 x^2 + 2a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 y + 2a_7 x + a_9 \\ \frac{\partial P_3}{\partial y} &= 3a_3 y^2 + a_4 x^2 + 2a_5 xy + a_6 x + 2a_8 y + a_{10} \end{aligned} \quad (55-2)$$

ولما كان :

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \end{aligned} \quad (56-2)$$

نعوض (56-2) في (55-2)، نجد :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_3}{\partial x} &= 3a_1 (L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3)^2 + 2a_4 (L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3)(L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3) \\ &+ a_5 (L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3)^2 + a_6 (L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3) + 2a_7 (L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3) + a_9 \\ \frac{\partial P_3}{\partial y} &= 3a_3 (L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3)^2 + a_4 (L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3)^2 + 2a_5 (L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3) \\ &+ (L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3) + a_6 (L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3) + 2a_8 (L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3) + a_{10} \end{aligned} \quad (57-2)$$

ونعلم أن إحداثيات المساحة للعقد الموجودة بالشكل (13-2):

$$A_1 = (1, 0, 0), A_2 = (0, 1, 0), A_3 = (0, 0, 1), A_4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (58-2)$$

نعوض (58-2) في (57-2) و (56-2) :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 \\ u_2 &= a_2 \\ u_3 &= a_3 \\ u_4 &= \frac{1}{27}(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= 3x_1^2 a_1 + 2a_4 x_1 y_1 + a_5 y_1^2 + y_1 a_6 + 2x_1 a_7 + a_9 \\
v_2 &= 3x_2^2 a_1 + 2a_4 x_2 y_2 + a_5 y_2^2 + y_2 a_6 + 2x_2 a_7 + a_9 \\
v_3 &= 3x_3^2 a_1 + 2a_4 x_3 y_3 + a_5 y_3^2 + y_3 a_6 + 2x_3 a_7 + a_9 \\
w_1 &= 3y_1^2 a_3 + x_1^2 a_4 + 2x_1 y_1 a_5 + x_1 a_6 + 2y_1 a_8 + a_{10} \\
w_2 &= 3y_2^2 a_3 + x_2^2 a_4 + 2x_2 y_2 a_5 + x_2 a_6 + 2y_2 a_8 + a_{10} \\
w_3 &= 3y_3^2 a_3 + x_3^2 a_4 + 2x_3 y_3 a_5 + x_3 a_6 + 2y_3 a_8 + a_{10}
\end{aligned}$$

والتي تكتب بالشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \\ 3x_1^2 & 0 & 0 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & y_1 & 2x_1 & 0 & 1 & 0 \\ 3x_2^2 & 0 & 0 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & y_2 & 2x_2 & 0 & 1 & 0 \\ 3x_3^2 & 0 & 0 & 2x_3 y_3 & y_3^2 & y_3 & 2x_3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3y_1^2 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & x_1 & 0 & 2y_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3y_2^2 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & x_2 & 0 & 2y_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3y_3^2 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & x_3 & 0 & 2y_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix}$$

ونظراً لأن عناصر مقلوب المصفوفة السابقة عبارة عن مجاميع كبيرة جداً، سنأخذ للسهولة الإحداثيات

الديكارتية الآتية :  $A_1 = (1, 2)$  ,  $A_2 = (2, 0)$  ,  $A_3 = (0, 0)$  ,  $A_4 = (1, 1)$  فنجد :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -36 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & 72 & 0 & -\frac{2}{3} & -2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{17}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & -9 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{24} & \frac{3}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

نعوض قيم الثوابت في (2-54)، نجد :

$$\begin{aligned} P_3 = & \left( L_1^3 - \frac{8}{3} L_1^2 L_2 + \frac{3}{4} L_1^3 L_3 + \frac{16}{3} L_1 L_2^2 - 3 L_1 L_3^3 - \frac{17}{12} L_2^2 L_3 \right) u_1 + \left( L_2^3 + \frac{4}{3} L_1^2 L_2 - \frac{8}{3} L_1 L_2^2 + \frac{1}{3} L_2^2 L_3 \right) u_2 \\ & + \left( L_3^3 - \frac{8}{3} L_1^2 L_2 + \frac{16}{3} L_1 L_2^2 - \frac{11}{3} L_2^2 L_3 \right) u_3 + \left( -36 L_1^2 L_2 + \frac{1}{4} L_1^3 L_3 + 72 L_1 L_2^2 - 9 L_2^2 L_3 \right) u_4 \\ & + \left( \frac{1}{4} L_1^2 L_2 - \frac{1}{4} L_2^2 L_3 \right) v_1 + \left( \frac{1}{3} L_1^2 L_2 - \frac{1}{8} L_1^3 L_3 - \frac{2}{3} L_1 L_2^2 + \frac{1}{4} L_1 L_3^3 + \frac{5}{24} L_2^2 L_3 \right) v_2 \\ & + \left( L_1^2 L_2 - \frac{1}{8} L_1^3 L_3 - 2 L_1 L_2^2 - \frac{1}{4} L_1 L_3^3 + \frac{3}{8} L_2^2 L_3 + L_2 L_3^2 \right) v_3 + \left( \frac{1}{3} L_1^2 L_2 - \frac{2}{3} L_1 L_2^2 + \frac{1}{3} L_2^2 L_3 \right) w_1 \\ & + \left( \frac{1}{2} L_1^2 L_2 - \frac{1}{4} L_1^3 L_3 - \frac{1}{2} L_1 L_2^2 + \frac{1}{4} L_2^2 L_3 \right) w_2 + \left( \frac{1}{2} L_1^2 L_2 + \frac{1}{4} L_1^3 L_3 - \frac{3}{2} L_1 L_2^2 - \frac{1}{4} L_2^2 L_3 + L_1 L_2 L_3 \right) w_3 \end{aligned}$$

ب. في الإحداثيات المركزية :

لما كان عدد درجات الحرية = 10، يمكن كتابة درجات الحرية في الإحداثيات المركزية بالصيغة:

$$\sum = \left\{ \begin{array}{l} P(A_i) = u_i ; i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\partial P}{\partial \xi}(A_j) = v_j ; j = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial P}{\partial \eta}(A_k) = w_k ; k = 1, 2, 3 \end{array} \right\} = 10 \quad (59-2)$$

علماً أن كثيرة الحدود في الإحداثيات المركزية هي (2-51)، ومشتقاتها:



$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial \xi} &= 3\xi^2 a_2 + 2\xi \eta a_3 + 2\xi a_4 + a_5 + \eta a_6 + \eta^2 a_9 \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} &= \xi^2 a_3 + \xi a_6 + a_7 + 2a_8 \eta + 2\xi \eta a_9 + 3\eta^2 a_{10}\end{aligned}\quad (60-2)$$

والإحداثيات الديكارتية للعقد في الشكل (2-13) هي:

$$A_1 = (a, 2b), A_2 = (2a, 0), A_3 = (0, 0), A_4 = (a, b) \quad (61-2)$$

نعوض (61-2) في (2-53)، نجد:

$$A_1 = (0, 1), A_2 = (1, -1), A_3 = (-1, -1), A_4 = (0, 0) \quad (62-2)$$

نعوض (62-2) في (2-51) و (2-60) مع مراعاة (2-59):

$$\begin{aligned}u_1 &= a_1 + a_7 + a_8 + a_{10} \\ u_2 &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 + a_9 - a_{10} \\ u_3 &= a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 - a_{10} \\ u_4 &= a_1 \\ v_1 &= a_5 + a_6 + a_9 \\ v_2 &= 3a_2 - 2a_3 + 2a_4 + a_5 - a_6 + a_9 \\ v_3 &= 3a_2 + 2a_3 - 2a_4 + a_5 - a_6 + a_9 \\ w_1 &= a_7 + 2a_8 + 3a_{10} \\ w_2 &= a_3 + a_6 + a_7 - 2a_8 - 2a_9 + 3a_{10} \\ w_3 &= a_3 - a_6 + a_7 - 2a_8 + 2a_9 + 3a_{10}\end{aligned}$$

والتي تكتب بالشكل:

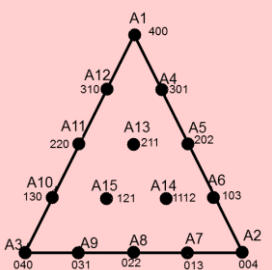
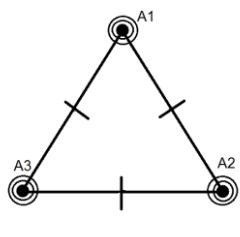
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{-9}{16} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{16} & \frac{-3}{16} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{-3}{8} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} & -1 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{16} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} & 1 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

نوجد قيم الثوابت ونعوض في (2-51)، نجد :

$$\begin{aligned} P_3 = & \left( 2\xi^2\eta + 2\xi^2 + \frac{5}{4}\eta + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{4}\eta^3 \right) u_1 + \left( -\frac{1}{4}\xi^3 + \xi^2\eta + \xi^2 + \frac{9}{16}\xi - \frac{3}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{3}{16}\xi\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^3 \right) u_2 \\ & + \left( \frac{1}{4}\xi^3 + \xi^2\eta + \xi^2 - \frac{9}{16}\xi + \frac{3}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{3}{16}\xi\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^3 \right) u_3 + (1 - 4\xi^2\eta - 4\xi^2 - \eta - \eta^2 + \eta^3) u_4 \\ & + \left( \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 \right) v_1 + \left( \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{3}{16}\xi + \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{16}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{16}\xi\eta^2 + \frac{1}{16}\eta^3 \right) v_2 \\ & + \left( \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{3}{16}\xi + \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{16}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{16}\xi\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^3 \right) v_3 + \left( -\xi^2\eta - \xi^2 - \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3 \right) w_1 \\ & + \left( \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi\eta^2 \right) w_2 + \left( \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi\eta^2 \right) w_3 \end{aligned}$$

وليكن لدينا الجدول الآتي :

العنصر	الشكل	درجات الحرية	درجة كثيرة الحدود
المثلث رباعي الدرجة quartic triangular		$\sum = \{P_4(A_i) = u_i ; i = 1, \dots, 10\} = 10$	$P_4$
المثلث خماسي الدرجة quintic triangular		$\sum = \left\{ \begin{array}{l} P_5(A_i) = u_i ; i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial P_5}{\partial x}(A_i) = v_i, \frac{\partial P_5}{\partial y}(A_i) = w_i \\ \frac{\partial^2 P_5}{\partial x^2}(A_i) = s_i, \frac{\partial^2 P_5}{\partial y^2}(A_i) = q_i \\ \frac{dP_5}{dx}(A_i) = p_i, \frac{dP_5}{dy}(A_i) = k_i \end{array} \right\} = 21$	$P_5$

الجدول (1-2): بعض العناصر المثلثية بدرجات حرية مختلفة.

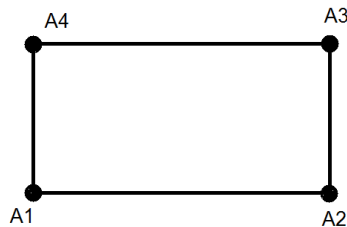
2-5-2. العناصر المستطيلة :

1-2-5-2. المستطيل الخطي The linear rectangular :

$$\sum = \{Q(A_i) = u_i ; i = 1, 2, 3, 4\} = 4 \quad (63-2)$$

أ. في الإحداثيات الديكارتية:

ليكن لدينا الشكل:



الشكل (14-2): مستطيل بأربع درجات حرية.

حيث  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$  الإحداثيات الديكارتية للعقد  $A_1, A_2, A_3, A_4$ .

حسب (2-63) تُعطى كثيرة الحدود بالإحداثيات الديكارتية بالصيغة:

$$Q = a_1 + a_2x + a_3xy + a_4y \quad (2-64)$$

بتعويض إحداثيات العقد في (2-64) مع مراعاة (2-63)، نجد :

$$u_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1y_1 + a_4y_1 \quad (2-65)$$

$$u_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3x_2y_2 + a_4y_2 \quad (2-66)$$

$$u_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3x_3y_3 + a_4y_3 \quad (2-67)$$

$$u_4 = a_1 + a_2x_4 + a_3x_4y_4 + a_4y_4 \quad (2-68)$$

سنوجد القيم العددية  $a_1, a_2, a_3, a_4$  بالطريقة الآتية:

ب طرح (2-68) من (2-65)، نجد :

$$a_3(y_1 - y_4) + a_4(y_1 - y_4)x_1 = u_1 - u_4 \quad (2-69)$$

وبطرح (2-67) من (2-66)، نجد:

$$a_3(y_1 - y_4) + a_4(y_1 - y_4)x_2 = u_2 - u_3 \quad (2-70)$$

وبطرح (2-70) من (2-69)، نجد :

$$a_4 = \frac{u_1 - u_4 - u_2 + u_3}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_4)} \quad (2-71)$$

وعليه فإن :

$$a_3 = \frac{u_1 - u_4}{(y_1 - y_4)} - a_4x_1 \quad (2-72)$$

وبطرح (2-66) من (2-65)، نجد :

$$a_2(x_1 - x_2) + a_4(x_1 - x_2)y_1 = u_1 - u_2$$

ومنه نجد:

$$a_2 = \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} - a_4 y_1 \quad (73-2)$$

ومن المعادلة (67-2)، نجد:

$$a_1 = u_1 - a_2 x_1 - a_3 y_1 - a_4 x_1 y_1 \quad (74-2)$$

نعوض (71-2)، (72-2)، (73-2)، (74-2) في (64-2)، فنجد:

$$Q = \frac{(x - x_2)(y - y_4)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_4)} u_1 + \frac{(x - x_1)(y - y_4)}{(x_2 - x_1)(y_1 - y_4)} u_2 + \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_4 - y_1)} u_3 + \frac{(x - x_2)(y - y_1)}{(x_1 - x_2)(y_4 - y_1)} u_4$$

حيث:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x - x_2)(y - y_4)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_4)} & N_2 &= \frac{(x - x_1)(y - y_4)}{(x_2 - x_1)(y_1 - y_4)} \\ N_3 &= \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_4 - y_1)} & N_4 &= \frac{(x - x_2)(y - y_1)}{(x_1 - x_2)(y_4 - y_1)} \end{aligned} \quad (75-2)$$

ب. في إحداثيات المساحة :

لتكن  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  إحداثيات المساحة التي تحقق :

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 + L_3 + L_4 &= 1 \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 &= x \\ L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 &= y \end{aligned}$$

وتكون إحداثيات المساحة لكل عقدة  $A_1, A_2, A_3, A_4$  هي على الترتيب :

$$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \quad (76-2)$$

وحسب (63-2)، تُعطى كثيرة الحدود بالصيغة :

$$Q = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + a_4 L_4 \quad (77-2)$$

بتعويض (76-2) في (77-2) مع مراعاة (63-2) وإيجاد قيم الثوابت  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ، نجد :

$$Q = u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3 + u_4 L_4$$

د. في الإحداثيات المركزية :

لتكن  $C(x_c, y_c) = (a, b)$  مركز المستطيل، و لتكن  $(0, 0), (2a, 0), (2a, 2b), (0, 2b)$  الإحداثيات الديكارتية للعقد  $A_1, A_2, A_3, A_4$ ، وحسب تعريف الإحداثيات المركزية:

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad , \quad \eta = \frac{y - y_c}{b} \quad (78-2)$$

وبتعويض الإحداثيات الديكارتية في (78-2)، نجد أن الإحداثيات المركزية للعقد السابقة :

$$(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1) \quad (79-2)$$

نعوض (79-2) في كثيرة الحدود :

$$Q = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

فنجد :

$$u_1 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4$$

$$u_2 = a_1 + a_2 - a_3 - a_4$$

$$u_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$u_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

والتي تكتب بالشكل :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

بإيجاد قيم الثوابت  $a_1, a_2, a_3, a_4$  والتعويض في كثيرة الحدود، نجد:

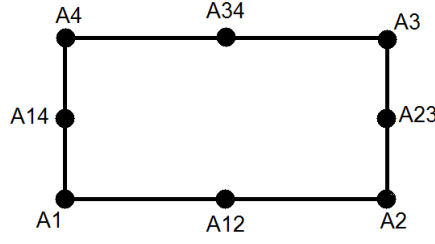
$$Q = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}u_1 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}u_2 + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}u_3 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}u_4$$

حيث:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned} \quad (80-2)$$

**2-2-5-2. المستطيل التربيعي The quadratic rectangular:**

أ. في إحداثيات المساحة :



الشكل (2-15): مستطيل بثمان عقد.

تُعطى درجات الحرية بالصيغة:

$$\sum = \left\{ \begin{array}{l} Q(A_i) = u_i ; i = 1, 2, 3, 4 \\ Q(A_{ij}) = v_i ; i, j = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\} = 8 \quad (81-2)$$

وتكون إحداثيات المساحة لكل عقدة حسب (2-41):

$$\begin{aligned} A_1 &= (1, 0, 0, 0) \quad , A_3 = (0, 0, 1, 0) \quad , A_{14} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right) \quad , A_{23} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ A_{12} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) \quad , A_{34} = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad , A_4 = (0, 0, 0, 1) \quad , A_2 = (0, 1, 0, 0) \end{aligned} \quad (82-2)$$

وتكون كثيرة الحدود بإحداثيات المساحة بالصيغة:

$$Q = a_1 L_1^2 + a_2 L_2^2 + a_3 L_3^2 + a_4 L_4^2 + a_5 L_1 L_2 + a_6 L_2 L_3 + a_7 L_3 L_4 + a_8 L_1 L_4 \quad (83-2)$$

بتعويض (82-2) في (83-2) مع مراعاة (2-81)، نجد:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 \quad , \quad v_1 = \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_5 \quad , \quad u_2 = a_2 \quad , \quad v_2 = \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{4}a_6 \\ u_3 &= a_3 \quad , \quad v_3 = \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{4}a_4 + \frac{1}{4}a_7 \quad , \quad u_4 = a_4 \quad , \quad v_4 = \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_4 + \frac{1}{4}a_8 \end{aligned}$$

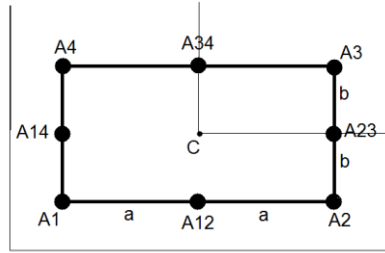
والتي تكتب بالشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

بإيجاد الثوابت والتعويض في (2-83)، نجد :

$$Q = L_1(L_1 - L_2 - L_4)u_1 + (4L_1L_2)v_1 + L_2(L_2 - L_1 - L_3)u_2 + (4L_2L_3)v_2 \\ + L_3(L_3 - L_2 - L_4)u_3 + (4L_3L_4)v_3 + L_4(L_4 - L_3 - L_1)u_4 + (4L_1L_4)v_4$$

ب. في الإحداثيات المركزية :



الشكل (2-16): الإحداثيات المركزية للمستطيل بثمان عقد.

ليكن  $C = (a, b)$  مركز المستطيل، ولتكن  $A_1, A_{12}, A_2, A_{23}, A_3, A_{34}, A_4, A_{14}$  عقد المستطيل إحداثياتها الديكارتية على الترتيب:

$$(0, 0), (a, 0), (2a, 0), (2a, b), (2a, 2b), (a, 2b), (0, 2b), (0, b) \quad (2-84)$$

نعوض (2-84) في (2-77)، نجد الإحداثيات المركزية للعقد السابقة هي على الترتيب:

$$(-1, -1), (0, -1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0) \quad (2-85)$$

نعوض (2-85) في كثيرة الحدود بالإحداثيات المركزية :

$$Q = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2$$



$$u_1 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - a_7 - a_8$$

$$v_1 = a_1 - a_3 + a_6$$

$$u_2 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8$$

$$v_2 = a_1 + a_2 + a_4$$

$$u_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

$$v_3 = a_1 + a_3 + a_6$$

$$u_4 = a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + a_6 + a_7 - a_8$$

$$v_4 = a_1 - a_2 + a_4$$

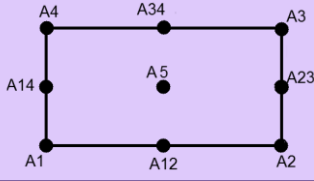
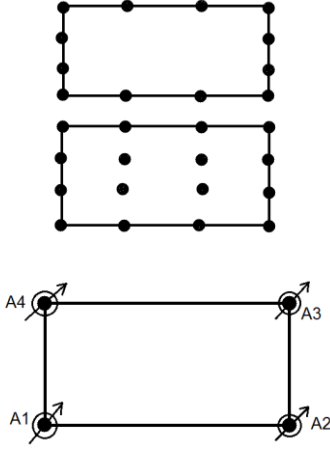
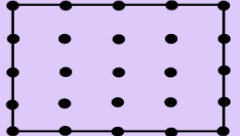
والتي تكتب بالشكل المصفوفي :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(\xi+1)(1-\eta)(\xi+\eta-1)}{4}u_1 + \frac{(1+\xi)(1-\xi)(\eta-1)}{2}v_1 + \frac{(\xi+1)(1-\eta)(\xi-\eta-1)}{4}u_2 \\ &+ \frac{(1+\xi)(1-\eta)(\eta+1)}{2}v_2 + \frac{(\xi+1)(1+\eta)(\xi+\eta-1)}{4}u_3 + \frac{(1+\xi)(1-\xi)(\eta+1)}{2}v_3 \\ &+ \frac{(\xi-1)(1+\eta)(\xi-\eta+1)}{4}u_4 + \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta)}{2}v_4 \\ &= N_1u_1 + N_2v_1 + N_3u_2 + N_4v_2 + N_5u_3 + N_6v_3 + N_7u_4 + N_8v_4 \end{aligned}$$

ليكن لدينا الجدول الآتي بأشهر العناصر المستطيلة:

			درجة
--	--	--	------

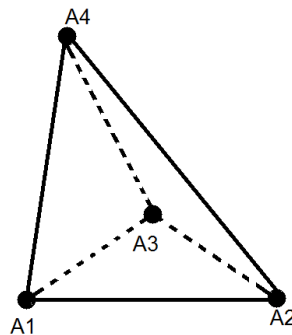
كثيرة الحدود	درجات الحرية	الشكل	العنصر
$Q_2$	$\sum = \left\{ \begin{array}{l} Q(A_i) = u_i ; i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ Q(A_{ij}) = v_i ; i, j = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\} = 9$		المستطيل التربيعي
$Q_3$	$\sum = \{Q(A_i) = u_i ; i = 1, \dots, 12\} = 12$ $\sum = \{Q(A_i) = u_i ; i = 1, \dots, 16\} = 16$ $\sum = \left\{ \begin{array}{l} Q(A_i) = u_i ; i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(A_i) = v_i ; i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(A_i) = w_i ; i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(A_i) = q_i ; i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\} = 16$		المستطيل التكعيبي
$Q_4$	$\sum = \{Q(A_i) = u_i ; i = 1, \dots, 25\} = 25$		المستطيل الرباعي

الجدول (2-2): بعض العناصر المستطيلة بدرجات حرية مختلفة.

6-2. دوال الشكل في (3-D) :

1-6-2. عنصر الهرم :

ليكن لدينا هرم ثلاثي، رؤوسه  $A_1, A_2, A_3, A_4$  بالشكل :



الشكل (2-17): عنصر الهرم.

تُعطى درجات الحرية:

$$\sum = \{P(A_i) = u_i ; i = 1, 2, 3, 4\} = 4 \quad (86-2)$$

ومنه فإن كثيرة الحدود في الإحداثيات الديكارتية هي:

$$P = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (87-2)$$

وفي الإحداثيات المركزية:

$$P = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\zeta \quad (88-2)$$

أما في الإحداثيات الطبيعية:

$$P = a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3 + a_4L_4 \quad (89-2)$$

نعوض الإحداثيات الطبيعية للعقد  $A_1, A_2, A_3, A_4$  والتي هي على الترتيب

$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$  في (2-88)، فنجد:

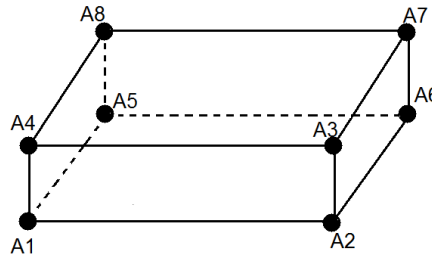
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

بالتعويض في (2-89)، نجد:

$$P = L_1u_1 + L_2u_2 + L_3u_3 + L_4u_4$$

## 2-6-2. عنصر متوازي المستطيلات:

ليكن لدينا متوازي المستطيلات رؤوسه  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ :



الشكل (2-18): عنصر متوازي مستطيلات.

تُعطى درجات الحرية:

$$\sum = \{P(A_i) = u_i ; i = 1, \dots, 8\} = 8 \quad (90-2)$$

ومنه، تُعطى كثيرة الحدود في الإحداثيات الديكارتية بالصيغة:

$$P = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7xz + a_8xyz \quad (91-2)$$

وتُعطى في الإحداثيات الطبيعية:

$$P = a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3 + a_4L_4 + a_5L_5 + a_6L_6 + a_7L_7 + a_8L_8 \quad (92-2)$$

وتُعطى في الإحداثيات المركزية:

$$P = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\zeta + a_5\xi\eta + a_6\eta\zeta + a_7\xi\zeta + a_8\xi\eta\zeta \quad (93-2)$$

لنفرض أن إحداثيات مركز متوازي المستطيلات  $C = (a, b, c)$ ، ولنفرض أن الإحداثيات الديكارتية للعقد  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$  هي على الترتيب :

$$\begin{aligned} &(2a, 0, 0), (2a, 2b, 0), (2a, 2b, 2c), (2a, 0, 2c) \\ &(0, 0, 0), (0, 2b, 0), (0, 2b, 2c), (0, 0, 2c) \end{aligned} \quad (94-2)$$

ولإيجاد الإحداثيات المركزية للعقد السابقة نعوض (94-2) في العلاقات الآتية:

$$\xi = \frac{x-a}{a}, \quad \eta = \frac{y-b}{b}, \quad \zeta = \frac{z-c}{c}$$

فنجد :

$$\begin{aligned} A_1 &= (1, -1, -1), \quad A_2 = (1, 1, -1), \quad A_3 = (1, 1, 1), \quad A_4 = (1, -1, 1) \\ A_5 &= (-1, -1, -1), \quad A_6 = (-1, 1, -1), \quad A_7 = (-1, 1, 1), \quad A_8 = (-1, -1, 1) \end{aligned} \quad (95-2)$$

نعوض (95-2) في (93-2)، فنجد:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 \\ u_2 &= a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 - a_7 - a_8 \\ u_3 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ u_4 &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 - a_8 \\ u_5 &= a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - a_8 \\ u_6 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6 + a_7 + a_8 \\ u_7 &= a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - a_8 \\ u_8 &= a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix}$$

بإيجاد قيم الثوابت والتعويض في (2-93)، فنجد دوال الشكل هي:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) ; i = 1, \dots, 8$$

## 7-2. ملخص الفصل الثاني:

تم في هذا الفصل مناقشة طرائق وأساليب إيجاد دوال الشكل في الإحداثيات الديكارتية والمركزية والمساحة في كل من الفضاء الأحادي والثنائي والثلاثي حسب الشكل الهندسي الموجود وحسب عدد درجات الحرية، وذلك نظراً لأهميتها في تطبيق خطوات طريقة العناصر المنتهية.

## الفصل الثالث:

### الحلول التقريبية للمعادلات الناقصية الخطية ببعدين بإستخدام طريقة العناصر المنتهية

3-1. مقدمة :

نخصص هذا الفصل للحديث عن كيفية تطبيق طريقة العناصر المنتهية على المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من النمط الناقصي ببعدين، حيث نقدم الخطوات بالتفصيل مع الشرح الكامل لها، ونعرض مجموعة من الأمثلة، التي تختلف عن بعضها البعض بالشروط الحدية وشكل المنطقة المدروسة .

### 2-3. خطوات طريقة العناصر المنتهية في الإحداثيات الديكارتية [9, 17, 78, 93, 94]:

#### 1-2-3. الصيغة القوية Powerful formula:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية الناقصية الآتية:

$$p(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + q(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) + r(x, y) u(x, y) = f(x, y) \quad (1-3)$$

بالشروط الحدية المختلطة الآتية:

$$u(x, y) = g(x, y) \quad (x, y) \in S_1 \quad (2-3)$$

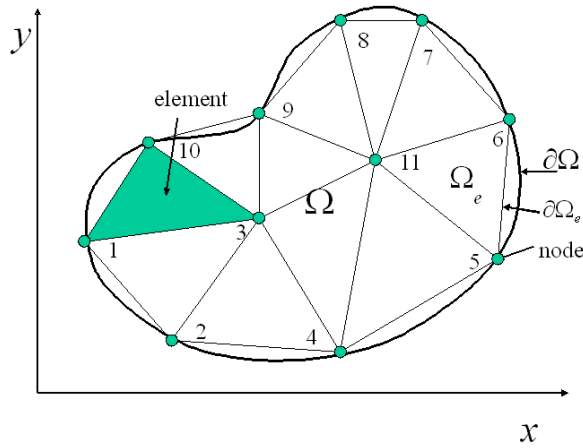
$$\frac{\partial u}{\partial n} + g_1(x, y) u(x, y) = g_2(x, y) \quad (x, y) \in S_2$$

حيث  $\Omega$  منطقة من المستوي محدودة ومفتوحة و  $\Omega_e$  نطاق مضلعي الشكل داخل  $\Omega$  ، و  $S_1, S_2$  حدود مستقيمة الشكل للمنطقة  $\Omega$  ،  $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$  .

$$g \in C(\Omega), g_1, g_2 \in C(\partial\Omega) , p, q, r, f \in C^1(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

#### 2-2-3. تقسيم المنطقة:

نقسم المنطقة  $\Omega_e$  إلى  $M$  مثلث (مستطيل) ، بحيث لا يقع أي رأس من رؤوس أي مثلث (مستطيل) داخل أي ضلع من أضلاع مثلث (مستطيل) آخر  $T_1, \dots, T_M$  ، حيث  $T_1, \dots, T_k$  مثلثات (مستطيلات) لا تقع أي حافة من حوافها على  $S_1$  أو  $S_2$  ( $k=0$  لا يقع أي مثلث (مستطيل) داخل  $\Omega$ ) ،  $T_{k+1}, \dots, T_N$  مثلثات (مستطيلات) تنطبق حافة واحدة على الأقل من حوافها على  $S_2$  ،  $T_{N+1}, \dots, T_M$  بقية المثلثات (المستطيلات) ( $N=M$  كل المثلثات تمتلك حواف على  $S_2$ ) .



الشكل (3-1): يبين كيفية تقسيم المنطقة في الفضاء ثنائي البعد.

### 1-2-2-3. الترقيم العام The global numbering:

نتيجة التقسيم السابق نجد عدد من العقد ( تقاطع ضلعين على الأقل ) نرمز لهذه العقد  $u_1, \dots, u_m$  ،  
 $u_1, \dots, u_n \in \Omega_e \setminus S_1$  (مجهولة القيمة) ،  $u_{n+1}, \dots, u_m \in S_1$  (  $n = m$  فإن  $S_1$  لا يحوي أي عقدة).

### 2-2-2-3. الترقيم المحلي The local numbering:

نرّقم الرؤوس الثلاث (الأربع) لكل مثلث (مستطيل) بترقيم يدعى الترقيم المحلي ومستقل تماماً عن الترقيم العام، حيث نختار العنصر الأول ونرّقم رأس ما من الرؤوس  $i$  ، ونرّقم بقية رؤوسه على الترتيب  $j, k$  ( في حالة المثلثات ) و  $j, k, l$  ( في حالة المستطيلات )، بعكس دوران عقارب الساعة بالنسبة إلى العقدة  $i$  ، وبالاتقال للعنصر الثاني في الشكل المختلف عن العنصر الأول، فيتم ترقيم عقده إما مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة وذلك حسب العنصر الأول، فإذا نتج العنصر الثاني عن الأول بتدوير الأول حول أحد عقده بعكس عقارب الساعة وبعده دورات أقل من دورانه حول أحد عقده مع عقارب الساعة فإن الترقيم المحلي للعنصر الثاني يكون بعكس عقارب الساعة وبالعكس، وإذا كانت عدد الدورات متساوية فلا يهم اتجاه الترقيم، ومن الجدير بالذكر أن العناصر المتشابهة ترّقم بنفس الترقيم، ثم نوجد لكل رأس من رؤوس كل مثلث (مستطيل) دوال الشكل التي تُعطى في العلاقات (2-32) في حالة المثلثات، وفي العلاقات (2-67) في حالة المستطيلات وتحقق :

في حالة المثلثات:

$$\begin{aligned}
N_k(x_i, y_i) &= 0 & N_j(x_i, y_i) &= 0 & N_i(x_i, y_i) &= 1 \\
N_k(x_j, y_j) &= 0 & N_j(x_j, y_j) &= 1 & N_i(x_j, y_j) &= 0 \\
N_k(x_k, y_k) &= 1 & N_j(x_k, y_k) &= 0 & N_i(x_k, y_k) &= 0
\end{aligned}$$

في حالة المستطيلات:

$$\begin{aligned}
N_l(x_i, y_i) &= 0 & N_k(x_i, y_i) &= 0 & N_j(x_i, y_i) &= 0 & N_i(x_i, y_i) &= 1 \\
N_l(x_j, y_j) &= 0 & N_k(x_j, y_j) &= 0 & N_j(x_j, y_j) &= 1 & N_i(x_j, y_j) &= 0 \\
N_l(x_k, y_k) &= 0 & N_k(x_k, y_k) &= 1 & N_j(x_k, y_k) &= 0 & N_i(x_k, y_k) &= 0 \\
N_l(x_l, y_l) &= 1 & N_k(x_l, y_l) &= 0 & N_j(x_l, y_l) &= 0 & N_i(x_l, y_l) &= 0
\end{aligned}$$

### 3-2-3. الصيغة الضعيفة Weak formula:

نضرب طرفي المعادلة (1-2) بدالة وزن ولتكن  $v(x, y) \in V$  حيث:

$$V = \{v : v \in C(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ دوال مستمرة قطعياً على } \Omega; v(x, y) = g(x, y) \text{ in } \Omega\} \quad (3-3)$$

نكامل الطرفين فنجد:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} p(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx dy + \iint_{\Omega} q(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v dx dy + \\
& \iint_{\Omega} r(x, y) u(x, y) v dx dy = \iint_{\Omega} f(x, y) v dx dy
\end{aligned}$$

نكامل بالتجزئة كلاً من التكاملين الآتيين الأول بالنسبة إلى المتغير  $x$  والثاني بالنسبة إلى المتغير  $y$ :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{\Omega} p(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x, y) dx dy \\
I_2 &= \iint_{\Omega} q(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v(x, y) dx dy
\end{aligned}$$

من أجل ذلك نأخذ الفرضيات الآتية:

$$\begin{aligned}
I_2 & \left\{ \begin{aligned} w &= v(x, y) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow z = \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right. & I_1 & \left\{ \begin{aligned} w &= v(x, y) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow z = \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

أو استناداً إلى مبرهنة غرين (الإثبات [9])، نجد :



$$\int_{\partial\Omega} (p \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial y}) \nu ds - \iint_{\Omega} p \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy - \iint_{\Omega} q \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy + \iint_{\Omega} r \nu v dx dy = \iint_{\Omega} f v dx dy$$

$$\int_{\partial\Omega} (-g_1 u + g_2) \nu ds - \iint_{\Omega} p \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy - \iint_{\Omega} q \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy + \iint_{\Omega} r \nu v dx dy = \iint_{\Omega} f v dx dy$$

يمكن أن نعتبر دالة الوزن  $v$  هي دوال شكل، لذلك نعوض كل  $v$  بدوال الشكل  $N_j$  ،  $j = 1, \dots, m$  وكل  $u$  بعبارة الحل:

$$u = \sum_{i=1}^m u_i N_i \quad (4-3)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} p \frac{\partial}{\partial x} (\sum_{i=1}^m u_i N_i) \frac{\partial}{\partial x} N_j dx dy + \iint_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial y} (\sum_{i=1}^m u_i N_i) \frac{\partial}{\partial y} N_j dx dy - \iint_{\Omega} r (\sum_{i=1}^m u_i N_i) N_j dx dy \\ & + \int_{\partial\Omega} g_1 \sum_{i=1}^m u_i N_i ds = - \iint_{\Omega} f N_j dx dy + \int_{\partial\Omega} g_2 N_j ds \end{aligned}$$

ولما كان  $u_i$  ثوابت عددية، فنجد:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m u_i \left( \iint_{\Omega} p \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} q \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy - \iint_{\Omega} r N_i N_j dx dy + \int_{\partial\Omega} g_1 N_i ds \right) \\ = - \iint_{\Omega} f N_j dx dy + \int_{\partial\Omega} g_2 N_j ds \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\alpha_{ij} = \iint_{\Omega} p \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} q \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy - \iint_{\Omega} r N_i N_j dx dy + \int_{\partial\Omega} g_1 N_i ds \quad \text{حيث:}$$

ولما كان  $u_{n+1}, \dots, u_m \in S_1$  معلومة القيمة،  $u_1, \dots, u_n \in \Omega^* \setminus S_1$  مجهولة القيمة، فإن:

$$\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=n+1}^m u_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i \left( \iint_{\Omega} p \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} q \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy - \iint_{\Omega} r N_i N_j dx dy + \int_{\partial\Omega} g_1 N_i ds \right) \\ = - \iint_{\Omega} f N_j dx dy + \int_{\partial\Omega} g_2 N_j ds - \sum_{i=n+1}^m u_i \alpha_{ij} \quad (j = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

### 3-2-4. إيجاد مصفوفة الصلابة ومتجه الحمولة:

لما كان  $u_i$  ( $i = n+1, \dots, m$ ) ثوابت عددية معلومة:

$$\alpha_{ij} = \iint_{\Omega} p \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} q \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy - \iint_{\Omega} r N_i N_j dx dy + \int_{\partial\Omega} g_1 N_i ds \quad (5-3)$$

$$\beta_j = - \iint_{\Omega} f N_j dx dy + \int_{\partial\Omega} g_2 N_j ds - \sum_{i=n+1}^m u_i \alpha_{ij} \quad (j=1, \dots, m) \quad (6-3)$$

$$\beta_j = f_j + I_j - \sum_{i=n+1}^m u_i \alpha_{ij}$$

حيث :  $\alpha_{ij}$  مصفوفة الصلابة،  $\beta_i$  متجه الحملية.

### 3-2-5. حل المعادلات الجبرية الناتجة:

بعد إجراء جميع الخطوات السابقة نجد المعادلة المصفوفية:

$$AU = B$$

حيث :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

وبحل جملة المعادلات الجبرية الخطية الناتجة نجد قيم العقد المجهولة ونعوض بعبارة الحل.

**مثال 3-1:** لتكن لدينا معادلة لابلاس: هي معادلة تفاضلية جزئية لها تطبيقات مهمة في مجال الفيزياء والميكانيك، فهي تظهر في ميكانيك السوائل وفي المرونة والكهرباء الساكنة، وفي نظرية نقل الحرارة والكتلة [7].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \begin{matrix} x \in [0, 4] \\ y \in [0, 2] \end{matrix} \quad (7-3)$$

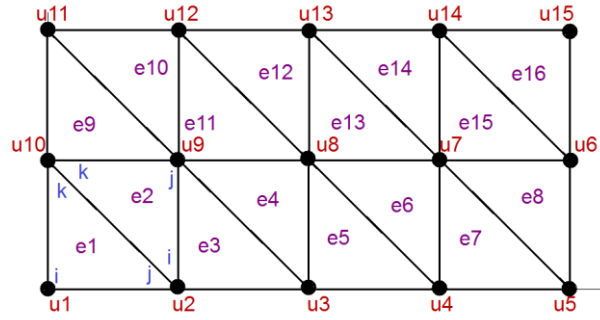
وبالشروط الحدية :

$$u(0, y) = 100, u(4, y) = 250, u(x, 0) = 50, u(x, 2) = 200$$

أوجد الحل التقريبي باستخدام طريقة العناصر المنتهية، باستخدام التقطيع المثلثي [70].

**الحل :**

نقسم المنطقة إلى 16 عنصر  $e_1, \dots, e_{16}$ ، فنجد 15 عقدة  $u_1, \dots, u_{15}$ ، كما في الشكل:



الشكل (2-3): التقسيم المثلثي للمنطقة المثال (1-3).

العنصر	عقدة العامة	عقدة المحلية	الإحداثيات
$e_1$	$u_1$	$i$	(0,0)
	$u_2$	$j$	(1,0)
	$u_{10}$	$k$	(0,1)
$e_2$	$u_2$	$i$	(1,0)
	$u_9$	$j$	(1,1)
	$u_{10}$	$k$	(0,1)
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$e_{16}$	$u_6$	$i$	(4,1)
	$u_{15}$	$j$	(4,2)
	$u_{14}$	$k$	(3,2)

الجدول (1-3): العقد العامة وما يقابلها من العقد المحلية لعناصر الشكل (2-3).

العنصر	$N_i$	$N_j$	$N_k$
$e_1$	$1-x-y$	$x$	$y$
$e_2$	$1-y$	$-1+x+y$	$1-x$
$e_3$	$2-x-y$	$-1+x$	$y$
$e_4$	$1-y$	$-2+x+y$	$2-x$
$e_5$	$3-x-y$	$-2+x$	$y$
$e_6$	$1-y$	$-3+x+y$	$3-x$
$e_7$	$4-x-y$	$-3+x$	$y$
$e_8$	$1-y$	$-4+x+y$	$4-x$
$e_9$	$2-x-y$	$x$	$-1+y$

$e_{10}$	$2-y$	$-2+x+y$	$1-x$
$e_{11}$	$3-x-y$	$-1+x$	$-1+y$
$e_{12}$	$2-y$	$-3+x+y$	$2-x$
$e_{13}$	$4-x-y$	$-2+x$	$-1+y$
$e_{14}$	$2-y$	$-4+x+y$	$3-x$
$e_{15}$	$5-x-y$	$-3+x$	$-1+y$
$e_{16}$	$2-y$	$-5+x+y$	$4-x$

الجدول (2-3): دوال الشكل لعناصر الشكل (2-3).

إيجاد مصفوفة الصلابة لكل عنصر :

حسب (5-3)، نجد:

بالنسبة إلى العنصر الأول:

$$a_{11}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^{-y+1} 2dx dy = 1$$

$$a_{22}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^{-y+1} 1dx dy = 0.5$$

$$a_{12}^{(1)} = a_{21}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^{-y+1} -1dx dy = -0.5 \quad , \quad a_{23}^{(1)} = a_{32}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^{-y+1} (0)dx dy = 0$$

$$a_{13}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^{-y+1} -1dx dy = -0.5 \quad a_{33}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^{-y+1} 1dx dy = 0.5$$

وينفس الطريقة نوجد عناصر مصفوفات الصلابة لكل عنصر، فنجد:

$$A^{(1)} = A^{(3)} = A^{(5)} = A^{(7)} = A^{(9)} = A^{(11)} = A^{(13)} = A^{(15)} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = A^{(4)} = A^{(6)} = A^{(8)} = A^{(10)} = A^{(12)} = A^{(14)} = A^{(16)} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

أما مصفوفة الصلابة العامة هي مصفوفة  $15 \times 15$ ، متناظرة، تحسب عناصرها بالطريقة الآتية:

لحساب قيمة العنصر  $a_{nm}$ : إن هذا العنصر مرتبط بالعقد  $u_n, u_m$ ، فإذا كانت هاتان العقدتان لاتشتركان بأي مثلث فإن  $a_{nm} = 0$ ، وإذا كانت هاتان العقدتان تشتركان بعنصر واحد وليكن  $e_h$ ، وكان على سبيل المثال، الترقيم المحلي لكل من  $u_n, u_m$  في  $e_h$  هو  $i, j$  فإن:

$$a_{nm} = a_{ij}^{(h)}$$

وفي حالة الاشتراك بمثلثين أو أكثر، يتم حساب قيمة العنصر بالطريقة السابقة مع جمع الحدود.

وبتطبيق ما سبق نجد أن مصفوفة الصلابة العامة هي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

لنعرف مايلي:

$f = 7, 8, 9$  : أرقام العقد غير المعلومة.

$p = 1, \dots, 6, 10, \dots, 15$  : أرقام العقد المعلومة.

$u_f$  : متجه العقد غير المعلومة.

$u_p$  : متجه العقد المعلومة التي تحقق شرط ديرخلية الحدي.

$$u_1 = \frac{50+100}{2} = 75$$

$$u_{11} = \frac{200+100}{2} = 150$$

$$u_2 = u_3 = u_4 = 50$$

$$u_{12} = u_{13} = u_{14} = 200$$

$$u_6 = 250$$

$$u_{15} = \frac{250+200}{2} = 225$$

$$u_{10} = 100$$

$C_{ff}$  : مصفوفة عناصرها الأعمدة والأسطر ذات الأرقام 7,8,9 من المصفوفة  $A$ .

$C_{fp}$  : مصفوفة عناصرها الأسطر ذات الأرقام 7,8,9 وأعمدتها ذات الأرقام 1, ..., 6, 10, ..., 15 من  $A$

ولنوجد متجه العقد المجهولة  $u_f$ :

$$u_f = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = -C_{ff}^{-1} \cdot C_{fp} u_p$$

$$u_f = - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \\ 150 \\ 250 \\ 100 \\ 150 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 225 \end{pmatrix}$$

$$u_f = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 158.0357 \\ 132.1429 \\ 120.5357 \end{pmatrix}$$

**مثال 3-2:** لتكن لدينا معادلة بواسون المعرفة على منطقة مستطيلية الشكل [4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{matrix} x \in [0, 4] \\ y \in [0, 2] \end{matrix} \quad (8-3)$$

حيث  $u(x, y)$  توزيع درجة الحرارة على المنطقة المعطاة

بالشروط الحدية الآتية :

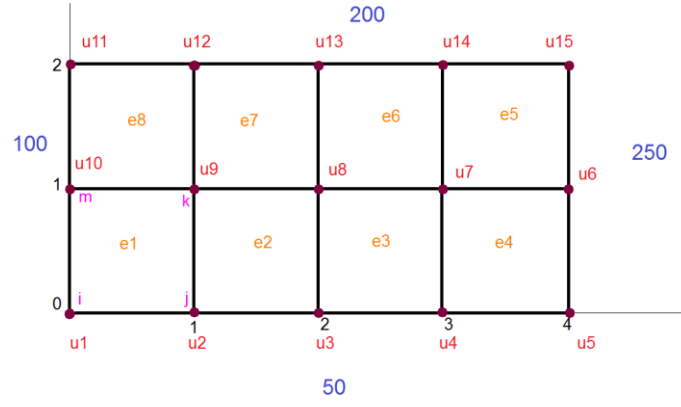
$$u(0, y) = U_L, u(4, y) = U_R, u(x, 0) = U_B, u(x, 2) = U_T$$

حيث:

$U_L = 100, U_R = 250$ : درجات الحرارة المفروضة على الحدود اليمنى واليسرى .

$U_B = 50, U_T = 200$ : درجات الحرارة المفروضة على الحدود العليا والسفلى.

**الحل:**



الشكل (3-3): التقسيم المستطيلي لمنطقة المثال (2-3).

حسب الشكل السابق قسمنا المنطقة المعطاة إلى 8 مستطيلات  $e_1, \dots, e_8$ ، فيتكون لدينا 15 عقدة  $u_1, \dots, u_{15}$ .

العنصر	عقدة العامة	عقدة المحلية	الإحداثيات
$e_1$	$u_1$	$i$	(0,0)
	$u_2$	$j$	(1,0)
	$u_9$	$k$	(1,1)
	$u_{10}$	$m$	(0,1)
$e_2$	$u_2$	$i$	(1,0)
	$u_3$	$j$	(2,0)
	$u_8$	$k$	(2,1)
	$u_9$	$m$	(1,1)
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$e_{15}$	$u_7$	$i$	(3,1)
	$u_6$	$j$	(4,1)
	$u_{15}$	$k$	(4,2)
	$u_{14}$	$m$	(3,2)

الجدول (3-3): العقد العامة وما يقابلها من العقد المحلية لعناصر الشكل (3-3).

حسب الشروط الحدّية المبينة في نص المسألة نلاحظ أن العقد المجهولة هي:  $u_7, u_8, u_9$ .

أمّا بقية العقد المعلومة هي :

القيمة	العقدة
$\frac{50+100}{2} = 75$	$u_1$
50	$u_2$
50	$u_3$
50	$u_4$
$\frac{250+50}{2} = 150$	$u_5$
250	$u_6$
100	$u_{10}$
$\frac{100+200}{2} = 150$	$u_{11}$
200	$u_{12}$
200	$u_{13}$
200	$u_{14}$
$\frac{250+200}{2} = 225$	$u_{15}$

الجدول (3-4): يبين القيم العددية للعقد المحققة للشروط الحدية للشكل (3-3).

باستخدام (2-32) نجد دوال الشكل لكل عنصر:

العنصر	$N_i$	$N_j$	$N_k$	$N_m$
$e_1$	$xy - x - y + 1$	$x - xy$	$xy$	$y - xy$
$e_2$	$xy - x - 2y + 2$	$-xy + x + y - 1$	$xy - y$	$-xy + 2y$
$e_3$	$xy - 3y - x + 3$	$-xy + 2x + 2y - 4$	$xy - 2y$	$-xy + 3y$
$e_4$	$xy - 4y - x + 4$	$-xy + x + 3y - 3$	$xy - 3y$	$-xy + 4y$
$e_5$	$xy - 2x - 4y + 8$	$-xy + 2x + 3y - 6$	$xy - x - 3y + 3$	$-xy + x + 4y - 4$
$e_6$	$xy - 2x - 3y + 6$	$-xy + 2x + 2y - 4$	$xy - x - 2y + 2$	$-xy + x + 3y - 3$
$e_7$	$xy - 2x - 2y + 4$	$-xy + 2x + y - 2$	$xy - x - y + 1$	$-xy + x + 2y - 2$
$e_8$	$xy - 2x - y + 2$	$-xy + 2x$	$xy - x$	$-xy + x + y - 1$

الجدول (3-5): يبين دوال الشكل لكل عنصر من عناصر الشكل (3-3).

لنوجد مصفوفة الصلابة لكل عنصر من العناصر، حيث نطبق قوانين دوال الشكل في حالة المستطيلات، و بإجراء التكامل على كل عنصر، فنجد:



$$A^{(1)} = A^{(2)} = A^{(3)} = A^{(4)} = A^{(5)} = A^{(6)} = A^{(7)} = A^{(8)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$f^{(1)} = f^{(2)} = f^{(3)} = f^{(4)} = f^{(5)} = f^{(6)} = f^{(7)} = f^{(8)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ولما كان } f(x) = 0 \text{ فإن :}$$

ومنه مصفوفة الصلابة العامة هي :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

لنعرّف مايلي :

$f : f = 7, 8, 9$  أرقام العقد غير المعلومة،  $p : p = 1, \dots, 6, 10, \dots, 15$  أرقام العقد المعلومة.

$u_f$  : متجه العقد غير المعلومة،  $u_p$  : متجه العقد المعلومة .

$C_{ff}$  : مصفوفة عناصرها الأعمدة والأسطر ذات الأرقام 7, 8, 9 من المصفوفة  $A$ .

$C_{fp}$  : مصفوفة عناصرها الأسطر ذات الأرقام 7, 8, 9 وأعمدتها ذات الأرقام 1, ..., 6, 10, ..., 15 من  $A$

ومنه فإن :

$$u_f = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = -C_{ff}^{-1} C_{fp} u_p$$

$$u_f = - \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \\ 150 \\ 250 \\ 100 \\ 150 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 225 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن :

$$u_f = \begin{pmatrix} 156.6532 \\ 128.2258 \\ 119.1532 \end{pmatrix}$$

الحل التقريبي هو:  $u \cong 350x + 750y - 533.8712$

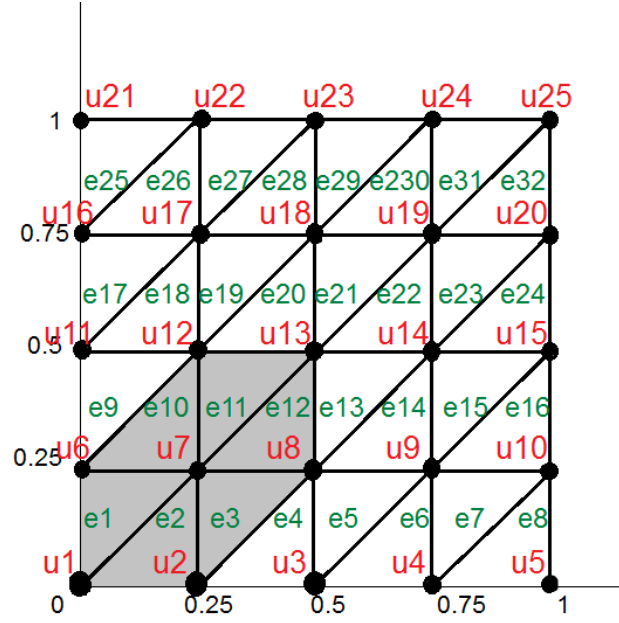
مثال ( 3-3 ) : لتكن لدينا معادلة بواسون وهي المعادلة غير المتجانسة من معادلة لابلاس، لها تطبيقات في دراسة تدفق السوائل في الوسائط المسامية، وفي نظرية الجاذبية الكونية [58] .

$$\begin{aligned} -\Delta u &= x & (x, y) &\in \Omega \\ u(x, y) &= 0 & (x, y) &\in \partial\Omega \end{aligned} \quad (9-3)$$

$$\Omega = \{0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$$

الحل:

تُقطع المنطقة إلى عدد من المثلثات حيث لدينا 32 عنصر مثلثي  $e_1, \dots, e_{32}$ ، و 25 عقدة  $u_1, \dots, u_{25}$ ، 16 عقدة منها محيطية و 9 عقد داخلية [82].



الشكل (3-4): شبكة العناصر المثلثية للمثال (3-3) .

العنصر	العقد العامة	العقد المحلية	الإحداثيات
$e_1$	$u_1$	$i$	(0,0)
	$u_7$	$j$	(0.25,0.25)
	$u_6$	$k$	(0,0.25)
$e_2$	$u_1$	$i$	(0,0)
	$u_2$	$j$	(0.25,0)
	$u_7$	$k$	(0.25,0.25)
$e_3$	$u_2$	$i$	(0.25,0)
	$u_8$	$j$	(0.5,0)
	$u_7$	$k$	(0.25,0.25)
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$e_{32}$	$u_{19}$	$i$	(0.75,0.75)
	$u_{20}$	$j$	(1,0.75)
	$u_{25}$	$k$	(1,1)

الجدول (3-6): يبين التقييم العام والمحلي لكل عقدة من الشكل (3-4).

بتطبيق الشروط الحدّية المبينة في نص المسألة، نجد أن :

العقدة	إحداثياتها	قيمتها
$u_1$	(0,0)	0
$u_2$	(0.25,0)	0
$u_3$	(0.5,0)	0
$u_4$	(0.75,0)	0
$u_5$	(1,0)	0
$u_6$	(0,0.25)	0
$u_{10}$	(1,0.25)	0
$u_{11}$	(0,0.5)	0
$u_{15}$	(1,0.5)	0
$u_{16}$	(0,0.75)	0
$u_{20}$	(1,0.75)	0
$u_{21}$	(0,1)	0
$u_{22}$	(0.25,1)	0
$u_{23}$	(0.5,1)	0
$u_{24}$	(0.75,1)	0
$u_{25}$	(1,1)	0

الجدول (3-7): يبين قيم العقد المحققة لشرط ديرخليه للشكل (3-4).

العقدة	إحداثياتها
$u_7$	(0.25,0.25)
$u_8$	(0.5,0.25)
$u_9$	(0.75,0.25)
$u_{12}$	(0.25,0.5)
$u_{13}$	(0.5,0.5)
$u_{14}$	(0.75,0.5)
$u_{17}$	(0.25,0.75)
$u_{18}$	(0.75,0.5)
$u_{19}$	(0.75,0.75)

الجدول (3-8): يبين العقد المجهولة القيمة والمطلوب إيجادها للشكل (3-4).

حيث إن كل عقدة من العقد في الجدول (3-8) تتوافق مع عنصر واحد وهو عبارة عن ستة عناصر متثلثة ( الجزء الملون من الشكل (3-4))، ولما كان عدد العقد المجهولة 9 ومنه يوجد 9 دوال شكل:

$$\begin{aligned}
\phi_7 &= \begin{cases} N_j = 4x \dots\dots\dots inT_1 \\ N_k = 4y \dots\dots\dots inT_2 \\ N_k = 1-4x + 4y \dots\dots inT_3 \\ N_i = 2-4x \dots\dots\dots inT_{12} \\ N_i = 2-4y \dots\dots\dots inT_{11} \\ N_j = 1+4x - 4y \dots\dots inT_{10} \end{cases} & \phi_8 &= \begin{cases} N_j = -1+4x \dots\dots\dots inT_3 \\ N_k = 4y \dots\dots\dots inT_4 \\ N_k = 2-4x + 4y \dots\dots inT_5 \\ N_i = 3-4x \dots\dots\dots inT_{14} \\ N_i = 2-4y \dots\dots\dots inT_{13} \\ N_j = 4x - 4y \dots\dots\dots inT_{12} \end{cases} \\
\phi_9 &= \begin{cases} N_j = -2+4x \dots\dots\dots inT_5 \\ N_k = 4y \dots\dots\dots inT_6 \\ N_k = 3-4x + 4y \dots\dots inT_7 \\ N_i = 4-4x \dots\dots\dots inT_{16} \\ N_i = 2+4y \dots\dots\dots inT_{15} \\ N_j = -1+4x - 4y \dots\dots inT_{14} \end{cases} & \phi_{12} &= \begin{cases} N_j = 4x \dots\dots\dots inT_9 \\ N_k = -1+4y \dots\dots\dots inT_{10} \\ N_k = -4x + 4y \dots\dots\dots inT_{11} \\ N_i = 2-4x \dots\dots\dots inT_{20} \\ N_i = 3-4y \dots\dots\dots inT_{19} \\ N_j = 2+4x - 4y \dots\dots inT_{18} \end{cases} \\
\phi_{13} &= \begin{cases} N_j = -1+4x \dots\dots\dots inT_{11} \\ N_k = -1+4y \dots\dots\dots inT_{12} \\ N_k = 1-4x + 4y \dots\dots inT_{13} \\ N_i = 3-4x \dots\dots\dots inT_{22} \\ N_i = 3-4y \dots\dots\dots inT_{21} \\ N_j = 1+4x - 4y \dots\dots\dots inT_{20} \end{cases} & \phi_{14} &= \begin{cases} N_j = -2+4x \dots\dots\dots inT_{13} \\ N_k = -1+4y \dots\dots\dots inT_{14} \\ N_k = 2-4x + 4y \dots\dots inT_{15} \\ N_i = 4-4x \dots\dots\dots inT_{24} \\ N_i = 3-4y \dots\dots\dots inT_{23} \\ N_j = 4x - 4y \dots\dots\dots inT_{22} \end{cases} \\
\phi_{17} &= \begin{cases} N_j = 2+4x - 4y \dots\dots inT_{17} \\ N_k = -2+4y \dots\dots\dots inT_{18} \\ N_k = -1-4x + 4y \dots\dots inT_{19} \\ N_i = 2-4x \dots\dots\dots inT_{28} \\ N_i = 4-4y \dots\dots\dots inT_{27} \\ N_j = 3+4x - 4y \dots\dots inT_{26} \end{cases} & \phi_{18} &= \begin{cases} N_j = -1+4x \dots\dots\dots inT_{19} \\ N_k = -2+4y \dots\dots\dots inT_{20} \\ N_k = -4x + 4y \dots\dots\dots inT_{21} \\ N_i = 3-4x \dots\dots\dots inT_{30} \\ N_i = 4-4y \dots\dots\dots inT_{29} \\ N_j = 2+4x - 4y \dots\dots inT_{28} \end{cases} \\
\phi_{19} &= \begin{cases} N_j = -2+4x \dots\dots\dots inT_{21} \\ N_k = -2+4y \dots\dots\dots inT_{22} \\ N_k = 1-4x + 4y \dots\dots inT_{23} \\ N_i = 4-4x \dots\dots\dots inT_{32} \\ N_i = 4-4y \dots\dots\dots inT_{31} \\ N_j = 1+4x - 4y \dots\dots inT_{30} \end{cases}
\end{aligned}$$

إيجاد مصفوفة الصلابة العامة: هي مصفوفة متناظرة من الشكل  $9 \times 9$  تُعطى عناصرها بالشكل:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \iint_{e_1} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint_{e_2} \left( \frac{\partial N_k}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_k}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint_{e_3} \left( \frac{\partial N_k}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_k}{\partial y} \right)^2 dx dy \\
&+ \iint_{e_{12}} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint_{e_{11}} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint_{e_{10}} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right)^2 dx dy = 4 \\
a_{12} &= \iint_{e_3} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} dx dy + \iint_{e_{12}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dx dy = -1
\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة نوجد بقية القيم فنجد مصفوفة الصلابة العامة:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

أما متجه الحمل العام هو مصفوفة من الشكل  $9 \times 1$  تحسب عناصره بالطريقة:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \iint_{e_1} f(x) N_j dx dy + \iint_{e_2} f(x) N_k dx dy + \iint_{e_3} f(x) N_k dx dy + \iint_{e_{12}} f(x) N_i dx dy \\
&+ \iint_{e_{11}} f(x) N_i dx dy + \iint_{e_{10}} f(x) N_j dx dy = 0.015625
\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة نوجد  $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9$ :

$$f = \begin{pmatrix} 0.015625 \\ 0.03125 \\ 0.046875 \\ 0.015625 \\ 0.03125 \\ 0.046875 \\ 0.015625 \\ 0.03125 \\ 0.046875 \end{pmatrix}$$

فنجد المعادلة المصفوفية:  $AU = f$ :

$$U = \begin{pmatrix} u_7 = 0.015904 \\ u_8 = 0.027344 \\ u_9 = 0.027065 \\ u_{12} = 0.020647 \\ u_{13} = 0.035156 \\ u_{14} = 0.034040 \\ u_{17} = 0.015904 \\ u_{18} = 0.027344 \\ u_{19} = 0.027065 \end{pmatrix}$$

نعوض في (4-3)، نجد :

$$u \cong 0.152904y + 1.382814$$

مثال (4-3): لتكن لدينا المعادلة [9]:

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= 1 & (x, y) \in \Omega \\ u &= 0 & (x, y) \in \partial\Omega \setminus P_1 \cup P_2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & (x, y) \in P_1 \cup P_2 \end{aligned} \quad (10-3)$$

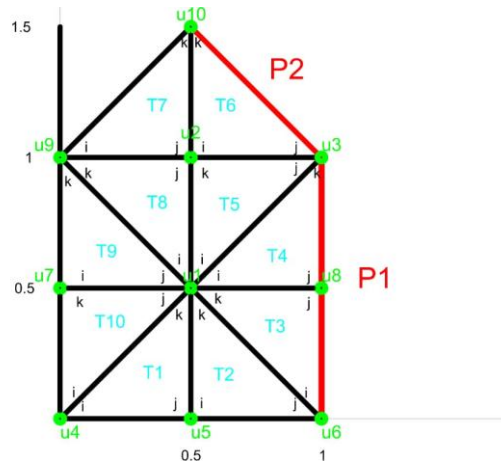
حيث  $P_1$  مستقيم معادلته  $x = -y + 2$  يمثل ضلع من أضلاع المنطقة  $\Omega$ .

و  $P_2$  مستقيم معادلته  $x = 1$  يمثل أيضاً ضلع من أضلاع المنطقة  $\Omega$ .

الحل:

نقسم المنطقة المدروسة إلى 10 مثلثات  $T_1, \dots, T_{10}$  فنجد 10 عقد  $u_1, \dots, u_{10}$ ، لدينا فقط ثلاث عقد

تحقق الشرط الثاني، أما بقية العقد تحقق الشرط الأول في (3-1) حسب الشكل:



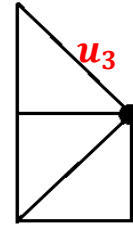
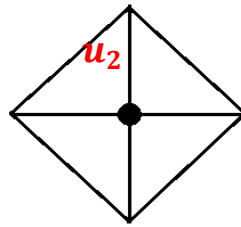
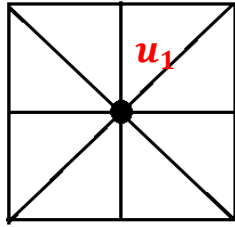
الشكل (5-3) : شبكة من العناصر المثلثية للمثال (4-3) .



العنصر	عقدته العامة	عقدته المحلية	الإحداثيات
$T_1$	$u_4$	$i$	(0,0)
	$u_5$	$j$	(0.5,0)
	$u_1$	$k$	(0.5,0.5)
$T_2$	$u_5$	$i$	(0.5,0)
	$u_6$	$j$	(1,0)
	$u_1$	$k$	(0.5,0.5)
$T_3$	$u_6$	$i$	(1,0)
	$u_9$	$j$	(1,0.5)
	$u_1$	$k$	(0.5,0.5)
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$T_{10}$	$u_4$	$i$	(0,0)
	$u_1$	$j$	(0.5,0.5)
	$u_7$	$k$	(0,0.5)

الجدول (9-3): يبين الترقيم العام والمحلي لكل عقدة من الشكل (5-3) .

$u_1, u_2, u_3$  عقد مجهولة القيمة:



الشكل (6-3): يبين المثلثات المحاطة بكل عقدة مجهولة للشكل (5-3).

فتُعطى دوال الشكل بالصيغ:

$$\phi_2 = \begin{cases} N_k = -2x + 2y \dots\dots\dots inT_5 \\ N_i = 4 - 2x - 2y \dots\dots\dots inT_6 \\ N_j = 2 + 2x - 2y \dots\dots\dots inT_7 \\ N_j = -2 + 2x + 2y \dots\dots\dots inT_8 \end{cases} \quad \phi_1 = \begin{cases} N_k = 2y \dots\dots\dots inT_1 \\ N_k = 2y \dots\dots\dots inT_2 \\ N_k = 2 - 2x \dots\dots\dots inT_3 \\ N_i = 2 - 2x \dots\dots\dots inT_4 \\ N_i = 2 - 2y \dots\dots\dots inT_5 \\ N_i = 2 - 2y \dots\dots\dots inT_8 \\ N_j = 2x \dots\dots\dots inT_9 \\ N_j = 2x \dots\dots\dots inT_{10} \end{cases}$$

$$\phi_3 = \begin{cases} N_k = -1 + 2y \dots\dots\dots inT_4 \\ N_j = -1 + 2x \dots\dots\dots inT_5 \\ N_j = -1 + 2x \dots\dots\dots inT_6 \end{cases}$$

ومنه نجد:

$$\begin{pmatrix} \frac{25}{6} & \frac{47}{48} & \frac{1}{48} \\ \frac{47}{48} & \frac{49}{12} & \frac{47}{48} \\ \frac{1}{48} & \frac{47}{48} & \frac{25}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

ويحل المعادلات الناتجة، نجد:

$$u_1 = 0.07878901738 \quad , \quad u_2 = 3.520278404 \times 10^{-3} \quad , \quad u_3 = 0.07674343863$$

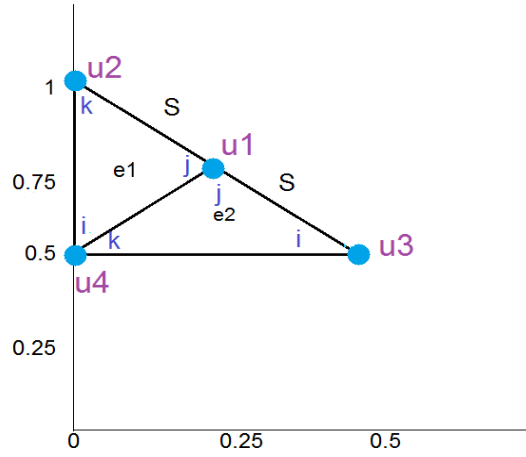
ومنه بالتعويض في (4-3)، نجد :

$$u \cong 0.3069737545x + 0.1534868773y + 0.4909156268$$

**مثال 3-5:** لتكن لدينا المسألة الحدية الآتية [17]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) - yu(x, y) = -x$$

$$\begin{aligned} u(x, 0.5) &= 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(0, y) &= 0 & 0.5 \leq y \leq 1 \\ y^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta_2 \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (y - x) & (x, y) \in S \end{aligned} \quad (11-3)$$



الشكل (7-3): شبكة المثلثات للمثال (5-3).

الحل:

نلاحظ أن الشكل السابق يحوي على عنصرين فقط  $e_1, e_2$ ، وأربع عقد  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . حسب الشروط الحدية الموضحة في نص المسألة نلاحظ أن:

$$u(x, 0.5) = 2x \Rightarrow u_3 = 2(0.5) = 1$$

$$u(0, y) = 0 \Rightarrow u_4 = u_2 = 0$$

فالمطلوب إذاً هو إيجاد قيمة العقدة  $u_1$  بطريقة العناصر المنتهية.

العنصر	عقدة العامة	عقدة المحلية	الإحداثيات
$e_1$	$u_1$	$i$	(0, 0.5)
	$u_3$	$j$	(0.25, 0.75)
	$u_4$	$k$	(0, 1)
$e_2$	$u_1$	$k$	(0, 0.5)
	$u_2$	$i$	(0.5, 0.5)
	$u_3$	$j$	(0.25, 0.75)

الجدول (10-3): يبين العقد العامة وما يقابلها من عقد محلية للشكل (7-3).

العنصر	$N_i$	$N_j$	$N_k$
$e_1$	$2 - 2x - 2y$	$4x$	$-1 - 2x + 2y$
$e_2$	$1 + 2x - 2y$	$-2 + 4y$	$2 - 2x - 2y$

الجدول (11-3): دوال الشكل للشكل (7-3).

لنوجد مصفوفة الصلابة ومتجه الحمولة للعنصر الأول، حسب (5-3):

$$a_{11} = \int_0^{0.25} \int_{x+0.5}^{-x+1} y^2(4) + y^2(4) + y(2-2x-2y)^2 dy dx = 0.293229$$

$$a_{12} = \int_0^{0.25} \int_{x+0.5}^{-x+1} y^2(-8) + y(2-2x-2y)(4x) dy dx = -0.282812$$

$$a_{13} = \int_0^{0.25} \int_{x+0.5}^{-x+1} y(2-2x-2y)(-1-2x+2y) dy dx = 0.00390625$$

$$a_{22} = \int_0^{0.25} \int_{x+0.5}^{-x+1} 16y^2 + 16x^2 y dy dx = 0.58073$$

$$a_{23} = \int_0^{0.25} \int_{x+0.5}^{-x+1} y^2(-8) + y(4x)(-1-2x+2y) dy dx = -0.282292$$

$$a_{33} = \int_0^{0.25} \int_{x+0.5}^{-x+1} y^2(8) + y(-1-2x+2y)(-1+2x+2y) dy dx = 0.299479$$

فتكون مصفوفة الصلابة للعنصر الأول:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.293229 & -0.282812 & 0.00390625 \\ -0.282812 & 0.58073 & -0.282292 \\ 0.00390625 & -0.282292 & 0.299479 \end{pmatrix}$$

حسب (6-3):

$$\beta_1 = \int_0^{0.25} \int_{x+0.5}^{-x+1} x(2-2x-2y) dy dx + \int_0^{0.25} \frac{\sqrt{2}}{2} (y-x)(2-2x-2y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Big|_{y=0.75} = 0.0429688$$

$$\beta_2 = \int_0^{0.25} \int_{x+0.5}^{-x+1} x(4x) dy dx + \int_0^{0.25} \frac{\sqrt{2}}{2} (y-x)(4x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Big|_{y=0.75} = 0.0755209$$

$$\beta_3 = \int_0^{0.25} \int_{x+0.5}^{-x+1} x(-1-2x+2y) dy dx + \int_0^{0.25} \frac{\sqrt{2}}{2} (y-x)(-1-2x+2y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Big|_{y=0.75} = 0.0429688$$

$$\beta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0429688 \\ 0.0755209 \\ 0.0429688 \end{pmatrix}$$

بالنسبة إلى العنصر الثاني، نجد:

$$a_{11} = \int_{0.5}^{0.75} \int_{y-0.5}^{-y+1} y^2(4) + y^2(4) + y(1+2x-2y)^2 dx dy = 0.177604$$

$$a_{12} = \int_{0.5}^{0.75} \int_{y-0.5}^{-y+1} y^2(-8) + y(1+2x-2y)(-2+4y) dx dy = -0.16875$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= \int_{0.5}^{0.75} \int_{y-0.5}^{-y+1} -8y^2 + y(2-2x-2y)(1+2x-2y) dx dy = -0.142448 \\
a_{22} &= \int_{0.5}^{0.75} \int_{y-0.5}^{-y+1} 16y^2 + y(-2+4y)^2 dx dy = 0.350521 \\
a_{23} &= \int_{0.5}^{0.75} \int_{y-0.5}^{-y+1} y^2(8) + y(-2+4y)(2-2x-2y) dx dy = -0.135938 \\
a_{33} &= \int_{0.5}^{0.75} \int_{y-0.5}^{-y+1} y^2(8) + y(2-2x-2y)^2 dx dy = 0.435417
\end{aligned}$$

ومنه، مصفوفة الصلابة للعنصر الثاني:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.177604 & -0.16875 & -0.142448 \\ -0.16875 & 0.350521 & -0.135938 \\ -0.142448 & -0.135938 & 0.435417 \end{pmatrix}$$

أما متجه الحملات للعنصر الثاني:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \int_{0.5}^{0.75} \int_{y-0.5}^{-y+1} x(1+2x-2y) dy dx + \int_{0.25}^{0.5} \frac{\sqrt{2}}{2} (y-x)(1+2x-2y) \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Big|_{y=0.75} = 0.0273437 \\
\beta_2 &= \int_{0.5}^{0.75} \int_{y-0.5}^{-y+1} x(-2+4y) dy dx + \int_{0.25}^{0.5} \frac{\sqrt{2}}{2} (y-x)(-2+4y) \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Big|_{y=0.75} = 0.0989583 \\
\beta_3 &= \int_{0.5}^{0.75} \int_{y-0.5}^{-y+1} x(2-2x+2y) dy dx + \int_{0.25}^{0.5} \frac{\sqrt{2}}{2} (y-x)(2-2x+2y) \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Big|_{y=0.75} = 0.300782
\end{aligned}$$

$$\beta^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0273437 \\ 0.0989583 \\ 0.300782 \end{pmatrix}$$

ومنه فإن مصفوفة الصلابة العامة هي مصفوفة متناظرة  $4 \times 4$ ، ومتجه الحملات العام هو مصفوفة من الشكل  $4 \times 1$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0.931271 & -0.282292 & -0.16875 & -0.41875 \\ -0.282292 & 0.299479 & 0 & 0.00390625 \\ -0.16875 & 0 & 0.177604 & -0.142448 \\ -0.41875 & 0.00390625 & -0.142448 & 0.728646 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.174479 \\ 0.0429688 \\ 0.0273437 \\ 0.343751 \end{pmatrix}$$

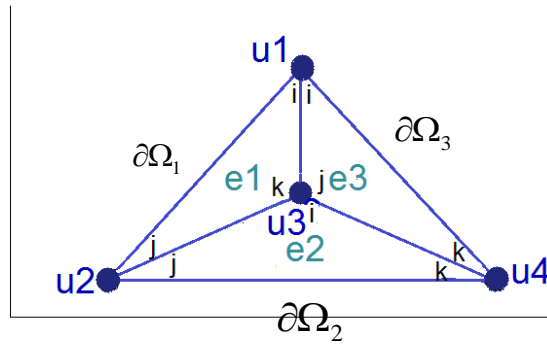
ومنه :

$$\begin{pmatrix} 0.931271 & -0.282292 & -0.16875 & -0.41875 \\ -0.282292 & 0.299479 & 0 & 0.00390625 \\ -0.16875 & 0 & 0.177604 & -0.142448 \\ -0.41875 & 0.00390625 & -0.142448 & 0.728646 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.174479 \\ 0.0429688 \\ 0.0273437 \\ 0.343751 \end{pmatrix}$$

$$0.931271u_1 = 0.174479 - 1(-0.16875) \Rightarrow u_1 = 0.36856$$

**مثال 3-6:** لتكن لدينا معادلة بواسون الآتية، والموضحة بالشكل (8-3) [36]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) &= 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 1, \quad (x, y) \in \partial\Omega_1 \\ u &= 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_2 \\ u &= 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_3 \end{aligned} \quad (12-3)$$



الشكل (8-3): شبكة المثلثات للمثال (6-3).

**الحل:**

حسب الشكل الموضح أعلاه، لدينا ثلاث عناصر مثلثية، وأربع عقد، ومنه حسب الشروط الحدية المبينة في (٣-١٢)، فإن  $u_4(1.315, 0.76) = 0$ ، ولنوجد كلاً من  $u_1, u_2, u_3$ ، والتي احداثياتها  $(2.63, 0)$ ،  $(0, 0)$ ،  $(1.315, 2.27)$  على التوالي.

العنصر	$N_i$	$N_j$	$N_k$
$e_1$	$-0.382746204x + \frac{100}{151}y$	$1 - \frac{200}{263}x$	$1.143202478x - \frac{100}{151}y$
$e_2$	$\frac{25}{9}y$	$1 - \frac{100}{263}x - \frac{25}{38}y$	$\frac{100}{263}x - \frac{25}{38}y$
$e_3$	$-1 + \frac{100}{263}x + \frac{25}{38}y$	$\frac{227}{76} - \frac{2675}{4997}x - \frac{25}{38}y$	$-\frac{151}{152} + \frac{3775}{4997}x$

الجدول (12-3): دوال الشكل لعناصر الشكل (8-3).

لإيجاد مصفوفات الصلابة لكل عنصر نعوض في العلاقة (3-5) حيث  $g_1 = r = 0$  ، فنجد :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.580874 & 0.288973 & -0.869847 \\ 0.288973 & 0.574144 & -0.863118 \\ -0.869847 & -0.863118 & 1.73297 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.73026 & -0.865132 & -0.865132 \\ -0.865132 & 0.577052 & 0.288078 \\ -0.965132 & 0.288078 & 0.577052 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.573256 & -0.85844 & 0.285184 \\ -0.85844 & 1.71024 & -0.851798 \\ 0.285184 & -0.851798 & 0.566615 \end{pmatrix}$$

ومنه فإن مصفوفة الصلابة العامة هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1.15413 & 0.288973 & -1.728287 & 0.285184 \\ 0.288973 & 1.151196 & -1.72825 & 0.288078 \\ -1.728287 & -1.72825 & 5.17347 & -1.71693 \\ 0.285184 & 0.288078 & -1.71693 & 1.143667 \end{pmatrix}$$

لإيجاد متجه الحمل العام نعوض في العلاقة (3-6)، حيث  $u_4 = 0$  ،  $g_2 = f = 1$  ، فنجد:

$$\beta_j = -\iint_{\Omega} N_j dx dy + \int_{\partial\Omega} N_j ds \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

من أجل  $\beta_1$  الموافق للعقدة الأولى والتي تأخذ الترقيم المحلي  $i$  في كلاً من  $e_1, e_3$ ، وتقع على  $\partial\Omega_1$ :

$$\beta_1 = \iint_{e_1} N_i dx dy + \iint_{e_2} N_i dx dy - \int_{\partial\Omega_1} N_i ds$$

$$\beta_1 = \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{3} - \int_{\partial\Omega_1} N_i ds \quad \text{وحسب }^1 \text{ نجد :}$$

$$\text{حيث } A_1 = A_2 = A_3 = 1.$$

لإيجاد التكامل  $\int_{\partial\Omega_1} N_i ds$  : لنستخدم الرمز  $\sigma$  للمسافة على طول  $\partial\Omega_1$  ومنه :

$$\int_{\partial\Omega_1} N_i ds = \int_{\partial\Omega_1} \frac{\sigma - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} ds$$

<sup>1</sup> لتكن  $\Omega$  منطقة ما مقسمة إلى مثلثات، و لنكن  $L_i, L_j, L_k$  دوال الشكل، عندئذ:  $\int_{\Omega_e} L_i^m L_j^n L_k^p dx dy = 2A_e \frac{m!n!p!}{(m+n+p+2)!}$

حيث  $\Omega_e$  : منطقة المثلث  $e$ ،  $[23] \quad 2A_e = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}$

حيث  $\sigma_1, \sigma_2$  مواقع العقد  $u_1, u_2$  في نظام الإحداثيات  $\sigma$  فنجد:

$$\int_{\partial\Omega_1} \frac{\sigma - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} ds = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1} ds = \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} (\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2(\sigma_2 - \sigma_1)} \right) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = \frac{2.63 - 0}{2} = 1.32$$

وبنفس الطريقة نوجد قيمة هذا التكامل بالنسبة إلى العقدة  $u_2$ ، ولكن هذا التكامل معدوم بالنسبة إلى العقد  $u_3, u_4$  لأنها لاتقع على الخط  $\partial\Omega_1$ .

$$\beta_1 = \frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{3} - 1.32 = -0.654$$

$$\beta_2 = \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{3} - 1.32 = -0.654$$

$$\beta_3 = \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{3} - 0 = 1$$

$$\beta_4 = \frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

ومنه نجد المعادلة المصفوفية :

$$-\begin{pmatrix} 1.15413 & 0.288973 & -1.728287 \\ 0.288973 & 1.151196 & -1.72825 \\ -1.728287 & -1.72825 & 5.17347 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.654 \\ -0.654 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بحل الجملة السابقة نجد:

$$u_1 = 1.113150413, u_2 = 1.116914603, u_3 = 0.5516898814$$

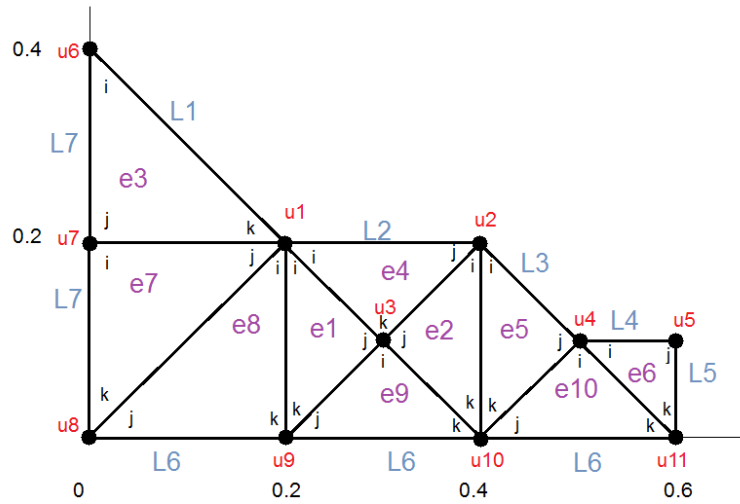
**مثال (7-3):** لتكن لدينا معادلة لابلاس الآتية [17]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 4 & \text{for } (x, y) \in L_6 \text{ and } (x, y) \in L_7 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= x & \text{for } (x, y) \in L_2 \text{ and } (x, y) \in L_4 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= y & \text{for } (x, y) \in L_5 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= \frac{x+y}{\sqrt{2}} & \text{for } (x, y) \in L_1 \text{ and } (x, y) \in L_3 \end{aligned} \quad (13-3)$$

بالشكل الآتي :





الشكل (3-9): شبكة المثلثات للمثال (3-7).

الحل:

حسب الشروط الحدية المبينة في نص المسألة نلاحظ أن  $u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} = 4$  ولنوجد كلاً من العقد :  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ .

نلاحظ من الرسم والتقسيم المبين في الشكل (3-9)، أن العناصر المثلثية غير متشابهة بالشكل والحجم، ومن أجل الترتيب المحلي لتلك العناصر نأخذ أحد المثلثات القائمة وليكن  $e_3$  ونرقم رؤوسه بترقيم محلي عكس عقارب الساعة، وكذلك الأمر بالنسبة إلى لعناصر المشابهة له مثل  $e_7, e_8$  حسب الفقرة (2-2-2-3).

أما بالنسبة إلى باقي المثلثات، نلاحظ أن العنصرين  $e_1, e_9$  مع بعضهما مشابهيان للعنصر  $e_3$  لذلك نرقم  $e_1$  عند العقدة  $u_1$  بالترقيم  $i$ ، ونرقم العقدة  $u_{10}$  في  $e_9$  بالرمز  $k$ ، والعنصرين  $e_2, e_9$  مع بعضهما مشابهيان للعنصر  $e_8$  لذلك نرقم  $e_2$  عند العقدة  $u_2$  بالترقيم  $i$ ، ونرقم العقدة  $u_9$  في  $e_9$  بالرمز  $j$ . وكذلك الأمر بالنسبة إلى العنصرين  $e_1, e_4$ .

وَتُعْطَى دوال الشكل لكل عنصر:

العنصر	$N_i$	$N_j$	$N_k$
$e_1$	$1-5x+5y$	$-2+10x$	$2-5x-5y$
$e_2$	$-2+5x+5y$	$4-10x$	$-1+5x-5y$
$e_3$	$-1+5y$	$2-5x-5y$	$5x$
$e_4$	$1-5x+5y$	$-2+5x+5y$	$2-10y$
$e_5$	$2-5x+5y$	$-4+10x$	$3-5x-5y$

$e_6$	$6-10x$	$-6+10x+10y$	$1-10y$
$e_7$	$-5x+5y$	$5x$	$1-5y$
$e_8$	$5y$	$1-5x$	$5x-5y$
$e_9$	$10y$	$2-5x-5y$	$-1+5x-5y$
$e_{10}$	$10y$	$3-5x-5y$	$-2+5x-5y$

الجدول (3-13): دوال الشكل لعناصر الشكل (3-9).

لنوجد أولاً مصفوفات الصلابة لكل عنصر فنجد:

$$A^{(1)} = A^{(3)} = A^{(5)} = A^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A^{(4)} = A^{(8)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A^{(9)} = A^{(10)} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A^{(7)} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

وبالتجميع نجد أن مصفوفة الصلابة العامة:

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 2.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أما بالنسبة إلى متجهات الحمل:

نلاحظ أن  $f = 0$  ومنه بالعودة إلى العلاقة (3-6)، نجد:

$$\beta_j = \int_{\partial\Omega} g_2 N_j ds - \sum_{i=6}^{11} u_i \alpha_{ij} = I_j - \sum_{i=n+1}^m u_i \alpha_{ij} \quad (j=1, \dots, 5)$$

لنوجد أولاً المتجهات  $I_j$ :

المتجه الأول مرتبط بالخط المستقيم  $L_1$  والعنصر  $e_3$  والعقدة  $u_1$  :

$$I_1^{(3)} = \int_0^{0.2} g_2(x, y) N_1^{(3)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{0.2} \frac{1}{\sqrt{2}} (x + y) (-1 + 5y) \sqrt{2} dx = 0$$

$$I_2^{(3)} = \int_0^{0.2} g_2(x, y) N_2^{(3)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{0.2} (x + 0.2)(1 - 5x) dx = 0.02666666667$$

$$I_3^{(3)} = \int_0^{0.2} g_2(x, y) N_3^{(3)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{0.2} 5x(x + 0.2) dx = 0.03333333333$$

المتجه الثاني مرتبط بالخط المستقيم  $L_2$  والعنصر  $e_4$  والعقدة  $u_2$  :

$$I_1^{(4)} = \int_{0.2}^{0.4} g_2(x, y) N_1^{(4)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{0.2}^{0.4} x(2 - 5x) dx = 0.02666666667$$

$$I_2^{(4)} = \int_{0.2}^{0.4} g_2(x, y) N_2^{(4)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{0.2}^{0.4} x(-1 + 5y) dx = 0.03333333333$$

$$I_3^{(4)} = \int_{0.2}^{0.4} g_2(x, y) N_3^{(4)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{0.2}^{0.4} x(2 - 10y) dx = 0$$

المتجه الثالث مرتبط بالخط المستقيم  $L_3$  والعنصر  $e_5$  والعقدة  $u_4$  :

$$I_1^{(5)} = \int_{0.4}^{0.5} g_2(x, y) N_1^{(5)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{0.4}^{0.5} (x + 0.1)\left(\frac{5}{2} - 5x\right) dx = 0.01333333333$$

$$I_2^{(5)} = \int_{0.4}^{0.5} g_2(x, y) N_2^{(5)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{0.4}^{0.5} (x + 0.1)(-4 + 10x) dx = 0.02833333333$$

$$I_3^{(5)} = \int_{0.4}^{0.5} g_2(x, y) N_3^{(5)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{0.4}^{0.5} (x + 0.1)\left(\frac{5}{2} - 5x\right) dx = 0.01333333333$$

المتجه الرابع مرتبط بالخط المستقيم  $L_4, L_5$  والعنصر  $e_6$  والعقدة  $u_5$  :

$$I_1^{(6)} = \int_{0.5}^{0.6} x(6 - 10x) dx + \int_0^{0.1} y(6 - 10x) dx = 0.02666666667$$

$$I_2^{(6)} = \int_{0.5}^{0.6} x(-5 + 10x) dx + \int_0^{0.1} y(10y) dx = 0.03166666667$$

$$I_3^{(6)} = \int_{0.5}^{0.6} x(0) dx + \int_0^{0.1} y(1 - 10y) dx = 0.00166666667$$

ومنه يمكن حساب متجه الحمل العام:

$$I^{(1)} = I_3^{(3)} + I_1^{(4)} + I_1^{(3)} + I_3^{(3)} + I_1^{(4)} - 4(a_{16} + \dots + a_{111}) = 6.0\bar{6}$$

$$I^{(2)} = I_2^{(4)} + I_1^{(5)} + I_1^{(4)} - 4(a_{26} + \dots + a_{211}) = 0.06\bar{3}$$

$$I^{(3)} = I_3^{(4)} + I_3^{(4)} + I_3^{(4)} + I_3^{(4)} - 4(a_{36} + \dots + a_{311}) = 8$$

$$I^{(4)} = I_2^{(5)} + I_1^{(6)} + I_3^{(6)} - 4(a_{46} + \dots + a_{411}) = 6.05\bar{6}$$

$$I^{(5)} = I_2^{(6)} - 4(a_{56} + \dots + a_{511}) = 2.031\bar{6}$$

فنجد المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.0\bar{6} \\ 0.07\bar{3} \\ 8 \\ 6.05\bar{6} \\ 2.031\bar{6} \end{pmatrix}$$

وبحل جملة المعادلات الجبرية الناتجة، نجد:

$$u_1 = 4.03931, u_2 = 4.08717, u_3 = 4.03162, u_4 = 4.05159, u_5 = 4.05746$$

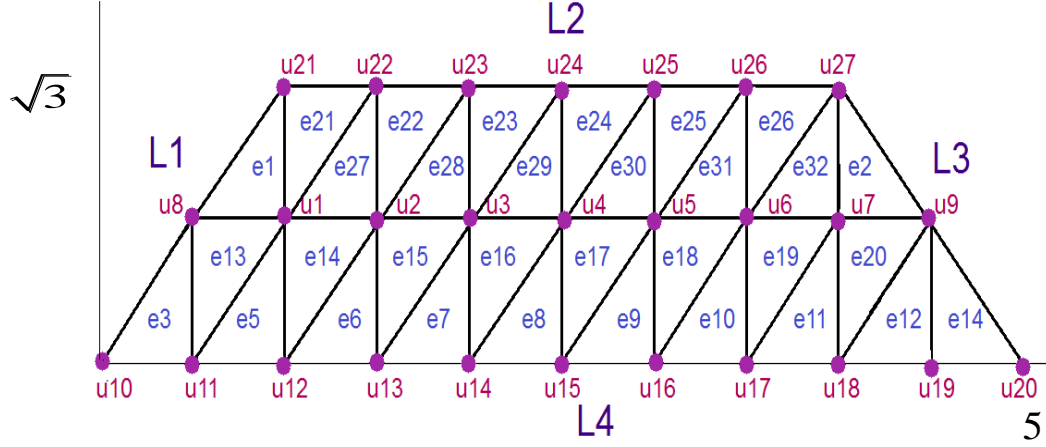
**مثال (3-8):** صفيحة فضية على شكل شبه منحرف تجري فيها الحرارة بشكل موحد ومتولدة في كل نقطة بمعدل  $q = 1.5 \text{ cal/cm}^3$ ، حيث درجة حرارة الحالة المستقرة  $u(x, y)$  تحقق معادلة بواسون:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{q}{k} \quad (14-3)$$

حيث  $k$  الموصلية الحرارية  $k = 1.04 \text{ cal.cm.deg.s}$ ، ولنفرض أن درجة الحرارة مثبتة عند  $15^\circ\text{C}$  على  $L_2$  ويتم فقد تلك الحرارة على الحواف المائلة  $L_3, L_1$  وفقاً للشرط الحدي  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  ولا تضيق على

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ أي } L_4 \text{ الضلع}$$

قرب الحرارة عند العقد المجهولة الناتجة عن تقطيع المنطقة المعطاة بالشكل:



الشكل (3-10): شبكة المثلثات للصفحة المعدنية في المثال (3-8).

حسب الشروط الحدية الموضحة في نص المسألة فإن  $u_{21} = u_{22} = \dots = u_{27} = 15$ ، وبقيّة العقد مجهولة، يتم إيجاد دوال الشكل لجميع العناصر الموضحة بالشكل (3-10)، ثم حساب مصفوفات الصلابة العامة، فنجد:

$$A^{(1)} = A^{(3)} = A^{(5)} = \dots = A^{(12)} = A^{(27)} = \dots = A^{(32)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$A^{(13)} = \dots = A^{(26)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, A^{(2)} = A^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

وبحساب مصفوفة الصلابة العامة  $A$  وقيم متجه الحمل العام كما سبق، نجد:

$$b = \{9.284802684, 55.18118152, 53.39478472, 52.83765326, 53.36050166, 55.10594122, 9.284802684, 4.312269575, 4.312269575, 2.110755056, 0.3122743268, 0.3122743268, 0.3122743268, 0.3122743268, 0.3122743268, 0.3122743268, 0.3122743268, 0.1905371358, 2.110755056\}$$

وبحل جملة المعادلات المصفوفية  $AU = b$ ، نجد:

$$U = \{21.4031, 19.8735, 19.0998, 18.8583, 19.084, 19.8386, 21.3422, 24.1982, 24.1064, 27.5519, 25.1146, 22.9277, 21.3966, 20.5203, 23.2303, 20.4944, 21.3383, 22.8213, 24.9297, 27.367\}$$

### 3-3. طريقة العناصر المنتهية في الإحداثيات المركزية [36]:

ندرس كيفية استخدام الإحداثيات المركزية لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية بطريقة العناصر المنتهية :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (15-3)$$

يُعطى الحل التقريبي لها في الإحداثيات المركزية بالشكل :

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(\xi, \eta) \quad (16-3)$$

حيث  $(\xi, \eta)$  الإحداثيات المركزية لعقد العنصر المستطيلي المراد دراسته في هذه الفقرة، و  $n$  عدد العقد في الشكل المعطى.

وبتطبيق الخطوات السابقة في الفقرة 3-3-2 نجد:

$$\sum_{j=1}^n u_j \left( \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(\xi, \eta) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(\xi, \eta) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_i(\xi, \eta) \phi_j(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_i(\xi, \eta) \phi_j(\xi, \eta) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} \phi_i(\xi, \eta) dl \right) = 0 \quad (17-3)$$

$n$  متجه الناظم،  $i = 1, \dots, n$ .

لنرى الآن كيفية حساب التكامل السابق .

نعلم أن :  $\eta = \eta(x, y)$  ،  $\xi = \xi(x, y)$  ومنه:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

والتي تكتب بالشكل:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (18-3)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad \text{حيث :}$$

ومنه :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (19-3)$$

ولإيجاد كلاً من  $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$  نتبع ما يلي:

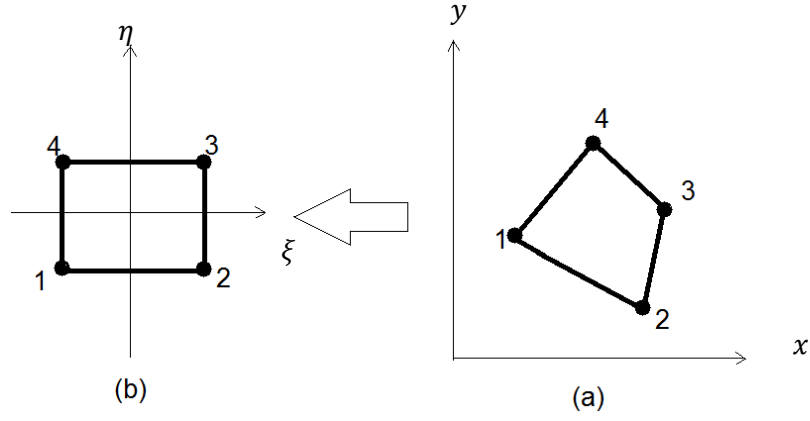
نعلم أن :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \phi_i(\xi, \eta) \quad , \quad y = \sum_{i=1}^n y_i \phi_i(\xi, \eta) \quad (20-3)$$

حيث  $\phi_i(\xi, \eta)$  هي  $N_i(\xi, \eta)$  دوال الشكل المعطاة بالعلاقة (2-80).

**ملاحظة (1-3):**

تفيد العلاقات السابقة في انتقال موقع عقد الشكل المُعطى في الإحداثيات الديكارتية إلى موقع آخر في الإحداثيات المركزية، مع المحافظة على عدد عقد الشكل، كمثال على ذلك :



**الشكل (11-3):** تطبيق من (a): شكل رباعي إختياري إلى (b) مربع الوحدة.

لتكن الإحداثيات الديكارتية لعقد الشكل الرباعي:  $1 = (2, 2)$ ,  $2 = (3.7, 1)$ ,  $3 = (4, 2.5)$ ,  $4 = (3, 3)$

وتكون مطابقة العقد في الشكلين كما يلي:

من أجل العقدة  $(\xi = -1, \eta = 1)$ :

$$x = x_1\phi_1(-1,1) + x_2\phi_2(-1,1) + x_3\phi_3(-1,1) + x_4\phi_4(-1,1) = 3$$

$$y = y_1\phi_1(-1,1) + y_2\phi_2(-1,1) + y_3\phi_3(-1,1) + y_4\phi_4(-1,1) = 3$$

ومنه فإن العقدة الرابعة من الشكل (a-11-3) هي العقدة  $(\xi = -1, \eta = 1)$  في (b-11-3)، ومن أجل بقية العقد:

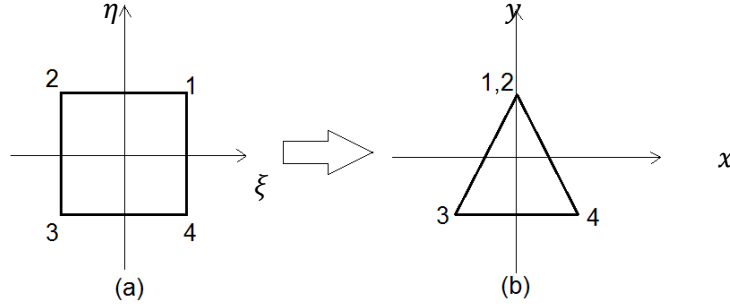
العقدة	الإحداثيات الديكارتية	الإحداثيات المركزية
1	(2, 2)	(-1, -1)
2	(3.7, 1)	(1, -1)
3	(4, 2.5)	(1, 1)
4	(3, 3)	(-1, 1)

**الجدول (14-3):** الإحداثيات المركزية لعقد الشكل (a-11-3).

**ملاحظة (٣-٢):**

تفيد أيضاً العلاقات (20-3)، (80-2)، في الإنتقال من مربع الوحدة في الإحداثيات المركزية إلى مثلث في الإحداثيات الديكارتية، كما في الشكل:





**الشكل (12-3):** تطبيق الانتقال من (a) مربع وحدة في الإحداثيات المركزية إلى (b) مثلث في الإحداثيات الديكارتية .

من أجل تحقق ذلك، نعوض في (20-3) كل  $x_2$  بالإحداثي  $x_1$ ، ونجري مقابلة العقد كما مرّ في المثال السابق.

### ملاحظة (3-3):

بتعميم ماسبق في الملاحظة (1-3)، نجد أنه يمكن أيضاً تحويل المستطيل التربيقي إلى مثلث تربيقي، و المستطيل التكميبي إلى مثلث من نفس النوع، وهكذا أصبح بإمكاننا تحويل متوازي المستطيلات إلى هرم وذلك بدمج عقد وجهه الأعلى الأربعة بعقدة واحدة، ودمج عقدتين اختيارييتين من وجهه السفلي.

بالعودة إلى حساب جاكوبيان التحويل :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_i(\xi, \eta) = x_1 \left[ \frac{1}{4}(-1+\eta) \right] + x_2 \left[ \frac{1}{4}(1-\eta) \right] + x_3 \left[ \frac{1}{4}(1+\eta) \right] + x_4 \left[ \frac{1}{4}(-1-\eta) \right] \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial}{\partial \eta} \phi_i(\xi, \eta) = x_1 \left[ \frac{1}{4}(-1+\xi) \right] + x_2 \left[ \frac{1}{4}(-1-\xi) \right] + x_3 \left[ \frac{1}{4}(1+\xi) \right] + x_4 \left[ \frac{1}{4}(1-\xi) \right] \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_i(\xi, \eta) = y_1 \left[ \frac{1}{4}(-1+\eta) \right] + y_2 \left[ \frac{1}{4}(1-\eta) \right] + y_3 \left[ \frac{1}{4}(1+\eta) \right] + y_4 \left[ \frac{1}{4}(-1-\eta) \right] \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial}{\partial \eta} \phi_i(\xi, \eta) = y_1 \left[ \frac{1}{4}(-1+\xi) \right] + y_2 \left[ \frac{1}{4}(-1-\xi) \right] + y_3 \left[ \frac{1}{4}(1+\xi) \right] + y_4 \left[ \frac{1}{4}(1-\xi) \right]\end{aligned}$$

ومنه فإن الجاكوبيان:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1+\eta & 1-\eta & 1+\eta & -1-\eta \\ -1+\xi & -1-\xi & -1-\xi & 1-\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix} \quad (21-3)$$

ولنرمز :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} y_1(-1+\xi)+y_2(-1-\xi) & -y_1(-1+\eta)-y_2(1-\eta) \\ +y_3(1+\xi)+y_4(1-\xi) & -y_3(1+\eta)-y_4(-1-\eta) \\ -x_1(-1+\xi)-x_2(-1-\xi) & x_1(-1+\eta)+x_2(1-\eta) \\ -x_3(-1-\xi)-x_4(1-\xi) & +x_3(1+\eta)+x_4(-1-\eta) \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

نعوض في (18-3)، نجد:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det J} A \times b \quad (22-3)$$

ومنه بتعويض (19-3) في (17-3)، نجد التكاملات اللازمة لإيجاد مصفوفات الصلابة

**مثال (9-3):** لتكن لدينا مسألة توزيع الحرارة في المستوي، أوجد الحل التقريبي لمعادلتها المعطاة بالشكل [36]:

$$6 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$$

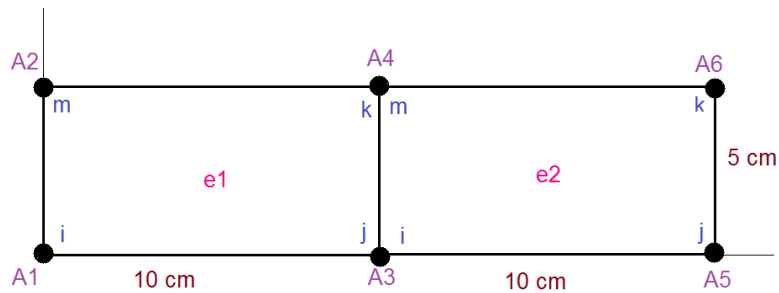
$$T(x, y) = 6 \quad x = 0, \quad y \in [0, 5]$$

$$T(x, y) = 12 \quad x = 20, \quad y \in [0, 5]$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad y = 0, \quad x \in [0, 20]$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad y = 5, \quad x \in [0, 20]$$

أما المنطقة المدرسة فهي بالشكل :



**الشكل (13-3):** شبكة المستطيلات للمثال (9-3).

الحل:

حسب الشروط الحدية المبينة في نص المسألة نجد أن:

$$T_1 = T_2 = 6, \quad T_5 = T_6 = 12$$

ولنوجد كلاً من  $T_3, T_4$ ، وذلك باستخدام طريقة العناصر المنتهية في الإحداثيات المركزية .

من الشكل (3-13)، لدينا عنصرين فقط، ولكل عنصر أربع دوال شكل في الإحداثيات المركزية تُعطى بالعلاقات (2-80)، لنوجد مصفوفة الصلابة لكل عنصر:

بالنسبة إلى العنصر الأول :

لإيجاد القيم العددية لعناصر مصفوفة الصلابة نطبق العلاقة الآتية :

$$a_{ij} = \int_{e_1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(\xi, \eta) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(\xi, \eta) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(\xi, \eta) dx dy$$

لنوجد على سبيل المثال العنصر  $a_{12}$ ، حيث :

$$a_{12} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(\xi, \eta) \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(\xi, \eta) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\xi, \eta) \det[J] d\xi d\eta \quad (23-3)$$

حسب (3-18) و (3-21)، نجد :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1+\eta & 1-\eta & 1+\eta & -1-\eta \\ -1+\xi & -1-\xi & -1-\xi & 1-\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1+\eta & 1-\eta & 1+\eta & -1-\eta \\ -1+\xi & -1-\xi & -1-\xi & 1-\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 0 \\ 10 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (24-3)$$

وبنفس الطريقة السابقة نجد أن:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (25-3)$$

ونلاحظ أن :

$$\det J = \det \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \frac{25}{2} \quad (26-3)$$

نعوض (24-3)، (25-3)، (26-3) في (23-3)، نجد :

$$a_{12} = \det J \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{5} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \left( \frac{1}{5} \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \left( \frac{1}{5} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \left( \frac{1}{5} \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \frac{1}{6}$$

وبنفس الأسلوب والخطوات السابقة نوجد بقية عناصر مصفوفة الصلابة للعنصر الأول والثاني فنجد:

$$A^{(1)} = A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{12} & \frac{-7}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-7}{12} & \frac{-5}{12} \\ \frac{-5}{12} & \frac{-7}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-7}{12} & \frac{-5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

ومنه فإن مصفوفة الصلابة العامة هي:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{12} & 0 & 0 \\ \frac{-7}{12} & \frac{5}{6} & \frac{-5}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{-5}{12} & \frac{5}{6} & \frac{-7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{12} \\ \frac{-5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{12} & \frac{5}{6} & \frac{-5}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{-5}{12} & \frac{5}{6} & \frac{-7}{12} \\ 0 & 0 & \frac{-5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{12} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

وبالنسبة إلى مركبات متجه الحمل  $6 \times 1$ ، نلاحظ أنه لما كان  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  فإن  $f_1 = \dots = f_6 = 0$ ، ومنه

فإن:

$$-\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 = 0 \\ f_4 = 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{31}T_1 + a_{32}T_2 + a_{35}T_5 + a_{36}T_6 \\ a_{41}T_1 + a_{42}T_2 + a_{45}T_5 + a_{46}T_6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

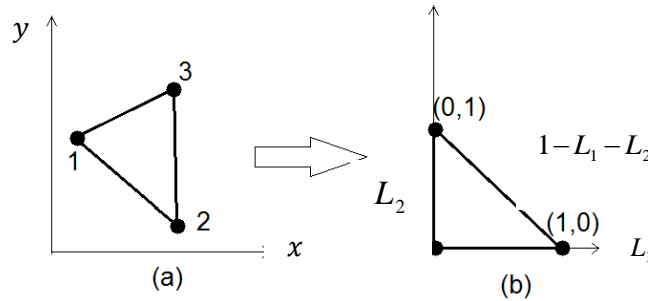
ومنه فإن الحل التقريبي هو:

$$T = T_1(\phi_1(\xi, \eta)) + T_3(\phi_1(\xi, \eta) + \phi_2(\xi, \eta)) + T_5(\phi_2(\xi, \eta)) \\ + T_6(\phi_3(\xi, \eta)) + T_4(\phi_3(\xi, \eta) + \phi_4(\xi, \eta)) + T_2(\phi_4(\xi, \eta))$$

### 3-4. طريقة العناصر المنتهية في إحداثيات المساحة:

نستطيع في هذه الطريقة إعادة جميع الأشكال المعطاة في الإحداثيات الديكارتية إلى أشكال في إحداثيات المساحة، ويتم ذلك بسحب العنصر المراد دراسته إلى نقطة المبدأ في جملة إحداثيات المساحة.

ليكن لدينا الشكل الآتي:



الشكل (3-14): الإنتقال من الإحداثيات الديكارتية في (a) إلى إحداثيات المساحة في (b)

نعلم أن دوال الشكل للمثلث الخطي في إحداثيات المساحة هي  $N_1 = L_1, N_2 = L_2, N_3 = L_3$ ، ولما كان الفضاء ثنائي البعد نأخذ  $N_3 = 1 - L_1 - L_2$ ، فنجد:

$$x = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 (1 - L_1 - L_2), \quad y = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 (1 - L_1 - L_2)$$

وبمقابلة العقد نجد الجدول الآتي :

العقدة	الإحداثيات الديكارتية	إحداثيات المساحة
1	(1,2)	(1,0)
2	(3,1)	(0,1)
3	(2,3)	(0,0)

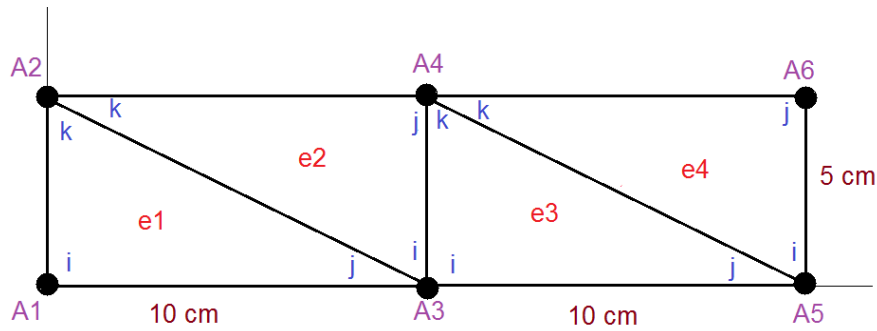
الجدول (3-15): إحداثيات المساحة لعقد الشكل (3-14-a).

بإتباع الخطوات الموضحة بالعلاقات (3-16) إلى (3-22) نجد :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i(L_1, L_2)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i(L_1, L_2)}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & -y_1 + y_3 \\ -x_2 + x_3 & x_1 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i(L_1, L_2)}{\partial L_1} \\ \frac{\partial \phi_i(L_1, L_2)}{\partial L_2} \end{pmatrix} \quad (27-3)$$

بحل المثال (3-9) بإستخدام إحداثيات المساحة وفقاً للشكل (3-13)، نجد:

يتم تقسيم المنطقة إلى أربع مثلثات حسب الشكل :



الشكل (3-15): شبكة المثلثات للمثال (3-9).

كما هو موضح في الشكل السابق لدينا أربع مثلثات، ومنه أربع مصفوفات صلابة لكل عنصر، بتطبيق العلاقة (3-27) في كل مثلث نجد:

في المثلث الأول والثالث:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{-1}{10}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{-1}{5}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{1}{10}, \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = 0, \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = \frac{1}{5}$$

في المثلث الثاني والرابع:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{-1}{5}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{1}{10}, \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{1}{5}, \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = \frac{-1}{10}, \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = 0$$

فنجد مصفوفات الصلابة :

$$A^{(1)} = A^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-1}{4} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ومنه تصبح مصفوفة الصلابة العامة:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -1 & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{10}{4} & -2 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & -2 & \frac{10}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & -1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

ومن ثم نجد :

$$-\begin{pmatrix} \frac{10}{4} & -2 \\ -2 & \frac{10}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow T_3 = T_4 = 9$$

وهو نفس الجواب الذي حصلنا عليه في الإحداثيات المركزية.

### 3-5. ملخص الفصل الثالث:

عُرض في هذا الفصل الخطوات كاملة للوصول للحل التقريبي للمعادلات الناقصية الخطية ببُعدين بطريقة العناصر المنتهية في الإحداثيات الديكارتية والمركزية والمساحة، وتم عرض مجموعة كبيرة من الأمثلة التوضيحية بشروط حدية تختلف من مثال لآخر، وتم شرح طرائق إيجاد كل مايلزم من مصفوفات و أرقام ومتجهات للوصول للحل التقريبي.

## الفصل الرابع:

### الحلول التقريبية للمعادلات الناقصية غير الخطية ببعدين بطريقة العناصر المنتهية

#### 4-1. مقدمة:

تم تطوير التقنيات العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية بسرعة كبيرة في السنوات الأخيرة للحصول على الحل التقريبي، وذلك نظراً لتطبيقاتها الواسعة في جميع فروع العلوم والهندسة، فمن الضروري تقريب الحل عددياً لأن الحل الفعلي عادةً ما يكون غير متوفر.

ناقشنا في هذا الفصل الحل التقريبي لبعض المعادلات الناقصية غير الخطية بطريقة العناصر المنتهية، والتي تختلف طريقة إيجاد حلها التقريبي عن المعادلات الخطية، حيث تحتاج طريقة العناصر المنتهية عند إيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية غير الخطية إلى طرائق تكرارية للوصول إلى النتائج المطلوب إيجادها، مثل ( طريقة نيوتن غاوس، طريقة نيوتن غالاركين، طريقة بيكاردي التكرارية، تحسين طريقة نيوتن رافسون من خلال طريقة تفريق أدميان المعدلة....). وفي بعض الأحيان تحتاج طريقة العناصر المنتهية لطرائق أخرى، فيتم دمج الطريقتين بطريقة واحدة، حيث دمجنا في هذا الفصل طريقة العناصر المنتهية مع طريقة تحليل الهوموتوبي.

قمنا في هذا الفصل بإيجاد الحل التقريبي لبعض المعادلات الناقصية غير الخطية مثل (معادلات بواسون و لابلاس غير الخطية، المعادلة اللوجستية، ومعادلة Ginzburg\_Landau جنزبر لانداو).

#### 4-2. معادلة بواسون غير الخطية Nonlinear Poisson Equation:

تُعطى معادلة بواسون غير الخطية بالمعادلة الآتية:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a(u) \nabla u) &= f(x, y) & \text{in } \Omega \\ u(x, y) &= g(x, y) & \text{on } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} + g_1(x, y)u(x, y) &= g_2(x, y) & \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1-4)$$

حيث  $a, f, g, g_1, g_2$  دوال معرفة ومستمرة في  $\mathbb{R}^2$  وتتعلق بمعطيات المسألة المطروحة.  $u$  دالة في  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ،  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ،  $f \in C^1(\bar{\Omega})$ ،  $g, g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$ ،  $a \in C(\Omega)$  تجعل المعادلة السابقة معادلة غير خطية.

ولإيجاد الحل التقريبي بطريقة العناصر المنتهية للمعادلة التفاضلية غير الخطية هناك عدة طرائق:



#### 4-2-1. طريقة نيوتن\_ غاوس التكرارية Gauss–Newton iterative method:

سنبدأ الآن بتطبيق طريقة العناصر المنتهية على معادلة بواسون غير الخطية وذلك بتطبيق طريقة نيوتن\_غاوس التكرارية على المعادلات الجبرية غير الخطية الناتجة عن تطبيق خطوات طريقة العناصر المنتهية، ليكن لدينا المثال الآتي:

**مثال (4-1):** لتكن لدينا معادلة بواسون غير الخطية:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot ((1+u) \nabla u) &= 0 \\ u &= 0 \quad ; x = 0 \\ u &= 1 \quad ; x = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad ; y = 0, y = 1 \end{aligned}$$

لنوجد الحل التقريبي للمسألة السابقة بطريقة العناصر المنتهية:

تُكتب المعادلة بالصيغة:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot ((1+u) \nabla u) &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left( (1+u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( (1+u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0 \\ -\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - (1+u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - (1+u) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ -\left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) - (1+u) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

نضرب طرفي المعادلة الأخيرة بدالة الوزن  $v \in V$ ، ثم نكامل:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } x = 0, v = 1 \text{ on } x = 1\} \text{ حيث:}$$

$$-\iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] v \, dx dy - \iint_{\Omega} (1+u) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) v \, dx dy = 0$$

بالمكاملة بالتجزئة للحد الثاني، نجد:

$$\begin{aligned}
& -\iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] v \, dx dy - \int_{\partial\Omega} (1+u)v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ds + \iint_{\Omega} (1+u) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy \\
& + \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] v \, dx dy = + \iint_{\Omega} (1+u) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\partial\Omega} (1+u)v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ds = 0 \\
& + \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{\Omega} u \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\partial\Omega} v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ds - \int_{\partial\Omega} u v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ds = 0
\end{aligned}$$

نعوض كل  $u$  بعباراة الحل  $u = \sum_{i=1}^n N_i u_i$ ، وكل  $v$  بدالة الشكل  $N_j$ .

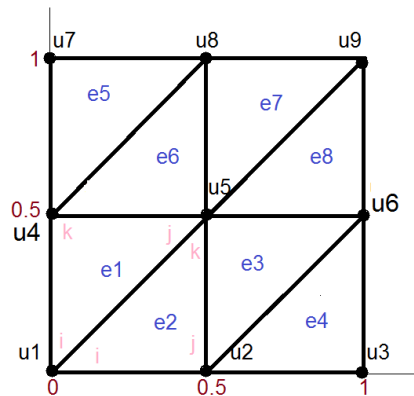
$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n u_i \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy + \\
& \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2 \iint_{\Omega} N_i \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\
& - \sum_{i=1}^n u_i \int_{\partial\Omega} N_j \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) ds - \\
& \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2 \int_{\partial\Omega} N_i N_j \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds = 0 \quad ; j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{12-4}$$

نرمز للمعادلة (١٢-٤) بالرمز  $\rho(U)$ ، حيث يتم حل نظام المعادلات غير الخطية (12-4) باستخدام طريقة نيوتن غاوس التكرارية، حيث نفرض حلاً تخمينياً  $U^{(m)}$ ، ولإيجاد  $U^{(m+1)}$ :

$$U^{(m+1)} = U^{(m)} - P^{-1}(U^{(m)}) \rho(U^{(m)})$$

$$P(U^{(m)}) = \left( \frac{\partial \rho(U^{(m)})}{\partial U^{(m)}} \right) \quad \text{حيث}$$

بتقسيم المنطقة المعطاة إلى مثلثات، نجد:



الشكل (1-4): شبكة المثلثات للمثال (1-4).

وبإيجاد دوال الشكل لجميع العناصر المثلثية، نجد:

العنصر	$N_i$	$N_j$	$N_k$
$e_1$	$1-2y$	$2x$	$-2x+2y$
$e_2$	$1-2x$	$2x-2y$	$2y$
$e_3$	$1-2y$	$-1+2x$	$1-2x+2y$
$e_4$	$2-2x$	$-1+2x-2y$	$2y$
$e_5$	$2-2y$	$2x$	$-1-2x+2y$
$e_6$	$1-2x$	$1+2x-2y$	$-1+2y$
$e_7$	$2-2y$	$-1+2x$	$-2x+2y$
$e_8$	$2-2x$	$2x-2y$	$-2+2y$

الجدول (1-4): دوال الشكل للمثال (1-4).

نعوض دوال الشكل في الجدول (1-4)، في العلاقة (4-12)، نجد أن مصفوفات الصلابة هي :

$$\begin{aligned}
A^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{6}u_1^2 & 0 & -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{6}u_1^2 \\ 0 & \frac{1}{2}u_5 - \frac{1}{6}u_5^2 & -\frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{6}u_5^2 \\ -\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{6}u_4^2 & -\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{6}u_4^2 & u_4 - \frac{1}{3}u_4^2 \end{pmatrix}, A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{6}u_1^2 & -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{6}u_1^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{6}u_2^2 & u_2 - \frac{1}{3}u_2^2 & -\frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{6}u_5^2 \\ 0 & -\frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{6}u_5^2 & \frac{1}{2}u_5 - \frac{1}{6}u_5^2 \end{pmatrix} \\
A^{(3)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{6}u_2^2 & 0 & -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{6}u_2^2 \\ 0 & \frac{1}{2}u_6 - \frac{1}{6}u_6^2 & -\frac{1}{2}u_6 + \frac{1}{6}u_6^2 \\ -\frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{6}u_5^2 & -\frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{6}u_5^2 & u_5 - \frac{1}{3}u_5^2 \end{pmatrix}, A^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{6}u_2^2 & -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{6}u_2^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{6}u_3^2 & u_3 - \frac{1}{3}u_3^2 & -\frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{6}u_3^2 \\ 0 & -\frac{1}{2}u_6 + \frac{1}{6}u_6^2 & \frac{1}{2}u_6 - \frac{1}{6}u_6^2 \end{pmatrix} \\
A^{(5)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{6}u_4^2 & 0 & -\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{6}u_4^2 \\ 0 & \frac{1}{2}u_8 - \frac{1}{6}u_8^2 & -\frac{1}{2}u_8 + \frac{1}{6}u_8^2 \\ -\frac{1}{2}u_7 + \frac{1}{6}u_7^2 & -\frac{1}{2}u_7 + \frac{1}{6}u_7^2 & u_7 - \frac{1}{3}u_7^2 \end{pmatrix}, A^{(6)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{6}u_4^2 & -\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{6}u_4^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{6}u_5^2 & u_5 - \frac{1}{3}u_5^2 & -\frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{6}u_5^2 \\ 0 & -\frac{1}{2}u_8 + \frac{1}{6}u_8^2 & \frac{1}{2}u_8 - \frac{1}{6}u_8^2 \end{pmatrix} \\
A^{(7)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_5 - \frac{1}{6}u_5^2 & 0 & -\frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{6}u_5^2 \\ 0 & \frac{1}{2}u_9 - \frac{1}{6}u_9^2 & -\frac{1}{2}u_9 + \frac{1}{6}u_9^2 \\ -\frac{1}{2}u_8 + \frac{1}{6}u_8^2 & -\frac{1}{2}u_8 + \frac{1}{6}u_8^2 & u_8 - \frac{1}{3}u_8^2 \end{pmatrix}, A^{(8)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_5 - \frac{1}{6}u_5^2 & -\frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{6}u_5^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}u_6 + \frac{1}{6}u_6^2 & u_6 - \frac{1}{3}u_6^2 & -\frac{1}{2}u_6 + \frac{1}{6}u_6^2 \\ 0 & -\frac{1}{2}u_9 + \frac{1}{6}u_9^2 & \frac{1}{2}u_9 + \frac{1}{6}u_9^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

وبالتجميع نجد مصفوفة الصلابة العامة:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 - \frac{1}{3}u_1^2 & -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{6}u_1^2 & 0 & -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{6}u_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{6}u_2^2 & 2u_2 - \frac{2}{3}u_2^2 & -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{6}u_2^2 & 0 & -u_2 + \frac{1}{3}u_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{6}u_3^2 & u_3 - \frac{1}{3}u_3^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{6}u_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{6}u_4^2 & 0 & 0 & 2u_4 - \frac{2}{3}u_4^2 & -u_4 + \frac{1}{3}u_4^2 & 0 & -\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{6}u_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & -u_5 + \frac{1}{3}u_5^2 & 0 & -u_5 + \frac{1}{3}u_5^2 & 4u_5 - \frac{4}{3}u_5^2 & -u_5 + \frac{1}{3}u_5^2 & 0 & -u_5 + \frac{1}{3}u_5^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}u_6 + \frac{1}{6}u_6^2 & 0 & 0 & 0 & -u_6 + \frac{1}{3}u_6^2 & 2u_6 - \frac{2}{3}u_6^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}u_6 - \frac{1}{6}u_6^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}u_7 + \frac{1}{6}u_7^2 & 0 & 0 & u_7 - \frac{1}{3}u_7^2 & -\frac{1}{2}u_7 + \frac{1}{6}u_7^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u_8 + \frac{1}{3}u_8^2 & 0 & -\frac{1}{2}u_8 + \frac{1}{6}u_8^2 & 2u_8 - \frac{2}{3}u_8^2 & -\frac{1}{2}u_8 + \frac{1}{6}u_8^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}u_9 - \frac{1}{6}u_9^2 & 0 & -\frac{1}{2}u_9 + \frac{1}{6}u_9^2 & u_9 - \frac{1}{3}u_9^2 \end{pmatrix}$$

إن العقد المجهولة المراد معرفة قيمتها هي  $u_2, u_5, u_8$ ، بالتجميع حسب (4-12)، نحصل على المعادلات غير الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= u_2 - \frac{1}{3}u_2^2 = 0 \\ \rho_2 &= 2u_5 - \frac{2}{3}u_5^2 = 0 \\ \rho_3 &= u_8 - \frac{1}{3}u_8^2 = 0 \end{aligned} \quad (13-4)$$

بأخذ الحل الابتدائي  $(u_2 = 0.06, u_5 = 0.07, u_8 = 0.08)$ ، وحل الجملة السابقة، نجد:

$k$	$u_2^{(k)}$	$u_5^{(k)}$	$u_8^{(k)}$
0	0.06	0.07	0.08
1	$-5.204 \times 10^{-7}$	$-9.77334 \times 10^{-7}$	$-1.69025 \times 10^{-6}$
2	$-9.02719 \times 10^{-14}$	$-3.18394 \times 10^{-13}$	$-9.5231 \times 10^{-13}$
3	$-2.7263 \times 10^{-27}$	$-3.38264 \times 10^{-26}$	$-3.02317 \times 10^{-25}$
4	0	0	0

الجدول (4-2): حلول المثال (4-1).

وبالتعويض في عبارة الحل العام:

$$u_h = 8x - 4 + u_2(-4y + 3) + u_5(6) + u_8(4y - 1)$$

نجد:

$$u_h^{(0)} = 8x + 0.08y - 3.48$$

$$u_h^{(1)} = 8x - 0.0000046794y - 4.000005735$$

$$u_h^{(2)} = 8x - 3.4481524 \times 10^{-12}y - 4$$

$$u_h^{(3)} = 8x - 1.1983628 \times 10^{-24}y - 4$$

$$u_h^{(4)} = 8x - 4$$

#### 2-2-4. طريقة نيوتن - غالاركين Newton-Galerkin method [12]:

تُعرف هذه الطريقة بطريقة نيوتن للمعادلات الجبرية غير الخطية، وتُعرف بطريقة نيوتن \_ غالاركين للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، حيث تعتمد على تحويل المعادلة غير الخطية إلى معادلة خطية وتحتاج إلى حل ابتدائي كما يلي :

**الخطوة الأولى:** نضرب طرفي المعادلة (1-4) بدالة الاختبار  $v \in V = H_0^1(\Omega)$ :

$$(a(u) \nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad ; \forall v \in V \quad (2-4)$$

**الخطوة الثانية:** نكتب الحل على شكل مجموع:

$$u = u^0 + \delta u \quad (3-4)$$

$u^0$ : الحل الابتدائي،  $\delta u$ : دالة التصحيح.

**الخطوة الثالثة:** نعوض (3-4) في (2-4)، نجد:

$$(a(u^0 + \delta u) \nabla(u^0 + \delta u), \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (4-4)$$

حسب منشور تايلور:

$$a(u^0 + \delta u) = a(u^0) + a'_u(u^0) \delta u + O(\delta u^2) \quad (5-4)$$

نعوض (5-4) في (4-4)، نجد:

$$\left( (a(u^0) + a'_u(u^0) \delta u + O(\delta u^2)) \nabla(u^0 + \delta u), \nabla v \right) = (f, v) \quad ; \forall v \in V$$

**الخطوة الرابعة:** نهمل جميع الحدود المتعلقة بدالة التصحيح  $\delta u$  من الدرجة الثانية، نجد معادلة خطية بالتصحيح  $\delta u$ ، ولنوجد  $\delta u \in V$ :

$$\left( a(u^0) \nabla \delta u + a'_u(u^0) \delta u \nabla u^0, \nabla v \right) = (f, v) - \left( a(u^0) \nabla u^0, \nabla v \right) \quad ; \forall v \in V$$

الخطوة الخامسة: نوجد  $\delta u$  ثم نعوض في (3-4) لنحصل على حل جديد.

لتكن  $\kappa = \{k\}$  شبكة من العناصر المثلثية في المنطقة  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ، وليكن  $V_h \subset V$  فضاء الدوال الخطية والمستمرة قطعياً على  $\kappa$ ، نستبدل الفضاء  $V$  بالفضاء  $V_h$  للحصول على تقريب العناصر المنتهية للصيغة الضعيفة، ولنوجد  $\delta u_h \in V_h$ :

$$\left( a(u_h^0) \nabla \delta u_h + a'_u(u_h^0) \delta u_h \nabla u_h^0, \nabla v \right) = (f, v) - \left( a(u_h^0) \nabla u_h^0, \nabla v \right) \quad ; \forall v \in V_h$$

نستبدل كل  $v$  بدوال الشكل  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )، حيث  $n$ : عدد العقد.

$$\left( a(u_h^0) \nabla \delta u_h + a'_u(u_h^0) \delta u_h \nabla u_h^0, \nabla \varphi_i \right) = (f, \varphi_i) - \left( a(u_h^0) \nabla u_h^0, \nabla \varphi_i \right) \quad (6-4)$$

ويمكن أن نكتب:

$$\delta u_h = \sum_{j=1}^n d_j \varphi_j \quad (7-4)$$

حيث  $d_j$  قيم عقد الشبكة، نعوض (7-4) في (6-4)، نجد:

$$\sum_{j=1}^n d_j \left( a(u_h^0) \nabla \varphi_j + a'_u(u_h^0) \varphi_j \nabla u_h^0, \nabla \varphi_i \right) = (f, \varphi_i) - \left( a(u_h^0) \nabla u_h^0, \nabla \varphi_i \right) \quad (8-4)$$

فنجد  $n$  معادلة جبرية خطية بالمجهول  $d_j$ :

$$JD = R$$

$$J = (j_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad ; \quad D = (d_j)_{1 \leq j \leq n} \quad ; \quad R = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$$

$$j_{ij} = \left( a(u_h^0) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) + \left( a'_u(u_h^0) \varphi_j \nabla u_h^0, \nabla \varphi_i \right) \quad ; i, j = 1, \dots, n$$

$$r_i = (f, \varphi_i) - \left( a(u_h^0) \nabla u_h^0, \nabla \varphi_i \right) \quad ; i = 1, \dots, n$$

وبحل الجملة السابقة نجد  $\delta u_h^{(0)}$ ، نعوض في (٤-٣) فنجد  $u_h^{(1)}$ ، وهكذا نجد جملة المعادلات الجبرية:

$$J^{(k)} D^{(k)} = R^{(k)}$$

$$j_{ij}^{(k)} = \left( a(u_h^{(k)}) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) + \left( a'_u(u_h^{(k)}) \varphi_j \nabla u_h^{(k)}, \nabla \varphi_i \right) \quad ; i, j = 1, \dots, n$$

$$r_i^{(k)} = (f, \varphi_i) - \left( a(u_h^{(k)}) \nabla u_h^{(k)}, \nabla \varphi_i \right) \quad ; i = 1, \dots, n$$

نوجد  $\delta u_h^{(k)}$  ثم نوجد  $u_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} + \delta u_h^{(k)}$ ، نتوقف عندما يصبح  $\|\delta u_h^{(k)}\| < \varepsilon = 10^{-5}$ .

مثال (2-4): لتكن لدينا معادلة بواسون غير الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left( \left( \frac{1}{8} + u^2(x, y) \right) \nabla u(x, y) \right) &= 1 \quad ; (x, y) \in [0, 1] \\ u &= 0 \quad ; (x, y) \in \partial[0, 1] \end{aligned} \quad (9-4)$$

و بحد ابتدائي  $u_5 = 0.5$ .

الحل:

بتقسيم المنطقة المعطاة إلى مثلثات حسب الشكل (1-4)، ومراعاة الشروط الحدية، نجد أن العقدة  $u_5$  هي العقدة المجهولة.

ولتطبيق الخطوات الموضحة في الفقرة 2-1-2-4، نحتاج للدوال الآتية:

$$\begin{aligned} u_h^{(0)} &= 0.5(6) = 3 \\ a(u) &= \frac{1}{8} + u^2 \Rightarrow a(u_h^{(0)}) = 9.125 \\ a'_u(u_h^{(0)}) &= 6, \quad \nabla u_h^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10-4)$$

نعوض (10-4) في (8-4)، نجد:

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \int_{\Omega} (9.125) \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \\ r_i &= \int_{\Omega} N_i dx dy \end{aligned} \quad (11-4)$$

بتعويض دوال الشكل الموضحة في الجدول (1-4) في (11-4)، نجد:

$$\begin{aligned} J^{(1)} = J^{(5)} = J^{(3)} = J^{(7)} &= \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & -1.5 \\ -1.5 & -1.5 & 3 \end{pmatrix}, \quad J^{(2)} = J^{(6)} = J^{(4)} = J^{(8)} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \\ r^{(1)} = r^{(5)} = r^{(2)} = r^{(6)} = r^{(3)} = r^{(7)} = r^{(4)} = r^{(8)} &= \begin{pmatrix} 0.0416667 \\ 0.0416667 \\ 0.0416667 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ومنه نجد:

$$12u_5 = 0.2500002 \Rightarrow u_5 = 0.02083335$$

$$\Rightarrow \delta u_h^{(0)} = 0.1250001$$

$$\Rightarrow u_h^{(1)} = u_h^{(0)} + \delta u_h^{(0)} = 3.1250001$$

لإيجاد بقية الحلول نتبع نفس الخطوات السابقة، حتى نجد  $\|\delta u_h^{(5)}\| < 10^{-5}$ :

$k$	$u_h^{(k)}$	$\delta u_h^{(k)}$	$\ \delta u_h^{(k)}\ $
0	3	0.1250001	0.125
1	3.1250001	-0.1186809796	0.1118682261
2	3.00631912037	0.03460656445	0.03460650228
3	3.04092568482	0.000086191	0.000086191
4	3.040011876	0.0000237076	0.00002370759
5	3.0400355836	0.00000061976	0.00000061975
6	3.04003496384		

الجدول (3-4): الحلول التقريبية للمثال (2-4).

#### 3-2-4. طريقة بيكارد التكرارية Piccard Iteration Method [11]:

تعد طريقة بيكارد التكرارية من الطرائق الهامة للتعامل مع المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، تعتمد هذه الطريقة على تعويض الحل الابتدائي في الدالة غير الخطية  $a(u)$ ، وتُعرف هذه الإستراتيجية بطريقة البدائل المتتالية، فإذا كانت لدينا معادلة بواسون غير الخطية (1-4)، ليكن  $u^{(0)}$  حلاً ابتدائياً معطى، نعوض الحل السابق في المعادلة (1-4)، نجد:

$$\nabla \cdot (a(u^{(0)}) \nabla u^{(1)}) = f(x, y) \quad (12-4)$$

نضرب (12-4) بدالة الوزن  $v(x, y)$  المحققة لشروط المسألة الحدية، ثم نجري المكاملة مع مراعاة مبرهنة غرين، نجد:

$$(13-4)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(u^{(0)}) \nabla u^{(1)} \nabla v \, dx dy - \int_{\partial\Omega} a(u^{(0)}) v(x, y) \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) \, dx dy \\ \int_{\Omega} a(u^{(0)}) \nabla u^{(1)} \nabla v \, dx dy + \int_{\partial\Omega} a(u^{(0)}) v(x, y) (g_1(x, y) u^{(1)}(x, y)) \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) \, dx dy - \int_{\partial\Omega} g_2(x, y) v(x, y) \, dx dy \end{aligned}$$

ثم نعوض عبارة الحل  $u^{(1)} = \sum_{i=1}^n u_i N_i$  في (13-4)، ونستبدال كل  $v(x, y)$  بدالة الوزن  $N_j$  في (13-4) باعتبار  $n$  عدد عقد الشبكة.

وهكذا، يتم إيجاد الحل الأول، فالثاني،.....، ونتوقف عندما نصل إلى:



$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < 10^{-5} \quad (14-4)$$

مثال (3-4): لتكن لدينا معادلة بواسون غير الخطية:

$$-\nabla \left( (1+u)^2 \nabla u \right) = 0 \quad ; (x, y) \in (0, 1)$$

$$u = 0 \quad ; x = 0$$

$$u = 1 \quad ; x = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad ; y = 0, y = 1$$

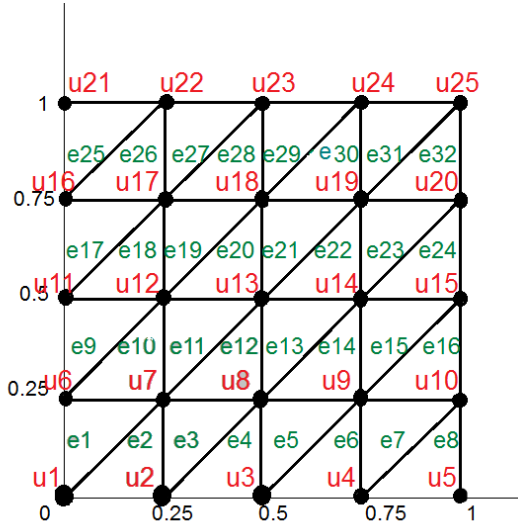
الحل:

نقسم المنطقة المعطاة إلى 32 عنصر، فنحصل على 25 عقدة، حيث:

$$u_1 = u_6 = u_{11} = u_{16} = u_{21} = 0$$

$$u_5 = u_{10} = u_{15} = u_{20} = u_{25} = 1$$

أما العقد المجهولة  $u_2, u_3, u_4, u_7, u_8, u_9, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{17}, u_{18}, u_{19}, u_{22}, u_{23}, u_{24}$  حسب الشكل:



الشكل (2-4): شبكة المثلثات للمثال (3-4).

بالتقييم المحلي لجميع العناصر، نجد:

العنصر	العقد العامة	العقد المحليّة	الإحداثيات
$e_1$	$u_1$	$i$	(0, 0)
	$u_7$	$j$	(0.25, 0.25)
	$u_6$	$k$	(0, 0.25)

$e_2$	$u_1$	$i$	(0,0)
	$u_2$	$j$	(0.25,0)
	$u_7$	$k$	(0.25,0.25)
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$e_{32}$	$u_{19}$	$i$	(0.75,0.75)
	$u_{20}$	$j$	(1,0.75)
	$u_{25}$	$k$	(1,1)

الجدول (4-4): التقييم المحلي لعقد الشكل (2-4).

وبإيجاد دوال الشكل، نجد:

العنصر	$N_i$	$N_j$	$N_k$
$e_1$	$1-4y$	$4x$	$-4x+4y$
$e_2$	$1-4x$	$4x-4y$	$4y$
$e_3$	$1-4y$	$-1+4x$	$1-4x+4y$
$e_4$	$2-4x$	$-1+4x-4y$	$4y$
$e_5$	$1-4y$	$-2+4x$	$2-4x+4y$
$e_6$	$3-4x$	$-3+4x-4y$	$4y$
.	.	.	.
.	.	.	.
$e_{31}$	$4-4y$	$-4+4x$	$-4x+4y$
$e_{32}$	$4-4x$	$4x-4y$	$-3+4y$

الجدول (5-4): دوال الشكل لعناصر الشكل (2-4).

باستخدام طريقة بيكار التكرارية، نفرض حلاً ابتدائياً  $u_h^{(0)} = 32x - 15.34904$ ، ولنوجد أولاً مصفوفات الصلابة لكل عنصر، وذلك بالتعويض بالتكامل الآتي:

$$a_{ij}^{(l)} = \int_{\Omega} \left(1 + u_h^{(0)}\right)^2 \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad ; i, j = 1, 2, 3, l = 1, 2, \dots, 32$$

ف نجد أن مصفوفات الصلابة تحقق العلاقة الآتية:

$$A^{(i)} = A^{(i+8)} = A^{(i+16)} = A^{(i+24)} \quad ; i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 70.0167 & 0 & -70.0167 \\ 0 & 70.0167 & -70.0167 \\ -70.0167 & -70.0167 & 140.0334 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 42.4193 & -42.4193 & 0 \\ -42.4193 & 84.8385 & -42.4193 \\ 0 & -42.4193 & 42.4193 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 8.5577 & 0 & -8.5577 \\ 0 & 8.5577 & -8.5577 \\ -8.5577 & -8.5577 & 17.1154 \end{pmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2.2936 & -2.2936 & 0 \\ -2.2936 & 4.5872 & -2.2936 \\ 0 & -2.2936 & 2.2936 \end{pmatrix}$$

$$A^{(5)} = \begin{pmatrix} 11.0987 & 0 & -11.0987 \\ 0 & 11.0987 & -11.0987 \\ -11.0987 & -11.0987 & 22.1975 \end{pmatrix}, \quad A^{(6)} = \begin{pmatrix} 26.1680 & -26.1680 & 0 \\ -26.1680 & 52.3359 & -26.1680 \\ 0 & -26.1680 & 26.1680 \end{pmatrix}$$

$$A^{(7)} = \begin{pmatrix} 77.6397 & 0 & -77.6397 \\ 0 & 77.6397 & -77.6397 \\ -77.6397 & -77.6397 & 155.2795 \end{pmatrix}, \quad A^{(8)} = \begin{pmatrix} 114.0423 & -114.0423 & 0 \\ -114.0423 & 228.0846 & -114.0423 \\ 0 & -114.0423 & 114.0423 \end{pmatrix}$$

نستخدم برنامج الماتلاب (1) للحصول على الحل الأول وذلك ببرمجة جميع ماسبق، ثم إيجاد مصفوفة الصلابة العامة، وإيجاد جميع الحلول، نجد أن:

$u^{(h)}$
$u^{(1)} = 32x - \frac{8640741353061855}{562949953421312}$
$u^{(2)} = 32x - \frac{8011030603311321}{4503599627370496}y + \frac{472683768011560815}{36028797018963968}$
$u^{(3)} = 32x + \frac{200083135124327}{1125899906842624}y + \frac{85394990949725359}{4503599627370496}$
$u^{(4)} = 32x + \frac{255119367259317}{2251799813685248}y + \frac{38292907533267763}{2251799813687248}$
$u^{(5)} = 32x + \frac{287636388197727}{2251799813685248}y + \frac{316350121848402955}{18014398509481984}$
$u^{(6)} = 32x + \frac{277849017132843}{2251799813685248}y + \frac{156697085120761925}{9007199254740992}$
$u^{(7)} = 32x + \frac{280689173489105}{2251799813685248}y + \frac{314257350854159205}{18014398509481984}$
$u^{(8)} = 32x + \frac{279855476182513}{2251799813685248}y + \frac{314004435651287849}{18014398509481984}$
$u^{(9)} = 32x + \frac{140049690362657}{1125899906842624}y + \frac{157039233763932095}{9007199254740992}$
$u^{(9)} = 32x + \frac{280027954531727}{2251799813685248}y + \frac{314056791067528251}{18014398508481984}$

الجدول (4-6): الحلول التقريبية للمثال (4-3).

نلاحظ من خلال الجدول (4-6)، أنه بالرغم من أن طريقة نيوتن- غالاركين أكثر تعقيداً من طريقة بيكارد التكرارية، ولكن عادةً ما يتقارب الحل أسرع بكثير منها.

4-2-4. طريقة تحليل هوموتوبي<sup>1</sup> العناصر المنتهية The Finite Element-Homotopy Analysis Method (FE\_HAM) [22, 95]:

يتم استخدام هذه الطريقة لإيجاد الحل التقريبي للمسائل غير الخطية، حيث يتم تحويل المسألة غير الخطية إلى مسألة خطية من خلال طريقة HAM، ويتم التغلب على التعقيد الهندسي للمنطقة عن طريق شبكة من العناصر المنتهية من خلال طريقة FEM.

لتكن لدينا معادلة بواسون غير الخطية:

$$\begin{aligned} \Delta u &= F(x, u, \nabla u) \quad ; x = (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u(x, y)|_{\Gamma} &= g \end{aligned} \quad (15-4)$$

حيث  $\Omega$  منطقة محدودة ومفتوحة في  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} F: \Omega \times H^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2 &\rightarrow \mathbb{R} \quad ; f(x, y) = F(x, y, u(x, y), \nabla u(x, y)) \\ f(x, y) &\in L^2(\Omega) \quad ; u(x, y) \in H^1(\Omega) \quad ; g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad ; \Gamma = \cup \partial\Omega \end{aligned}$$

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} N[\phi(x, y, q)] &= \Delta[\phi(x, y, q)] - F(x, y, \phi(x, y, q), \nabla \phi(x, y, q)) \\ N_1[\phi(x, y, q)] &= \phi(x, y, q)|_{\Gamma} - g(x, y) \end{aligned} \quad (16-4)$$

حيث  $N$  مؤثر غير خطي،  $u(x, y)$  دالة مجهولة،  $q$  وسيط  $q \in [0, 1]$ ،  $\phi(x, y, q)$  دالة غير معلومة، يمكن نشرها على صيغة متسلسلة قوى<sup>2</sup> ل  $q$  كما يلي:

$$\phi(x, y, q) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{hm} q^m \quad (17-4)$$

ليكن  $u_{h0}(x, y)$  الحل الابتدائي للحل الفعلي  $u(x, y)$ ، و  $h \neq 0$  وسيط مساعد  $0 < h \leq 1$  و  $H(x, y) \neq 0$  دالة مساعدة  $H(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ ، و  $L$  مؤثر خطي مساعد يحقق:

<sup>1</sup> يعرف الهوموتوبي بين الدالتين المستمرتين  $f(x), g(x)$  من فضاء تبولوجي  $X$  إلى فضاء تبولوجي  $Y$ ، على أنه الدالة المستمرة  $H(x; q): X \times [0, 1] \rightarrow Y$  بحيث يحقق ماييلي:

إذا كان  $x \in X$  فإن:  $H(x; 0) = f(x), H(x; 1) = g(x)$ ، وإذا كان  $Y$  فضاءً تبولوجياً متجهياً، عندئذٍ يمكن إنشاء الهوموتوبي وفق الصيغة الآتية:  $H(x; q) = (1-q)f(x) + qg(x)$ ؛  $x \in X, q \in [0, 1]$  وسيط ضمنى.

<sup>2</sup> متسلسلة ماكلوران-هوموتوبي. 
$$\phi(x; q) = \phi(x; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} q^m \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x; q)}{\partial q^m} \bigg|_{q=0} = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} q^m u_m(x)$$

$$\begin{aligned} L[\phi(x, y, q)] &= \Delta[\phi(x, y, q)] \\ L_1[\phi(x, y, q)] &= \phi(x, y, q)|_r \end{aligned} \quad (18-4)$$

ومنه يمكن إنشاء مايسمى معادلة التشوه من المرتبة الصفرية (التي أنشأها Liao مستخدماً الوسيط المضمن  $q$ ):

$$(1-q)L[\phi(x, y, q) - u_{h0}(x, y)] = qh H(x, y) N[\phi(x, y, q)] \quad (19-4)$$

عندما  $q = 0$  فإن معادلة التشوه من المرتبة الصفرية (19-4) تصبح:

$$\phi(x, y, 0) = u_{h0}(x, y) \quad (20-4)$$

عندما  $q = 1$ ، ولما كان  $h \neq 0, H(x, y) \neq 0$ ، فإن (19-4) تصبح:

$$\phi(x, y, 1) = u(x, y) \quad (21-4)$$

ومن العلاقتين (20-4)، (21-4)، عندما يزداد الوسيط  $q$  من الصفر إلى الواحد، فإن الحل  $\phi(x, y, q)$  للمعادلة (19-4) ينتشوه إستمرارياً من الحل الابتدائي  $u_{h0}(x, y)$  إلى الحل الفعلي  $u(x, y)$  للمعادلة (17-4)، وللحصول على هذا الحل يجب إيجاد بقية حدود المتسلسلة:

$$\phi(x, y, 1) = u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{hm}(x, y) = u_{h0}(x, y) + u_{h1}(x, y) + \dots \quad (22-4)$$

وذلك عن طريق معادلة التشوه من مرتبة عليا:

$$L[u_{hm}(x, y) - \chi_m u_{h,m-1}(x, y)] = h H(x, y) D_{m-1}[N(\phi(x, y, q))] \quad (23-4)$$

والتي حصلنا عليها بطريقة الاستقراء الرياضي من خلال اشتقاق المعادلة (19-4) بالنسبة إلى  $q^1$ .

حيث:

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & ; m \leq 1 \\ 1 & ; m \geq 2 \end{cases}, \quad D_{m-1}(\phi(x, y, q)) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \phi(x, y, q)}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (24-4)$$

من أجل  $m = 1$ ، فإن المعادلة (23-4)، تصبح:

$$^1 \text{ نحصل على } (1-q)L\left[\frac{\partial \phi(x, y, q)}{\partial q}\right] - L[\phi(x, y, q) - u_0(x, y)] = h H(x, y) N[\phi(x, y, q)] + qh H(x, y) \frac{\partial N[\phi(x, y, q)]}{\partial q}$$

وبالاستفادة من العلاقات السابقة، نجد أن  $L[u_1(x, y)] = h H(x, y) N[u_0(x, y)]$ ، ولإثبات صحة العلاقة (٢٣-٤)، نثبت أولاً

أنها محققة من أجل  $m = 2$ ، ونفرض أنها محققة من أجل  $m$ ، ثم نثبت أنها محققة من أجل  $m + 1$  كما في المرجع [91]

$$\Delta u_{h1}(x, y) = h H(x, y) \left[ \Delta u_{h0}(x, y) - F\left(x, u, u_{h0}, \frac{\partial u_{h0}}{\partial x}, \frac{\partial u_{h0}}{\partial y}\right) \right] \quad \text{in } \Omega \quad (25-4)$$

$$u_{h1}|_{\Gamma} = 0$$

ومن أجل  $m \geq 2$ ، فإن المعادلة (23-4)، تصبح:

$$\Delta u_{h,m}(x, y) = (1 + h H(x, y)) \Delta u_{h,m-1}(x, y) - h H(x, y) D_{m-1} F\left(x, u, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \quad \text{in } \Omega$$

$$u_{h,m}|_{\Gamma} = 0$$

(26-4)

لنعرّف  $V_h$  فضاء العناصر المنتهية، ولتكن  $\Omega = (a, b) \times (c, d)$  المنطقة المعطاة في نص المسألة،  
نقسم المجال  $[a, b]$  إلى  $r$  مجال جزئي، نقسم المجال  $[c, d]$  إلى  $n$  مجال جزئي، ثم نرسم الخطوط  
المتوازية  $Ox, Oy$  لنجد شبكة  $T_h$  من المستطيلات  $\kappa$ ، بحيث  $\Omega = \bigcup_{\kappa \in T_h} \kappa$ .

لنعرف فضاء الدوال:

$$W_h = \{u_h \in C^0(\bar{\Omega}); \quad u_{h,m} = \sum_{i=1}^4 u_h(a_i^{(\kappa)}) P_i^{(\kappa)}; \quad \forall \kappa \in T_h, m = 0, 1, \dots\} \subset H^1(\Omega) \quad (27-4)$$

حيث :

$$u_{h,m} = \sum_{i=1}^4 u_h(a_i^{(\kappa)}) P_i^{(\kappa)} \quad \text{شكل الحل.} \quad (28-4)$$

فيكون فضاء العناصر المنتهية:

$$V_h = \{u_h \in W_h; \quad u_h|_{\Gamma} = 0\} \subset H_0^1(\Omega)$$

حيث  $a_i = (a_{i1}, a_{i2})$  العقد الناتجة من تقطيع المنطقة،  $P_i$  دوال الشكل المعطاة بالعلاقة (2-75).

بضرب العلاقة (25-4) بدالة الوزن  $v_h = P_j \in V_h$  وبتعويض (28-4) في العلاقة (25-4) من  
أجل  $m = 1$ ، وبالمكاملة، نجد:

$$\begin{aligned} a(u_{h1}, v_h) &= \tilde{F}_{h1}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ a(u_{h1}, v_h) &= \int_{\Omega} \frac{\partial u_{h1}}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_{h1}}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^4 u_{h1}(a_i) \int_{\Omega} \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial P_j}{\partial y} dx dy; \quad j = 1, 2, 3, 4 \\ \tilde{F}_{h1}(v_h) &= h \int_{\Omega} H(x, y) \left[ \left( \frac{\partial u_{h0}}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_{h0}}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) + F\left(x, y, u_{h0}, \frac{\partial u_{h0}}{\partial x}, \frac{\partial u_{h0}}{\partial y}\right) v_h \right] \end{aligned} \quad (29-4)$$

ومن العلاقات (29-4) يتم إيجاد  $u_{h1}$ ، ومن أجل  $m \geq 2$ ، نضرب العلاقة (26-4) بدالة الوزن  $v_h = P_j \in V_h$ ، وبالتعويض (28-4) في العلاقة (26-4)، وبالمكاملة، نجد:

$$\begin{aligned} a(u_{hm}, v_h) &= \tilde{F}_{hm}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ a(u_{hm}, v_h) &= \int_{\Omega} \frac{\partial u_{hm}}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_{hm}}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^4 u_{h,m}(a_i) \int_{\Omega} \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial P_j}{\partial y} dx dy ; j=1,2,3,4 \\ \tilde{F}_{hm}(v_h) &= \int_{\Omega} (1+h H(x,y)) \left[ \left( \frac{\partial u_{h,m-1}}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_{h,m-1}}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) + h H(x,y) D_{m-1} \left( F \left( x, y, \phi_h, \frac{\partial \phi_h}{\partial x}, \frac{\partial \phi_h}{\partial y} \right) \right) v_h \right] \end{aligned} \quad (30-4)$$

و من خلال ما سبق يتم إيجاد  $u_{h1}, u_{h2}, u_{h3}, \dots$ ، ثم بالتعويض في العلاقة (21-4) نجد الحل التقريبي المطلوب.

يُعرف الخطأ المطلق والخطأ النسبي:

$$\begin{aligned} err_{abs}(x, y, h, m) &= |u_{hm}(x, y, h) - u(x, y)| \\ err_{rel}(x, y, h, m) &= |u_{hm}(x, y, h) - u_{h,m-1}(x, y, h)| \end{aligned}$$

مثال (4-4): لتكن لدينا معادلة بواسون غير الخطية:

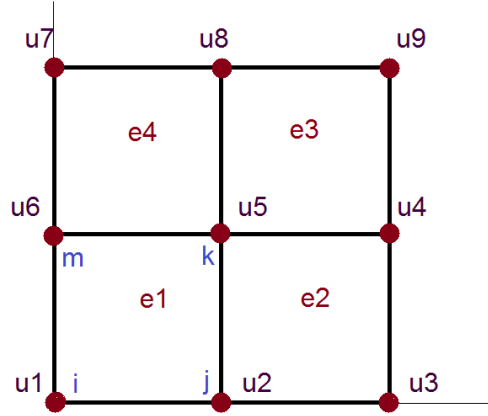
$$\begin{aligned} \Delta u &= 3u^2 \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u|_{x=0} &= \frac{4}{(3+y)^2}, \quad u|_{x=1} = \frac{4}{(4+y)^2} \end{aligned} \quad (31-4)$$

$$u|_{y=0} = \frac{4}{(3+x)^2}, \quad u|_{y=1} = \frac{4}{(4+x)^2}$$

مع العلم أنّ الحل الفعلي للمسألة هو  $u(x, y) = \frac{4}{(3+x+y)^2}$

الحل:

نقسم المنطقة المعطاة إلى أربع مستطيلات، فنجد تسعة عقد، حسب الشكل:



الشكل (3-4): شبكة المستطيلات للمثال (4-4).

حسب الشروط الحدية الموضحة في المثال، نجد أن العقدة المجهولة الوحيدة، أما بقية العقد:

$$u_1 = \frac{4}{9}, u_2 = \frac{16}{49}, u_3 = \frac{1}{4}, u_4 = \frac{16}{81}, u_5 = \frac{16}{49}, u_6 = \frac{1}{4}, u_7 = \frac{16}{81}, u_8 = \frac{16}{49}, u_9 = \frac{4}{25}$$

ولإيجاد دوال الشكل، نعوض في العلاقات (2-75)، فنجد:

	$P_i$	$P_j$	$P_k$	$P_m$
$e_1$	$4xy - 2x - 2y + 1$	$-4xy + 2x$	$4xy$	$-4xy + 2y$
$e_2$	$4xy - 2x - 4y + 2$	$-4xy + 2x + 2y - 1$	$4xy - 2y$	$-4xy + 4y$
$e_3$	$4xy - 4x - 4y + 4$	$-4xy + 2y + 4x - 2$	$4xy - 2x - 2y + 1$	$-4xy + 2x + 4y - 2$
$e_4$	$4xy - 2y - 4x + 2$	$-4xy + 4x$	$4xy - 2x$	$-4xy + 2x + 2y - 1$

الجدول (4-7): دوال الشكل لعناصر الشكل (3-4).

لتكن المؤثر غير الخطي:

$$N[\phi(x, y, q)] = \Delta[\phi(x, y, q)] - 3\phi^2(x, y, q)$$

حيث  $\phi$  الدالة المعطاة في (4-17)، ينتج:

$$D_m[\phi^2] = D_m \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^s u_i u_{s-i} \right) P_i \right] = \sum_{i=0}^m u_i u_{m-i} \quad (32-4)$$

من أجل  $m = 1$ ، نعوض في (4-25)، لإيجاد  $u_{h1}$ ، فنجد:

$$\Delta u_{h1}(x, y) = h H(x, y) [\Delta u_{h0}(x, y) - 3u_{h0}^2] \quad \text{in } \Omega \quad (33-4)$$

$$u_{h1}|_{\Gamma} = 0$$



بأخذ الحل الابتدائي  $u_5 = 0.0625$ ، نجد:

$$u_{h0} = \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.870443466 \quad (34-4)$$

نعوض (34-4) في (33-4)، وبالمكاملة نجد أن الطرف الأيسر هو:

$$a(u_{h1}, v_h) = \sum_{i=1}^4 u_{h,i} (a_i) \int_{\Omega} \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial P_j}{\partial y} dx dy ; j = 1, 2, 3, 4 \quad (35-4)$$

بتعويض (75-2) في (35-4)، نجد مصفوفات الصلابة وينتج منها مصفوفة الصلابة العامة:

$$A^{(1)} = A^{(2)} = A^{(3)} = A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.666667 & -0.166667 & -0.333333 & -0.166667 \\ -0.166667 & 0.666667 & -0.166667 & -0.333333 \\ -0.333333 & -0.166667 & 0.666667 & -0.166667 \\ -0.166667 & -0.333333 & -0.166667 & 0.666667 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.666667 & -0.166667 & 0 & 0 & -0.333333 & -0.166667 & 0 & 0 & 0 \\ -0.166667 & 1.333334 & -0.166667 & -0.333333 & -0.333334 & -0.333333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.166667 & 0.666667 & -0.166667 & -0.333333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333333 & -0.166667 & 1.333334 & -0.333334 & 0 & 0 & -0.333333 & -0.166667 \\ -0.333333 & -0.333334 & -0.333333 & -0.333334 & 2.666668 & -0.333334 & -0.333333 & 0 & 0 \\ -0.166667 & -0.333333 & 0 & 0 & -0.333334 & 1.333334 & -0.166667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.333333 & -0.166667 & 0.666667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.333333 & -0.333334 & -0.333333 & -0.166667 & 1.333334 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.166667 & -0.333333 & 0 & 0 & -0.166667 & 0.666667 \end{pmatrix}$$

أما الطرف الأيمن من (33-4):

$$\tilde{F}_{h1}(v_h) = h \int_{\Omega} H(x, y) \left[ \left( \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial P_j}{\partial y} \right) + 3(u_{h0})^2 \right] \quad (36-4)$$

بأخذ  $H(x, y) = 1, h = 0.5$

بإجراء التكاملات، نعوض (36-4) و (35-4) في (33-4)، نجد:

$$2.666668u_5 = 0.0318712 \Rightarrow u_5 = 0.01195169402 \quad (37-4)$$

نعوض (37-4) في (28-4)، نجد:

$$u_{h1} = \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.6682502127 \quad (38-4)$$

ومن أجل  $m \geq 2$  نعوض في (30-4) لإيجاد  $u_{h2}, u_{h3}, \dots$  وذلك باستخدام برنامج الماتلاب (2)،

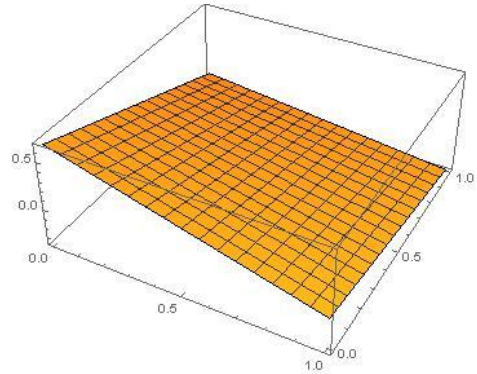
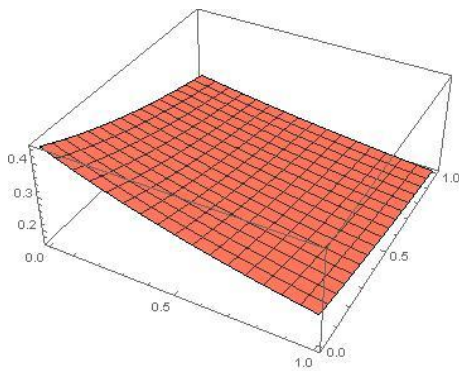
فنجد:

$$\begin{aligned}
u_{h2} &= \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.6591905172 \\
u_{h3} &= \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.6705803115 \\
u_{h4} &= \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.6872336032 \\
u_{h5} &= \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.7060237938 \quad (39-4)
\end{aligned}$$

. . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .

الحل التقريبي	العقدة (0.5, 0.5)	الحل الفعلي	الخطأ المطلق
$u_{h0}$	0.2499999999	0.25	$5.5556 \times 10^{-11}$
$u_{h0} + u_{h1}$	0.297806776	0.25	0.04780677599
$u_{h0} + u_{h1} + u_{h2}$	0.3365538565	0.25	0.08655385653
$u_{h0} + \dots + u_{h3}$	0.3866907314	0.25	0.1366907314
$u_{h0} + \dots + u_{h4}$	0.4534808979	0.25	0.2034808979
$u_{h0} + \dots + u_{h5}$	0.5390612551	0.25	0.2890612551

الجدول (4-8): الحلول التقريبية للمثال (4-4).



الشكل (4-4): مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي للمثال (4-4).

مثال (4-5): لتكن لدينا معادلة بواسون غير الخطية:

$$\Delta u + u = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4} \sin 2x \sin 2y \quad ; (x, y) \in D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$u|_{x=-\frac{1}{2}} = -\sin \frac{1}{2} \cdot \cos y$$

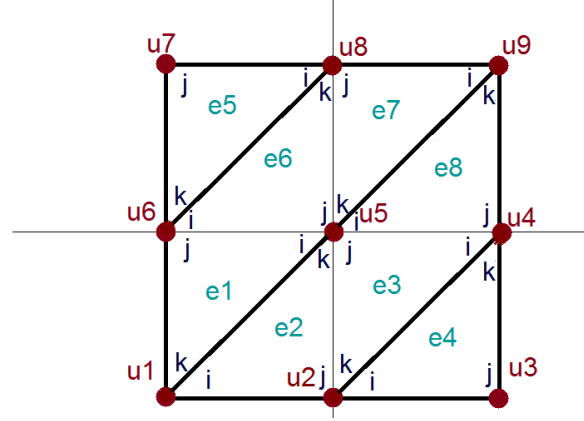
$$u|_{x=\frac{1}{2}} = \sin \frac{1}{2} \cdot \cos y$$

$$u|_{y=-\frac{1}{2}} = \sin x \cdot \cos \frac{1}{2}$$

$$u|_{y=\frac{1}{2}} = \sin x \cdot \cos \frac{1}{2}$$

والحل الفعلي يُعطى بالصيغة:  $u(x, y) = \sin x \cdot \cos y$

الحل:



الشكل (4-5): شبكة المثلثات للمثال (4-5).

حسب الشروط الحدية المعطاة في نص المسألة (4-40)، نجد:

$$u_1\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right) = -\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} ; u_2\left(0, \frac{-1}{2}\right) = 0 ; u_3\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right) = \sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} ; u_4\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \sin\frac{1}{2}$$

$$u_6\left(\frac{-1}{2}, 0\right) = -\sin\frac{1}{2} ; u_7\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} ; u_8\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0 ; u_9\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$$

والعقدة المجهولة الوحيدة  $u_5$ .

تُعطى دوال الشكل بالجدول:

	$P_i$	$P_j$	$P_k$
$e_1$	$1 + 2x$	$-2x + 2y$	$-2y$
$e_2$	$-2x$	$2x - 2y$	$1 + 2y$
$e_3$	$2x$	$1 - 2x + 2y$	$-2y$
$e_4$	$1 - 2x$	$1 + 2x - 2y$	$1 + 2y$
$e_5$	$1 + 2x$	$-1 - 2x + 2y$	$1 - 2y$
$e_6$	$-2x$	$1 + 2x - 2y$	$2y$
$e_7$	$2x$	$-2x + 2y$	$1 - 2y$
$e_8$	$1 - 2x$	$2 + 2x - 2y$	$2y$

الجدول (4-9): دوال الشكل للعناصر الشكل (4-5).

ليكن الحل الابتدائي:

$$u_5 = -0.019198 \Rightarrow u_{h0} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x - 0.06108452257$$

ولإيجاد  $u_{h1}$ ، نعوض في العلاقة الآتية:

$$\int_{\Omega} \nabla u_{h1} \nabla v \, dx dy = h \int_{\Omega} H(x, y) \left[ \nabla u_{h0} \nabla v + \left( \frac{\partial u_{h0}}{\partial x} \frac{\partial u_{h0}}{\partial y} + \frac{1}{4} \sin 2x \sin 2y - 2u_{h0} \right) v \right] dx dy$$

فنجد:

$$u_5 = 0.004387125 \Rightarrow u_{h1} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 0.05684110243$$

ولإيجاد  $u_{hm}$  ( $m = 2, 3, \dots$ )، نعوض في العلاقة الآتية:

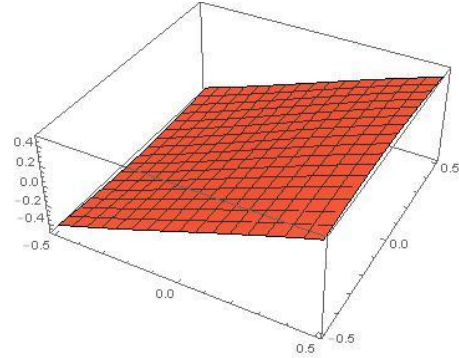
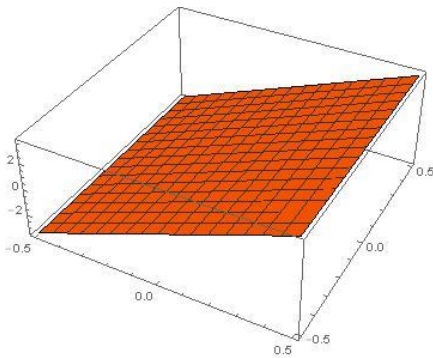
$$\int_{\Omega} \nabla u_{hm} \nabla v \, dx dy = \int_{\Omega} (1 + hH(x, y)) \nabla u_{h,m-1} \nabla v \, dx dy + h \int_{\Omega} H(x, y) \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial u_{h,m-1-i}}{\partial x} \frac{\partial u_{h,i}}{\partial x} - 2u_{h,m-1} \right] v dx dy$$

فنجد:

$u_5 = 3.2376$	$u_{h2} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 16.22290548$
$u_5 = 3.8478$	$u_{h3} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 19.27390548$
$u_5 = 5.2777$	$u_{h4} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 26.42340548$
$u_5 = 6.451425$	$u_{h5} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 32.29203048$

**الجدول (4-10):** الحلول التقريبية للمثال (4-5).

نعوض  $u_{h0}, u_{h1}, u_{h2}, u_{h3}, \dots$  في (4-21)، نجد:



**الشكل (4-6):** مقارنة بين الحل الفعلي والتقريب للمثال (4-5).

#### 3-4. المعادلات اللوجستية Logistic equation [52, 96]:

تعد المعادلة اللوجستية من المعادلات الناقصية شبه الخطية، تستخدم في علم الوراثة السكانية [42]، وتُعطى بالصيغة:

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) + \lambda g(x, y)u(1-u) &= 0 & \text{in } \Omega \\ u(x, y) &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (40-4)$$

حيث  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ،  $\lambda$  وسيط حقيقي،  $u$  دالة غير معلومة تمثل تعداد المنطقة السكانية  $\Omega$ ،  $g$  دالة ملساء تمثل معدل الولادات.

ان الصيغة الضعيفة للمسألة (40-4) هي:

$$\rho(U) = A(u, v) + (f(u), v) = 0 \quad \forall v \in S_0 \quad (41-4)$$

حيث:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \\ f(u) &= \lambda g(x, y)u(x, y)(1-u(x, y)) \\ A(u, v) &= -\iint_{\Omega} (\nabla_i u, \nabla_j v) dx dy \quad i, j = 1, \dots, m \\ (f(u), v) &= \iint_{\Omega} f(u)v dx dy \end{aligned}$$

$m$  عدد العقد، ليكن  $S_h$  الفضاء الجزئي من  $S_0$ ، ونوجد  $u_h \in S_h$ ، علماً أن عبارة الحل هي:

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^m N_j(x, y)U_j(x, y) \quad ; U_j = u_h(x_j, y_j) \quad (42-4)$$

بتعويض (42-4) في (41-4)، وبأخذ  $v = N_i$ ، نجد جملة المعادلات غير الخطية الآتية:

$$\rho(U) = \sum_{j=1}^m A(N_j, N_i)U_j - \left( f \left( \sum_{j=1}^m N_j U_j \right), N_i \right) = 0 \quad ; i = 1, \dots, m \quad (43-4)$$

#### 3-4-1. طريقة نيوتن رافسون من الرتبة الثانية:

باستخدام طريقة نيوتن رافسون بدرجة التقريب من الرتبة الثانية وبتطبيق العلاقة (15-1) على المعادلة (43-4):

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\rho(U^n)}{\left(\frac{\partial \rho(U^n)}{\partial U}\right)} \Rightarrow \rho(U^n) = (U^n - U^{n+1}) \left(\frac{\partial \rho(U^n)}{\partial U}\right) \quad (44-4)$$

لنفرض أن  $U^0$  حلاً ابتدائياً، ولنوجد أولاً المقدار  $U^n - U^{n+1} \in S_h$  الذي يحقق المعادلة (44-4) والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$DJ(U^n, v, U^n - U^{n+1}) = J(U^n, v) \quad \forall v \in S_h \quad (45-4)$$

حيث:

$$DJ(u, v, w) = -\iint_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx dy + \lambda \iint_{\Omega} g(1-2u) v w \, dx dy = 0, \quad J(U^n, v) = \rho(U^n)$$

بالتعويض في (45-4)، نجد:

$$\begin{aligned} & -\iint_{\Omega} \nabla v \nabla (U^n - U^{n+1}) \, dx dy + \lambda \iint_{\Omega} g(1-2U^n) v (U^n - U^{n+1}) \, dx dy = \\ & -\iint_{\Omega} \nabla U^n \nabla v \, dx dy + \lambda \iint_{\Omega} g U^n (1-U^n) v \, dx dy \end{aligned}$$

وبالإصلاح، نجد:

$$\iint_{\Omega} \nabla v \nabla U^{n+1} \, dx dy - \lambda \iint_{\Omega} g(1-2U^n) v U^{n+1} \, dx dy = \lambda \iint_{\Omega} g(U^n)^2 v \, dx dy \quad (46-4)$$

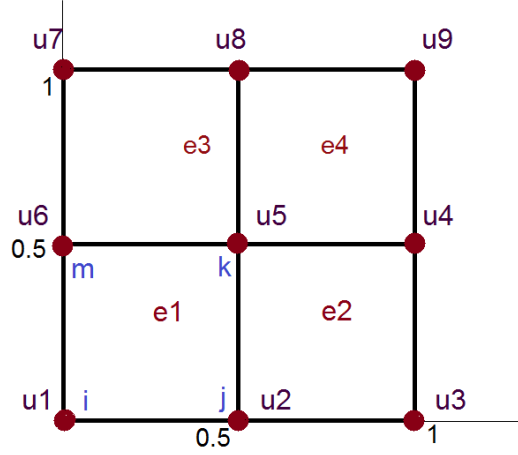
**مثال (4-6):** لتكن  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ،  $f(x, y) = \frac{1}{2} - xy$ ،  $h = 0.2$ ،  $\lambda = 10^{-6}$ ، والمطلوب

إيجاد الحل التقريبي للمعادلة الآتية بطريقة العناصر المنتهية باستخدام التقطيع المستطيلي وبعمدة داخلية واحدة:

$$\begin{cases} -(u_{xx} + u_{yy}) = \lambda \left( \frac{1}{2} - xy \right) u(x, y) (1 + u(x, y)) & ; (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0 & ; (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (47-4)$$

**الحل:**

ليكن لدينا الشكل الآتي:



الشكل (4-7): شبكة المستطيلات للمثال (4-6).

من خلال الشكل السابق ومن خلال الشروط الحدية، نلاحظ أن  $u_1 = u_4 = u_6 = \dots = u_9 = 0$  والعقدة المجهولة الوحيدة هي  $u_5$ .

	$N_i$	$N_j$	$N_k$	$N_m$
$e_1$	$4xy - 2x - 2y + 1$	$-4xy + 2x$	$4xy$	$-4xy + 2y$
$e_2$	$4xy - 2x - 4y + 2$	$-4xy + 2x + 2y - 1$	$4xy - 2y$	$-4xy + 4y$
$e_3$	$4xy - 2y - 4x + 2$	$-4xy + 4x$	$4xy - 2x$	$-4xy + 2x + 2y - 1$
$e_4$	$4xy - 4x - 4y + 4$	$-4xy + 2y + 4x - 2$	$4xy - 2x - 2y + 1$	$-4xy + 2x + 4y - 2$

الجدول (4-11): توابع الشكل للمثال (4-6).

ولإيجاد العقدة المجهول، لنفرض أن  $u_5^{(0)} = 0.05$ ، ثم نعوض في العلاقة الآتية:

$$u_5^{(1)} \left( a_{33}^{(1)} + a_{44}^{(2)} + a_{22}^{(3)} + a_{11}^{(4)} \right) = f_3^{(1)} + f_4^{(2)} + f_2^{(3)} + f_1^{(4)} \quad (48-4)$$

حيث:

$$a_{ii}^j = \iint_{e_j} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 - \lambda \left( \frac{1}{2} - xy \right) \left( 1 - 2u_5^{(0)} \right) (N_i)^2 dx dy \quad (49-4)$$

$$f_i^j = \lambda \iint_{e_j} \left( \frac{1}{2} - xy \right) \left( u_5^{(0)} \right)^2 N_i dx dy \quad ; i, j = 1, 2, 3, 4$$

بتعويض (49-4) في (48-4)، نجد:

$$2.66667 u_5^{(1)} = 1.5626 \times 10^{-10} \Rightarrow u_5^{(1)} = 5.859301759 \times 10^{-11} \quad (50-4)$$

وبتعويض قيمة  $u_5^{(1)}$  في العلاقة (4-50) بالعلاقة (4-49) بدلاً من  $u_5^{(0)}$  لإيجاد  $u_5^{(2)}$ ، وينفس الأسلوب من أجل بقية الحلول، نجد:

$u_5^{(2)} = 5.722042847 \times 10^{-28}$
$u_5^{(3)} = 7.673840408 \times 10^{-61}$
$u_5^{(4)} = 1.38018 \times 10^{-128}$
$u_5^{(5)} = 4.4646 \times 10^{-264}$
$u_5^{(6)} = 4.671709744737821 \times 10^{-535}$
$u_5^{(7)} = 5.115197966724023 \times 10^{-1077}$
$u_5^{(8)} = 6.132472859122423 \times 10^{-2161}$
$u_5^{(9)} = 8.814181959117822 \times 10^{-4329}$
$u_5^{(10)} = 1.820852496007148 \times 10^{-8664}$

الجدول (4-12): الحلول التقريبية للمثال (4-6).

#### 4-4. معادلة جنزير لاندو Ginzburg Landau Equation [53, 96]:

هي معادلة ناقصية غير خطية تم تقديمها من قبل Ginzburg و Landau في خمسينيات القرن العشرين، لها تطبيقات هامة في العديد من المجالات وخاصة الفيزياء، حيث تصف مجموعة متنوعة من الظواهر مثل التحولات الطورية، السيولة الفائقة، الموصلية الفائقة، وتكثيف Bose-Einstein [14].

تُعطى مسألة القيم الحدية بالصيغة:

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta u &= u^3 - u & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (51-4)$$

حيث  $\varepsilon > 0$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  وسيط صغير.

لنستخدم في حل هذه المسألة طريقة نيوتن رافسون من الرتبة الخامسة كالآتي:

#### 4-4-1. طريقة نيوتن رافسون من الرتبة الخامسة:

إن الصيغة الضعيفة للمسألة (51-4) هي:

$$J(u, v) = \iint_{\Omega} \varepsilon \nabla u \nabla v \, dx dy - \iint_{\Omega} (u - u^3) v \, dx dy \quad \forall v \in S_0 \quad (52-4)$$

لنوجد أولاً  $U^n - U_1^{n+1} \in S_h$  ثم  $U_1^{n+1} - U_2^{n+1} \in S_h$  ثم  $U_2^{n+1} - U^{n+1} \in S_h$

باستخدام العلاقات (1-19)، نجد:



$$\begin{aligned}
DJ(U^n, v, U^n - U_1^{n+1}) &= J(U^n, v) \quad ; v \in S_h \\
DJ(U^n, v, U_1^{n+1} - U_2^{n+1}) &= J(U^n, v) \quad ; v \in S_h \\
DJ(U^n, v, U_2^{n+1} - U^{n+1}) &= J(U^n, v) \quad ; v \in S_h
\end{aligned} \quad (53-4)$$

حيث:

$$DJ(u, v, w) := \iint_{\Omega} \varepsilon \nabla v \cdot \nabla w \, dx dy - \iint_{\Omega} v w - 3v u^2 w \, dx dy \quad (54-4)$$

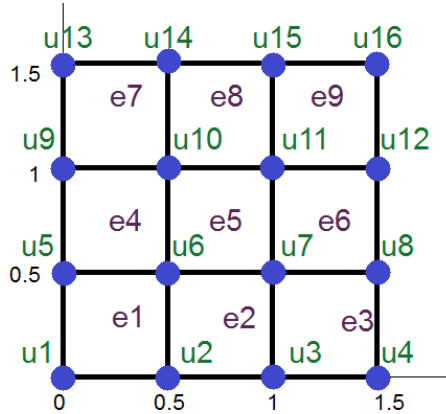
بتعويض (54-4)، (52-4) في (53-4)، نجد:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} -\varepsilon \nabla v \cdot \nabla u_1^{n+1} + v u_1^{n+1} + 3v u^{n^2} u_1^{n+1} \, dx dy &= \iint_{\Omega} 4v u^{n^3} \, dx dy \quad (a) \\
\iint_{\Omega} -\varepsilon \nabla v \cdot \nabla u_2^{n+1} + v u_2^{n+1} + 3v u_1^{n+1^2} u_2^{n+1} \, dx dy &= \iint_{\Omega} 4v u_1^{n+1^3} \, dx dy \quad (b) \\
\iint_{\Omega} -\varepsilon \nabla v \cdot \nabla u^{n+1} + v u^{n+1} + 3v u_2^{n+1^2} u^{n+1} \, dx dy &= \iint_{\Omega} 4v u_2^{n+1^3} \, dx dy \quad (c)
\end{aligned} \quad (55-4)$$

**مثال (7-4):** أوجد الحل التقريبي للمسألة الحدية (51-4) باستخدام التقطيع المستطيلات وبأخذ ثلاث عقد داخلية، حيث  $\varepsilon = 0.01$ .

**الحل:**

ليكن لدينا الشكل الآتي:



**الشكل (8-4):** شبكة المستطيلات للمثال (7-4).

نلاحظ من الشكل (8-4) ومن خلال الشروط الحدية، أن العقد  $u_6, u_7, u_{10}, u_{11}$  مجهولة وبقية العقد معلومة.

العنصر	$N_i$	$N_i$	$N_i$	$N_i$
$e_1$	$4xy - 2x - 2y + 1$	$-4xy + 2x$	$4xy$	$-4xy + 2y$
$e_2$	$4xy - 2x - 4y + 2$	$-4xy + 2x + 2y - 1$	$4xy - 2y$	$-4xy + 4y$
$e_3$	$4xy - 2x - 6y + 3$	$-4xy + 4x + 4y - 4$	$4xy - 4y$	$-4xy + 6y$
$e_4$	$4xy - 4x - 2y + 2$	$-4xy + 4x$	$4xy - 2x$	$-4xy + 2x + 2y - 1$
$e_5$	$4xy - 4x - 4y + 4$	$-4xy + 4x + 2y - 2$	$4xy - 2x - 2y + 1$	$-4xy + 2x + 4y - 2$
$e_6$	$4xy - 4x - 6y + 6$	$-4xy + 4x + 4y - 4$	$4xy - 2x - 4y + 2$	$-4xy + 2x + 6y - 3$
$e_7$	$4xy - 6x - 2y + 3$	$-4xy + 6x$	$4xy - 4x$	$-4xy + 4x + 2y - 2$
$e_8$	$4xy - 6x - 4y + 6$	$-4xy + 6x + 2y - 3$	$4xy - 2x - 4y + 2$	$-4xy + 4x + 4y - 4$
$e_9$	$4xy - 6x - 6y + 9$	$-4xy + 6x + 4y - 6$	$4xy - 4x - 4y + 4$	$-4xy + 4x + 6y - 6$

الجدول (4-12): توابع الشكل للمثال (4-7).

يمكن كتابة توابع الشكل التابعة لكل عقدة من العقد بالشكل:

$$N_6 = \begin{cases} 4xy & \text{in } e_1 \\ -4xy + 2y & \text{in } e_2 \\ -4xy + 4x & \text{in } e_4 \\ 4xy - 4x - 2y + 2 & \text{in } e_5 \end{cases} ; \quad N_7 = \begin{cases} 4xy - 2y & \text{in } e_2 \\ -4xy + 6y & \text{in } e_3 \\ -4xy + 4x + 2y - 2 & \text{in } e_5 \\ 4xy - 4x - 6y + 6 & \text{in } e_6 \end{cases}$$

$$N_{10} = \begin{cases} 4xy - 2x & \text{in } e_1 \\ -4xy + 2x + 4y - 2 & \text{in } e_2 \\ -4xy + 6x & \text{in } e_4 \\ 4xy - 6x - 4y + 6 & \text{in } e_5 \end{cases} ; \quad N_{11} = \begin{cases} 4xy - 2x - 2y + 1 & \text{in } e_2 \\ -4xy + 2x + 6y - 3 & \text{in } e_3 \\ -4xy + 6x + 2y - 3 & \text{in } e_5 \\ 4xy - 6x - 6y + 9 & \text{in } e_6 \end{cases}$$

من أجل  $n=0$  لنفرض أن  $\{u_6|^0 = 0.5, u_7|^0 = 0.5, u_{10}|^0 = 0.5, u_{11}|^0 = 0.5\}$  ، ولنوجد أولاً  $\{u_6|_1^1, u_7|_1^1, u_{10}|_1^1, u_{11}|_1^1\}$  من خلال التعويض في العلاقة (4-55-4) (a) ، نجد:

$$\begin{pmatrix} 21.4178 & 5.36444 & 5.36444 & 1.34361 \\ 5.36444 & 21.4178 & 1.34361 & 5.36444 \\ 5.36444 & 1.34361 & 21.4178 & 5.36444 \\ 1.34361 & 5.36444 & 5.36444 & 21.4178 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_6|_1^1 \\ u_7|_1^1 \\ u_{10}|_1^1 \\ u_{11}|_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 512 \\ 512 \\ 512 \\ 512 \end{pmatrix}$$

(4-56)

$$\{u_6|_1^1 = 15.28799232, u_7|_1^1 = 15.28799232, u_{10}|_1^1 = 15.28799232, u_{11}|_1^1 = 15.28799232\}$$

بتعويض الحل في (4-56) في العلاقة (4-55-4) (b) ، نجد:

$$\begin{pmatrix} 19944.4 & 4986.12 & 4986.12 & 1246.53 \\ 4986.12 & 19944.4 & 1246.53 & 4986.12 \\ 4986.12 & 1246.53 & 19944.4 & 4986.12 \\ 1246.53 & 4986.12 & 4986.12 & 19944.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_6|_2^I \\ u_7|_2^I \\ u_{10}|_2^I \\ u_{11}|_2^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.46356 \times 10^7 \\ 1.46356 \times 10^7 \\ 1.46356 \times 10^7 \\ 1.46356 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

(57-4)

$$\{u_6|_2^I = 469.6420611, u_7|_2^I = 469.6420611, u_{10}|_2^I = 469.6420611, u_{11}|_2^I = 469.6420611\}$$

وأخيراً بتعويض (57-4) في العلاقة (4-55-55-4) ((c)، نجد:

$$\begin{pmatrix} 1.88214 \times 10^7 & 4.70536 \times 10^6 & 4.70536 \times 10^6 & 1.17634 \times 10^6 \\ 4.70536 \times 10^6 & 1.88214 \times 10^7 & 1.17634 \times 10^6 & 4.70536 \times 10^6 \\ 4.70536 \times 10^6 & 1.17634 \times 10^6 & 1.88214 \times 10^7 & 4.70536 \times 10^6 \\ 1.17634 \times 10^6 & 4.70536 \times 10^6 & 4.70536 \times 10^6 & 1.88214 \times 10^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_6|_1^I \\ u_7|_1^I \\ u_{10}|_1^I \\ u_{11}|_1^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.24288 \times 10^{11} \\ 4.24288 \times 10^{11} \\ 4.24288 \times 10^{11} \\ 4.24288 \times 10^{11} \end{pmatrix}$$

$$\{u_6|_1^I = 14427.37459, u_7|_1^I = 14427.37459, u_{10}|_1^I = 14427.37459, u_{11}|_1^I = 14427.37459\}$$

وبنفس الأسلوب نحصل على بقية الحلول.

#### 4-5. ملخص الفصل الرابع:

عُرض في هذا الفصل كيفية إيجاد الحلول التقريبية للمعادلات الناقصية غير الخطية بطريقة العناصر المنتهية ومن أجل ذلك تم شرح بعض الطرائق التقريبية المساعدة لطريقة العناصر المنتهية والتي نحتاجها لتقريب الحل، وتم دمج طريقة العناصر المنتهية مع طريقة تحليل الهوموتوبي.

## الفصل الخامس: تحليل الخطأ لطريقة العناصر المنتهية

### 5-1. مقدمة:

تم في هذا الفصل تحليل الخطأ المرتكب لطريقة العناصر المنتهية، وذلك من خلال الإستعانة ببعض التعاريف والمبرهنات والمتراجحات في التحليل التابعي، واستخدام قوانين التنظيم والجداء الداخلي للفضاءات  $H^1(\Omega), H^2(\Omega), L_2(\Omega)$ .

### 5-2: تعاريف أساسية [12, 24, 71, 85]:

**تعريف 5-1:** يرمز  $H^1(\Omega)$  لفضاء الدوال  $u \in L_2(\Omega)$  التي تمتلك مشتقات معممة من الرتبة الأولى، ويُعرف الجداء الداخلي والتنظيم في هذا الفضاء بالصيغة:

$$(u, v)_{1,\Omega} := (u, v)_{L_2} + (\nabla u, \nabla v)_{L_2} \quad (1-5)$$

$$\|u\|_{1,\Omega} := \left( \|u\|_{L_2}^2 + \|D^1 u\|^2 \right)^{1/2} \quad (2-5)$$

حيث:

$$\|D^1 u\|^2 := \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (3-5)$$

**تعريف 5-2:** يرمز  $H^2(\Omega)$  لفضاء الدوال  $u \in H^1(\Omega)$  التي تمتلك مشتقات معممة من الرتبة الثانية، ويُعرف الجداء الداخلي والتنظيم في هذا الفضاء بالصيغة:

$$(u, v)_{2,\Omega} := (u, v)_{1,\Omega} + (\nabla u, \nabla v)_{1,\Omega} \quad (4-5)$$

$$\|u\|_{2,\Omega} := \left( \|u\|_{1,\Omega}^2 + \|D^2 u\|^2 \right)^{1/2} \quad (5-5)$$

حيث:

$$\|D^2 u\|^2 := \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy \quad (6-5)$$

**تعريف 3-5:** يُعرّف تنظيم الطاقة Energy Norm بالصيغة:

$$^1 \|u\| = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u \, dx dy = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} = a(u, u)^{1/2} \quad (7-5)$$

**3-5. نظرية الأخطاء:**

لتكن لدينا المسألة الآتية:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u(x, y) &= f(x, y) & ; (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= g(x, y)_D & ; (x, y) \in \partial\Omega_D \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} &= g(x, y)_N & ; (x, y) \in \partial\Omega_N \end{aligned} \quad (8-5)$$

حيث:

$$g(x, y)_D \in C(\partial\Omega_D), g(x, y)_N \in C(\partial\Omega_N), f(x, y) \in L^2(\Omega), \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D = \partial\Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

وليكن:

$$\begin{aligned} a: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} & ; l: H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ a(u, v) &:= (\nabla u, \nabla v) & ; l(v) &:= (f, v) + (g_N, v)_{\partial\Omega_N} \end{aligned} \quad (9-5)$$

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy \\ l(v) &= -\iint_{\Omega} f v \, dx dy + \int_{\partial\Omega} g_N v \, ds \end{aligned}$$

حيث:

ولنوجد  $u(x, y) \in H_E^1$  بحيث:

$$a(u, v) = l(v) \quad \text{لكل } v \in H_{E_0}^1 \quad (10-5)$$

أما الحل التقريبي  $u_h(x, y) \in S_E^h$  بطريقة العناصر المنتهية للمسألة (8-5)، يحقق:

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \text{لكل } v_h \in S_0^h \quad (11-5)$$

حيث  $H_E^1, S_E^h$  فضاءات الحلول،  $H_{E_0}^1, S_0^h$  فضاءات دوال الاختبار:

---

<sup>1</sup> يرمز بالرمز  $\|\cdot\|$  لتنظيم الطاقة، وفي بعض المراجع يُرمز له بالرمز  $\|\cdot\|$  بدون أي دليل سفلي.

$$\begin{aligned} S_E^h &\subset H_E^1 := \{u \in H^1(\Omega); u = g_D \text{ on } \partial\Omega_D\} \\ S_0^h &\subset H_{E_0}^1 := \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ on } \partial\Omega_D\} \end{aligned} \quad (12-5)$$

للحصول على الخطأ المرتكب، يمكن طرح من العلاقة (10-5) المقدار  $a(u_h, v)$ ، فنجد:

$$a(u, v) - a(u_h, v) = l(v) - a(u_h, v) \quad (13-5)$$

تُسمى المعادلة (13-5) المعادلة الأساسية للخطأ المرتكب  $e := u - u_h \in H_{E_0}^1$ ، ويحقق:

$$a(e, v) = l(v) - a(u_h, v) \quad \text{لكل } v \in H_{E_0}^1 \quad (14-5)$$

**مبرهنة 5-1: مبرهنة غالاركين المتعامدة Galarkin Orthogonality:** ليكن  $u_h$  الحل التقريبي بطريقة العناصر المنتهية، فإن :

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \text{لكل } v_h \in S_0^h \quad (15-5)$$

**الإثبات:**

بأخذ  $v_h \in S_0^h$  في العلاقة (10-5)، نجد:

$$a(u, v_h) = l(v_h) \quad \text{لكل } v_h \in S_0^h \quad (16-5)$$

بطرح (16-5) من (11-5)، يتم المطلوب.

**مبرهنة 5-2:** بفرض أن المبرهنة (1-5) محققة، فإن المساواة الآتية محققة أيضاً:

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| = \min \{ \|\nabla u - \nabla v_h\| ; v_h \in S_E^h \} \quad (17-5)$$

**الإثبات:**

ليكن  $v_h \in S_E^h$ ، حيث نلاحظ أن  $u - u_h \in H_{E_0}^1$

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|^2 &= a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

وحسب المبرهنة 5-1، فإن  $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$ ، وبالاستناد إلى متراجحة كوشي:

$$a(u - u_h, u - v_h) \leq \|\nabla(u - u_h)\| \|\nabla(u - v_h)\|$$

$$\|\nabla(u - u_h)\|^2 \leq \|\nabla(u - u_h)\| \|\nabla(u - v_h)\| \quad \text{نجد:}$$

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq \|\nabla(u - v_h)\| \quad \text{لكل } v_h \in S_E^h$$

وعندما  $u_h \in S_E^h$  يتم المطلوب.

**مبرهنة 5-3: متراجحة بوانكاريه (Poincare Inequality):**

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq L \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \quad (18-5)$$

**الإثبات:**

لتكن  $\phi$  دالة تحقق  $-\Delta\phi = 1$  في  $\Omega$  بحيث  $\sup_{x \in \Omega} |\nabla\phi(x)| < L$ ، نضرب طرفي المعادلة  $-\Delta\phi = 1$  بالدالة  $v^2$  ونكامل الطرفين ونستخدم مبرهنة غرين:

$$\int_{\Omega} v^2 dx = -\int_{\Omega} v^2 \Delta\phi dx = -\int_{\partial\Omega} v^2 n \cdot \nabla\phi ds + \int_{\Omega} 2v \nabla v \cdot \nabla\phi dx = + \int_{\Omega} 2v \nabla v \cdot \nabla\phi dx$$

حيث  $v = 0$  على  $\partial\Omega$ ، باستخدام متراجحة كوشي، نجد:

$$\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 dx = \int_{\Omega} 2v \nabla v \cdot \nabla\phi dx \leq 2 \max |\nabla\phi| \|v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$$

بأخذ  $L = 2 \max |\nabla\phi|$ ، وتقسيم الطرفين على  $\|v\|_{L_2(\Omega)}$ ، يتم المطلوب.

**مبرهنة 5-4. متراجحة تراك (Trace Inequality):**

لتكن  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  منطقة محدودة، حدودها ملساء و  $\partial\Omega$  الميط المضلعي الشكل، يوجد  $C_{\partial\Omega}$  بحيث إنه من أجل أي  $v \in V$  بحيث:

$$\|v\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C_{\partial\Omega} \left( \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_{\partial\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

**الإثبات:**

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= -\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} & \text{in } \Omega \\ n \cdot \nabla\phi &= 1 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

لتكن  $\phi$  دالة تحقق:

نضرب طرفي المعادلة  $-\Delta\phi = -\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|}$  بالدالة  $v^2$ ، ونكامل الطرفين وحسب مبرهنة غرين:

$$-\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \int_{\Omega} v^2 dx = -\int_{\Omega} v^2 \Delta\phi dx = -\int_{\partial\Omega} v^2 n \cdot \nabla\phi ds + \int_{\Omega} 2v \nabla v \cdot \nabla\phi dx = -\int_{\partial\Omega} v^2 ds + \int_{\Omega} 2v \nabla v \cdot \nabla\phi dx$$

حسب متراجحة كوشي نجد:

$$\begin{aligned}\|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 &= \int_{\partial\Omega} v^2 ds = \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \int_{\Omega} v^2 dx + 2 \int_{\Omega} v \nabla v \cdot \nabla \phi dx \\ &= C_1 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2C_2 \|v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \max(C_1, C_2) (\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2)\end{aligned}$$

حيث:  $C_1 = \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|}$ ,  $C_2 = \sup_{x \in \Omega} |\nabla \phi|$ ، واستناداً إلى المتراجحة  $2ab \leq a^2 + b^2$  حيث  $a = \|v\|_{L_2(\Omega)}$ ,  $b = \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$

**مبرهنة 5-5:** يوجد ثابت  $C_\Omega$  مستقل عن  $v$ ، بحيث:

$$\|\nabla v\| \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C_\Omega \|\nabla v\| \quad \text{لكل } v \in H_{E_0}^1 \quad (19-5)$$

**الإثبات:**

من جهة أولى لدينا:

$$\|v\|^2 = \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|Dv\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{1,\Omega}^2 \Rightarrow \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|v\|_{1,\Omega}$$

ومن جهة ثانية وحسب متراجحة بوانكاريه، نجد:

$$\begin{aligned}\|v\|_{1,\Omega}^2 &= \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|Dv\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq L^2 \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|Dv\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\leq (1+L^2) \|Dv\|_{L_2(\Omega)}^2 = (1+L^2) \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 = C_\Omega^2 \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\Rightarrow \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}\end{aligned}$$

**تعريف 4-5:** نقول عن الصيغة (10-5) أنها  $H^2$  regular، إذا وجد ثابت  $C_\Omega$ ، بحيث من أجل كل  $f \in L^2(\Omega)$  يوجد  $u \in H^2 \subset H^1$  بحيث:

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C_\Omega \|f\| \quad (20-5)$$

**مبرهنة 5-6:** المتراجحة الآتية محققة:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_\Omega \min_{v_h \in S_E^h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \quad (21-5)$$

**الإثبات:**

نلاحظ أن  $u - v_h \in H_{E_0}^1$  إذا كان  $v_h \in S_E^h$ ، حسب المبرهنة 5-2، والمبرهنة 5-5، نجد:



$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_\Omega \|\nabla(u - u_h)\| = C_\Omega \min \|\nabla(u - v_h)\| \leq C_\Omega \|u - v_h\|_{1,\Omega}$$

#### 4-5. الإستيفاء:

يعد الاستيفاء من أبرز المفاهيم الهامة في التحليل العددي، فله الكثير من الطرائق لحسابه، وينقسم إلى قسمين:

#### 1-4-5. الإستيفاء الخطي:

لتكن  $f$  دالة مستمرة على المثلث  $k$  رؤوسه  $(i=1,2,3)$   $N_i$ ، يُعرّف الإستيفاء الخطي<sup>1</sup>  $\pi_h f \in P_1(k)$  للدالة  $f$  بالشكل:

$$\pi_h f = \sum_{i=1}^3 f(N_i) \varphi_i \quad (22-5)$$

بحيث  $\pi_h f(N_i) = f(N_i)$  (الإثبات p78 [82])

#### 2-4-5. الإستيفاء الخطي المستمر قطعياً:

لتكن  $f$  دالة مستمرة على  $\Omega$ ، نعرّف الإستيفاء الخطي المستمر قطعياً  $\pi_h f \in S_0^h$  على شبكة المثلثات  $K$  من المنطقة  $\Omega$  بالشكل:

$$\pi_h f = \sum_{i=1}^{n_p} f(N_i) \varphi_i \quad (23-5)$$

#### 5-5. مؤثر الإسقاط:

لتكن لدينا الدالة  $f \in L_2(\Omega)$ ، حيث  $\Omega$  منطقة في الفضاء ثنائي البعد مقسمة إلى شبكة من العناصر  $K$  (مثلثات أو مستطيلات  $k$ ) حيث  $K = \cup_{k \in K} k$ ، نُعرف مؤثر الإسقاط  $P_h f \in S_0^h$  على الفضاء  $L_2(\Omega)$  بالصيغة:

$$\int_{\Omega} (f - P_h f) v \, dx dy = 0 \quad \forall v \in S_0^h \quad (24-5)$$

ولما كان  $v$  تصلح بأن تكون دوال شكل  $\varphi_i \in S_0^h$  حيث  $i=1, \dots, n$ ، عدد العقد، نكتب:

$$\int_{\Omega} (f - P_h f) \varphi_i \, dx dy = 0 \quad \forall \varphi_i \in S_0^h \quad (25-5)$$

يمكن أن نكتب  $P_h f \in S_0^h$  على شكل تركيب خطي:

---

<sup>1</sup> يرمز بالرمز  $\pi_h f$  لدالة الإستيفاء، وفي بعض المراجع تأخذ الرمز  $I_h f$ .

$$P_h f = \sum_{j=1}^n \xi_j \varphi_j \quad (26-5)$$

حيث  $\xi_j$  ثوابت عددية يتم تحديدها.

نعوض (26-5) في (25-5)، نجد:

$$\int_{\Omega} f \varphi_i dx dy = \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n \xi_j \varphi_j \right) \varphi_i dx dy = \sum_{j=1}^n \xi_j \left( \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx dy \right) \quad (27-5)$$

تكتب المعادلة (27-5)، بالصيغة:

$$M \xi = b$$

$$M = (M_{ij}) = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx dy, \quad b = (b_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i dx dy$$

**مبرهنة 5-7:** إن مؤثر الإسقاط المعرف في العلاقة (24-5)، موجود ووحيد.

**الإثبات:**

لنفرض جلاً أنه يوجد مؤثر إسقاط ثاني  $\tilde{P}_h f$  يختلف عن المؤثر  $P_h f$ ، يحقق العلاقة (25-5)، عندئذ:

$$\int_{\Omega} f v dx dy = \int_{\Omega} \tilde{P}_h f v dx dy \quad \forall v \in S_0^h \quad (28-5)$$

ولما كان:

$$\int_{\Omega} f v dx dy = \int_{\Omega} P_h f v dx dy \quad \forall v \in S_0^h \quad (29-5)$$

بطرح (29-5) من (28-5)، نجد:

$$\int_{\Omega} (\tilde{P}_h f - P_h f) v dx dy = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} |\tilde{P}_h f - P_h f|^2 dx dy = 0 \Rightarrow \tilde{P}_h f - P_h f = 0$$

وعليه  $\tilde{P}_h f = P_h f$ ، فالفرض الجدلي خاطئ والمؤثر  $P_h f$  وحيد.

إن مؤثر الإسقاط  $P_h f$  موجود وذلك بسبب وجود الحل لجملة المعادلات الجبرية (27-5).

**مبرهنة 5-8:** ليكن  $P_h f$  مؤثر إسقاط يحقق العلاقة (24-5)، عندئذ:

$$\|f - P_h f\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f - v\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in S_0^h \quad (30-5)$$

الإثبات:

$$f - P_h f = f - v + v - P_h f \quad \forall v \in S_0^h \quad \text{لنكتب:}$$

وعليه:

$$\begin{aligned} \|f - P_h f\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (f - P_h f)(f - v + v - P_h f) dx dy \\ &= \int_{\Omega} (f - P_h f)(f - v) dx dy + \int_{\Omega} (f - P_h f)(v - P_h f) dx dy \\ &= \int_{\Omega} (f - P_h f)(f - v) dx dy \leq \|f - P_h f\|_{L_2(\Omega)} \|f - v\|_{L_2(\Omega)} \\ \|f - P_h f\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|f - v\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\text{حيث: } \int_{\Omega} (f - P_h f)(v - P_h f) dx dy = 0 \text{ حسب تعريف مؤثر الإسقاط.}$$

**ملاحظة 5-1:** في المبرهنة 5-8، وبأخذ  $v = \pi_h f$ ، نجد:

$$\|f - P_h f\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f - \pi_h f\|_{L_2(\Omega)}$$

**تعريف 5-5 (شرط الزاوية الصغرى):** لنكن  $\{T_h\}$  شبكة من المثلثات  $k$ ، نقول عن الشبكة السابقة أنها شبكة منتظمة الشكل (shape regular) إذا وجد  $\theta_* \neq 0$  زاوية صغرى، بحيث من أجل أي مثلث من الشبكة يتحقق  $\theta_T \geq \theta_*$

**ملاحظة 5-2:** لنعرف بعض المصطلحات اللازمة:

$\Delta_k$ : المثلث في الإحداثيات الديكارتية.

$e_k = (u - \pi_h u)|_{\Delta_k}$ : خطأ الاستيفاء في الإحداثيات الديكارتية.

$\Delta_*$ : المثلث في إحداثيات المساحة.

$\bar{e}_k = (\bar{u} - \pi_h \bar{u})|_{\Delta_k}$ : خطأ الاستيفاء في إحداثيات المساحة.

$h_k$ : أطول أضلاع المثلث.

**مبرهنة 5-9:** المتراجحة الآتية محققة:

$$\|\nabla(u - \pi_h u)\|_{\Delta_k}^2 \leq 2 \frac{h_k^2}{|\Delta_k|} \|\nabla(\bar{u} - \pi \bar{u})\|_{\Delta_*}^2 \quad (31-5)$$

الإثبات:

لتكن:

$$\|\nabla e_k\|_{\Delta_k}^2 = \int_{\Delta_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial e_k}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (32-5)$$

نطبق العلاقة (27-3)، على التكامل (32-5)، فنجد:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial x} \right)^2 dx dy &= \int_{\Delta_*} 2|\Delta_k| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial x} \right)^2 dL_1 dL_2 \\ \int_{\Delta_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial y} \right)^2 dx dy &= \int_{\Delta_*} 2|\Delta_k| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial y} \right)^2 dL_1 dL_2 \end{aligned} \quad (33-5)$$

حيث  $L_1, L_2$  إحداثيات المساحة الموضحة بالشكل (14-3).

نعوض (33-5) في (32-5)، فنجد:

$$\|\nabla e_k\|_{\Delta_k}^2 = \int_{\Delta_k} \left( \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial y} \right)^2 \right) 2|\Delta_k| dL_1 dL_2 \quad (34-5)$$

نطبق العلاقة (27-3) على  $\left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial x} \right)^2, \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial y} \right)^2$  وحسب الرسم الموضح في الشكل (14-3)، نجد:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial x} \right)^2 &= \frac{1}{4|\Delta_k|^2} \left( (y_2 - y_3) \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + (y_3 - y_1) \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial y} \right)^2 &= \frac{1}{4|\Delta_k|^2} \left( (x_3 - x_2) \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + (x_1 - x_3) \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (35-5)$$

ولدينا:

$$(x_i - x_j) \leq h_k, \quad (y_i - y_j) \leq h_k \quad ; i, j = 1, 2, 3 \quad (36-5)$$

وعليه فإن:

$$\begin{aligned}
2|\Delta_k| \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial x} \right)^2 \right| &= \frac{1}{2|\Delta_k|} \left| \left( (y_2 - y_3) \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + (y_3 - y_1) \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right| \\
&\leq \frac{1}{2|\Delta_k|} \left| \left( h_k \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + h_k \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right| = \frac{h_k^2}{|\Delta_k|} \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right| \\
2|\Delta_k| \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial y} \right)^2 \right| &= \frac{1}{2|\Delta_k|} \left| \left( (x_3 - x_2) \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + (x_1 - x_3) \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right| \\
&\leq \frac{1}{2|\Delta_k|} \left| \left( h_k \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + h_k \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right| = \frac{h_k^2}{|\Delta_k|} \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right|
\end{aligned} \tag{37-5}$$

وبتطبيق المتراجحة  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$  على العلاقات (37-5)، نجد:

$$\begin{aligned}
2|\Delta_k| \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial x} \right)^2 \right| &\leq \frac{h_k^2}{|\Delta_k|} \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right| \leq 2 \frac{h_k^2}{|\Delta_k|} \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right| \\
2|\Delta_k| \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial y} \right)^2 \right| &\leq \frac{h_k^2}{|\Delta_k|} \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} + \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right| \leq 2 \frac{h_k^2}{|\Delta_k|} \left| \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial L_2} \right)^2 \right|
\end{aligned} \tag{38-5}$$

نعوض (38-5) في (34-5)، يتم المطلوب.

**مبرهنة 5-10:** العلاقة الآتية محققة:

$$\left\| \nabla (\bar{u} - \pi_h \bar{u}) \right\|_{\Delta_k} \leq C \left\| D^2 (\bar{u} - \pi_h \bar{u}) \right\|_{L_2(\Delta_k)} \equiv C \left\| D^2 \bar{u} \right\|_{L_2(\Delta_k)} \tag{39-5}$$

**مبرهنة 5-11:** العلاقة الآتية محققة:

$$\left\| D^2 \bar{u} \right\|_{L_2(\Delta_k)}^2 \leq 18 \frac{h_k^4}{|\Delta_k|} \left\| D^2 u \right\|_{L_2(\Delta_k)}^2 \tag{40-5}$$

**الإثبات:**

حسب العلاقة (6-5)، نجد:

$$\begin{aligned}
\left\| D^2 \bar{u} \right\|_{\Delta_k}^2 &= \int_{\Delta_k} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial L_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial L_1 \partial L_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial L_2^2} \right)^2 dL_1 dL_2 \\
&= \int_{\Delta_k} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial L_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial L_1 \partial L_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial L_2^2} \right)^2 \frac{1}{2|\Delta_k|} dx dy
\end{aligned} \tag{41-5}$$

وباستخدام العلاقة (27-3)، نجد:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial L_1}\left(\frac{\partial u}{\partial L_1}\right)\right)^2 &= \left((x_1 - x_3)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial L_1}\right) + (y_1 - y_3)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial L_1}\right)\right)^2 \\
&= \left((x_1 - x_3)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x_1 - x_3)(y_1 - y_3) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (y_1 - y_3)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 \\
&\leq 3 \left( (x_1 - x_3)^4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 4(x_1 - x_3)^2 (y_1 - y_3)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + (y_1 - y_3)^4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 \right) \\
\left(\frac{\partial}{\partial L_1}\left(\frac{\partial u}{\partial L_1}\right)\right)^2 &\leq 12h_k^4 \left( \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 \right) \tag{42-5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial L_1}\left(\frac{\partial u}{\partial L_2}\right)\right)^2 &= \left((x_1 - x_3)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial L_2}\right) + (y_1 - y_3)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial L_2}\right)\right)^2 \\
&= \left( (x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\
&\quad \left. + ((x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + (y_1 - y_3)(y_2 - y_3) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \\
&\leq 3 \left( (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( (x_1 - x_3)^2 (y_1 - y_3)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)(x_2 - x_3)(y_1 - y_3) \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + (y_1 - y_3)^2 (y_2 - y_3)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 \right) \\
\left(\frac{\partial}{\partial L_1}\left(\frac{\partial u}{\partial L_2}\right)\right)^2 &\leq 12h_k^4 \left( \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 \right) \tag{43-5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial}{\partial L_2} \left( \frac{\partial u}{\partial L_2} \right) \right)^2 &= \left( (x_2 - x_3) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial L_2} \right) + (y_2 - y_3) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial L_2} \right) \right)^2 \\
&= \left( (x_2 - x_3)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x_2 - x_3)(y_2 - y_3) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (y_2 - y_3)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \\
&\leq 3 \left( (x_2 - x_3)^4 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 4(x_2 - x_3)^2 (y_2 - y_3)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + (y_2 - y_3)^4 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) \\
\left( \frac{\partial}{\partial L_2} \left( \frac{\partial u}{\partial L_2} \right) \right)^2 &\leq 12h_k^4 \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) \quad (44-5)
\end{aligned}$$

نعوض (42-5)، (43-5)، (44-5) في (41-5) فيتم المطلوب.

**مبرهنة 5-12:** من أجل أي مثلث  $\Delta_T$ ، علاقة التكافؤ الآتية محققة:

$$\frac{h_T^2}{4} \sin \theta_T \leq |\Delta_T| \leq \frac{h_T^2}{2} \sin \theta_T \quad ; 0 < \theta_T \leq \frac{\pi}{3} \quad (45-5)$$

حيث  $\theta_T$  أصغر زاوية داخلية في المثلث  $\Delta_T$ .

**مبرهنة 5-13:** المتراجحة الآتية محققة:

$$\|\nabla(u - \pi_h u)\|^2 \leq Ch^2 \|D^2 u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (46-5)$$

**الإثبات:**

من خلال المبرهنات 4-5، 9-5، 10-5، 12-5، نجد:

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u - \pi_h u)\|_{\Delta_k}^2 &\leq 2 \frac{h_k^2}{|\Delta_k|} \|\nabla(\bar{u} - \pi_h \bar{u})\|_{\Delta_k}^2 = 2 \frac{h_k^2}{|\Delta_k|} C^2 \|D^2 \bar{u}\|_{L_2(\Delta_k)}^2 \\
&\leq 2C^2 (18) \frac{h_k^6}{|\Delta_k|^2} \|D^2 u\|_{L_2(\Delta_k)}^2 \leq (16)(36) C^2 h_k^2 \frac{1}{\sin^2 \theta_k} \|D^2 u\|_{L_2(\Delta_k)}^2
\end{aligned}$$

وعليه:

$$\|\nabla(u - \pi_h u)\|_{\Delta_k}^2 \leq C \sum_{\Delta_k \in \mathcal{T}_h} h_k^2 \frac{1}{\sin^2 \theta_k} \|D^2 u\|_{L_2(\Delta_k)}^2 \quad (47-5)$$

حسب التعريف (5-5)، و لما كان:

$$\theta_k \geq \theta_* \Rightarrow \sin \theta_k \geq \sin \theta_* \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta_k} \leq \frac{1}{\sin \theta_*} \quad (38-5)$$

نعوض (48-5) في (47-5)، فنجد:

$$\|\nabla(u - \pi_h u)\|_{\Delta_k}^2 \leq C(\theta_*) \sum_{\Delta_k \in T_h} h_k^2 \|D^2 u\|_{L_2(\Delta_k)}^2 \quad (49-5)$$

وطالما أن  $h_k = h$  في طريقة العناصر المنتهية، لأن الفرق بين جميع العقد ثابت، فيتم المطلوب

**مبرهنة 5-14:** المتراجحة الآتية محققة:

$$\|u - \pi_h u\|^2 \leq Ch^4 \|D^2 u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (50-5)$$

**الإثبات:**

حسب متراجحة بوانكاريه:

$$\|u - \pi_h u\|^2 \leq C \cdot h^2 \|\nabla(u - \pi_h u)\|^2 \leq C \cdot Ch^4 \|D^2 u\|_{L_2(\Omega)}^2 = Ch^4 \|D^2 u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

**مبرهنة 5-15:** مبرهنة الوجود والوحدانية (مبرهنة Lax-Milgram) [85]:

ليكن  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  شكل ثنائي الخطية يحقق :

$$|a(\phi, \psi)| \leq c_1 \|\phi\| \|\psi\| \quad \forall \phi, \psi \in H^1(\Omega) \quad (51-5)$$

$$a(\phi, \phi) \geq c_2 \|\phi\|^2 \quad \forall \phi \in H^1(\Omega) \quad (52-5)$$

حيث  $c_1, c_2$  أعداد موجبة مستقلة عن  $\phi, \psi$ .

وليكن  $l : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

دالي خطي ومحدود على  $H^1(\Omega)$  ومنه يوجد  $u \in H^1(\Omega)$  وحيد يحقق :

$$a(u, v) = l(v)$$

$$\|u\| \leq \frac{1}{c_2} \|l\|$$

لكل  $v \in H^1(\Omega)$ .

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy$$

حيث :

$$l(v) = - \iint_{\Omega} f v dx dy + \int_{\partial\Omega} g_N v ds$$



## الإثبات:

ليكن  $\phi \in H$  مثبت، فإن  $\Phi: H \rightarrow \mathbb{R}$  معرّف بالشكل :

لكل  $v \in H$  :  $\Phi(v) = a(\phi, v)$  وهو دالي خطي ومستمر على  $H$  لأن:

الخطية تنتج من أن  $a$  خطي، أما المحدودية تنتج بالشكل : من أجل أي  $v \in H$  :

$$\begin{aligned} |\Phi(v)| &= |a(\phi, v)| \leq c_1 \|\phi\| \|v\| \\ \|\Phi\| &\leq c_1 \|\phi\| \end{aligned}$$

وحسب مبرهنة Riesz Representation ([6], Theorem 1.2, P 16-17) :

كل دالي خطي ومحدود  $l$  على فضاء هلبرت  $H$  يُعبر عنه بالشكل  $l(\phi) = (\phi, f)$  لأي

$\phi \in H$  حيث  $f \in H$  ويكون  $\|l\| = \|f\|$ .

ومنه يوجد عنصر وحيد  $\tilde{\phi} \in H$  بحيث :

$$\Phi(v) = a(\phi, v) = (v, \tilde{\phi}) \quad \text{لكل } v \in H \quad (53-5)$$

ومنه لكل  $\phi \in H$  نعرّف  $\tilde{\phi} \in H$ ، وحسب العلاقة (53-5) لنرمز للتقابل  $\phi \rightarrow \tilde{\phi}$  بالرمز :

$$\tilde{\phi} = A\phi$$

$$a(\phi, v) = (v, A\phi) \quad \forall v \in H, \forall \phi \in H \quad (54-5)$$

ان  $A$  مؤثر خطي على  $H$  لأن:

بأخذ  $\phi, \psi \in H$  لكل  $v \in H$  و  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  لدينا :

$$\begin{aligned} (v, A(\lambda\phi + \mu\psi)) &= a(\lambda\phi + \mu\psi, v) = \lambda a(\phi, v) + \mu a(\psi, v) = \lambda(v, A\phi) + \mu(v, A\psi) \\ &= (v, \lambda A\phi + \mu A\psi) \Rightarrow A(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda A\phi + \mu A\psi \end{aligned}$$

ولنفرض أن  $A$  معرّف حسب العلاقة (54-5)، لنبين أن  $Ran(A)$  فضاء جزئي مغلق في  $H$  :

لتكن  $\hat{\phi}_n = A\phi_n$  متتالية متقاربة بحيث  $\hat{\phi}_n \rightarrow \hat{\phi}$ ، ولما كان  $\forall v \in H$   $a(\phi_n, v) = (v, A\phi_n)$

فإن  $\forall v \in H$   $a(\phi_n - \phi_m, v) = (v, A\phi_n - A\phi_m)$  ولنختار  $\phi_n - \phi_m = v$  وبإستخدام (52-5)

نجد:

$$\|\phi_n - \phi_m\| \leq \frac{1}{c_2} \|A\phi_n - A\phi_m\|$$

ومنه  $\phi_n$  متتالية كوشي في  $H$ .

ومنه يوجد  $\phi \in H$  بحيث  $\phi_n \rightarrow \phi$ ، ولنبين أن  $\hat{\phi} = A\phi$  أي لنبين أن  $\hat{\phi} \in \text{Ran}(A)$ :

$$|a(\phi_n, v) - a(\phi, v)| \leq c_1 \|\phi_n - \phi\| \|v\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a(\phi_n, v) = a(\phi, v) \quad \forall v \in H$$

وأيضاً:

$$A(\phi_n, v) = (\hat{\phi}_n, v) \rightarrow (\hat{\phi}, v)$$

ولما كان :

$$|(\hat{\phi}_n, v) - (\hat{\phi}, v)| \leq \|\hat{\phi}_n - \hat{\phi}\| \|v\|, \quad a(\phi_n, v) = (A\phi_n, v) \quad \forall v \in H$$

ينتج أن :

$$\begin{aligned} a(\phi, v) &= (\hat{\phi}, v) \quad \forall v \in H \\ \Rightarrow \hat{\phi} &= A\phi \end{aligned}$$

ومنه  $\text{Ran}(A)$  مغلق .

لنثبت الآن أن  $\text{Ran}(A) = H$ :

لنفرض جديلاً أن  $H \not\subset \text{Ran}(A)$  ومنه :

$$\exists z \neq 0 \in (\text{Ran}(A))^\perp \Rightarrow (z, v) = 0 \quad \forall v \in \text{Ran}(A)$$

وخصوصاً:

$$\forall \phi \in H, a(\phi, z) = (A\phi, z) = 0 \Rightarrow \phi = z \Rightarrow 0 = a(z, z) \geq c_2 \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$$

وهذا مناقض للفرض الجدلي ومنه  $\text{Ran}(A) = H$ .

لتكن  $l$  دالي خطي ومحدود على  $H$ ، وحسب مبرهنة Riesz Representation :

$$\exists x \in H ; l(v) = (x, v) \quad \forall v \in H$$

ولما كان  $\text{Ran}(A) = H$  :  $\exists u \in H ; Au = x$  أي  $\exists u$  بحيث :

$$l(v) = (Au, v) = a(u, v) \quad \forall v \in H$$

ومنه  $u$  موجود، ولتثبت أنه وحيد:

لنفرض أنه  $\exists u_1 \neq u_2 ; a(u_1, v) = l(v) = a(u_2, v) \quad \forall v \in H$  ومنه :

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in H$$

$$0 = a(u_1 - u_2, v) \geq c_2 \|u_1 - u_2\|^2 \Rightarrow u_1 = u_2$$

ومنه الحل وحيد.

لما كان :  $a(u, u) = l(u)$  فإنه من (51-5) و (52-5) نجد أن  $u \neq 0$  :

$$c_2 \|u\|^2 \leq |l(u)| \Rightarrow \|u\| \leq \frac{1}{c_2} \frac{|l(u)|}{\|u\|} \Rightarrow \|u\| \leq \sup_{v \neq 0} \frac{1}{c_2} \frac{|l(u)|}{\|v\|} = \frac{1}{c_2} \|l\|$$

**مبرهنة 5-16: مبرهنة Cea's [85]** ليكن  $u_h$  الحل التقريبي بطريقة العناصر المنتهية، وليكن  $S_0^h$

فضاء العناصر المنتهية،  $C_1, C_2$  ثوابت موجبة، وعليه فإن:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C_1}{C_2} \min_{v \in H_{E_0}^1} \|u - v\|_{1,\Omega} \quad (55-5)$$

**الإثبات:**

نعلم أن:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_{E_0}^1 \quad (56-5)$$

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in H_{E_0}^1 \quad (57-5)$$

ب طرح (57-5) من (56-5)، نجد:

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in H_{E_0}^1 \quad (58-5)$$

حسب المبرهنة (15-5):

$$\begin{aligned} C_2 \|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) \leq C_1 \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|u - v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{C_1}{C_2} \|u - v\|_{1,\Omega}$$

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{C_1}{C_2} \min_{v \in H_{E_0}^1} \|u - v\|_{1,\Omega}$$

مبرهنة 5-17: (المبرهنة الأساسية في الأخطاء): المتراجحة الآتية محققة:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{C_1}{C_2} Ch^2 \|D^2 u\|_{L_2(\Omega)} \quad (59-5)$$

الإثبات:

حسب المبرهنة 5-7، 5-3، وحسب الملاحظة 5-1، نجد:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} &\leq \frac{C_1}{C_2} \min_{v \in H_{E_0}^1} \|u - v\|_{1,\Omega} = \frac{C_1}{C_2} \|u - P_h u\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C_1}{C_2} \|u - v\|_{L_2(\Omega)} = C \frac{C_1}{C_2} \|u - \pi_h u\| \leq \frac{C_1}{C_2} Ch^2 \|D^2 u\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

مثال (5-1): لتكن لدينا معادلة بواسون الآتية [71]:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 & ; \Omega &= [0,4] \times [0,4] \\ u(x,y) &= e^y \cos x - e^x \cos y & ; (x,y) &\in \partial\Omega \end{aligned} \quad (60-5)$$

ويُعطى الحل الفعلي للمسألة (60-5) بالصيغة:

$$u(x,y) = e^y \cos x - e^x \cos y \quad (61-5)$$

ولنوجد الحل التقريبي للمسألة (60-5) بطريقة العناصر المنتهية ومقارنته مع الحل الفعلي (61-5)، وذلك بأخذ  $h = 1, 0.5, 0.25$  وإيجاد الحلول في كل حالة، بإتباع جميع الخطوات الموضحة في الفصل الثالث.

حيث يتم تقسيم المنطقة في حالة:

- عندما  $h = 1$  تقسم المنطقة إلى 32 عنصر مثلثي فنحصل على 25 عقدة.
- عندما  $h = 0.5$  تُقسم المنطقة إلى 128 عنصر مثلثي فنحصل على 81 عقدة.
- بحالة  $h = 0.25$  نحصل على 512 عنصر مثلثي فنحصل على 289، وبرمجة الطريقة لكل حالة من الحالات السابقة ببرنامج الماتلاب (ملحق 3)، نجد:

$u_{approx}$	$u_{exa}$	$\ u_{exa} - u_{approx}\ _{L_2}$	$\frac{\ u_{exa} - u_{approx}\ _{L_2}}{\ u_{exa}\ _{L_2}} 100\%$
(3,1) = -24.1031	(3,1) = -17.36792128	26.93555271	0.3877196703
(3,2) = -17.8242	(3,2) = -12.6943717	20.51930798	0.4041027209
(1,3) = 24.1031	(1,3) = 17.36792128	26.93555271	0.3877196703
(2,3) = 17.8242	(2,3) = 12.6943717	20.51930798	0.4041027209

**الجدول (5-1):** يبين مقارنة بين القيم الفعلية والتقريبية للعقد الداخلية والخطأ المطلق والنسبي عندما  $h = 1$ .

$u_{approx}$	$u_{exa}$	$\ u_{exa} - u_{approx}\ _{L_2}$	$\frac{\ u_{exa} - u_{approx}\ _{L_2}}{\ u_{exa}\ _{L_2}} 100\%$
(2,0.5) = -8.1383	(2,0.5) = -5.741057832	9.588967619	0.4175609782
(2.5,0.5) = -14.4339	(2.5,0.5) = -10.53387804	15.60009615	0.3702364451
(2,1) = -7.7342	(2,1) = -4.671304785	12.25157133	0.6556828962
(2,1.5) = -5.0656	(2,1.5) = -2.907565108	8.512138392	0.7318956537
(0.5,2) = 8.1383	(0.5,2) = 5.741057832	9.588967619	0.417569782
(1.5,2) = 5.0656	(1.5,2) = 2.907565108	8.632137626	0.7414396546
(2.5,2) = -7.6514	(2.5,2) = -4.79304936	11.43341594	0.5963540893
(2,2.5) = 7.6514	(2,2.5) = 4.79304936	11.43341594	0.5963540893
(3,2.5) = -10.7246	(3,2.5) = -7.900621666	13.06131693	0.4133003246
(2.5,3) = 10.7246	(2.5,3) = 7.900621666	13.06131693	0.4133003246
(3.5,3) = -14.8270	(3.5,3) = -13.02199503	7.220020776	0.1386119727
(3,3.5) = 14.8270	(3,3.5) = 13.02199503	7.220020776	0.1386119727

**الجدول (5-2):** يبين مقارنة بين القيم الفعلية والتقريبية للعقد الداخلية والخطأ المطلق والنسبي عندما  $h = 0.5$ .

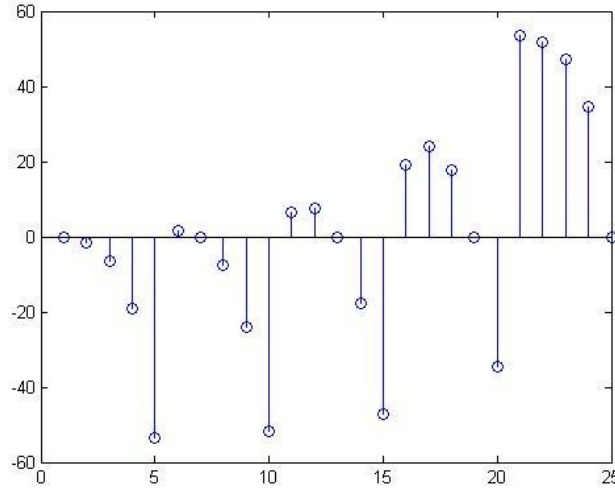
$u_{approx}$	$u_{exa}$	$\ u_{exa} - u_{approx}\ _{L_2}$	$\frac{\ u_{exa} - u_{approx}\ _{L_2}}{\ u_{exa}\ _{L_2}} 100\%$
(0.75,0.5) = -0.5939	(0.75,0.5) = -0.468339387	0.5022419736	0.2680943128
(0.25,0.5) = 0.3647290511	(0.25,0.5) = 0.3996	0.1394836908	0.08736461505
(0.75,1) = 0.8792	(0.75,1) = 0.6013713594	1.111314537	0.4619918043
(1,1.25) = 1.2574	(1,1.25) = 0.7721764103	1.94089124	0.6283834473
(1.25,0.75) = -2.0909	(1.25,0.75) = -1.373547703	2.869409347	0.522262695
(1.25,1.5) = 1.7218	(1.25,1.5) = 0.9914756456	2.921297657	0.7366030921

$(3.5, 3.25) = -8.1349$	$(3.5, 3.25) = -7.319955668$	3.359769931	0.1147469368
$(3.5, 3.75) = 9.397222377$	$(3.5, 3.75) = 9.7870$	1.559111927	0.03982604076
$(3.75, 3.5) = -9.7870$	$(3.75, 3.5) = -9.397222377$	1.559111927	0.04147806688

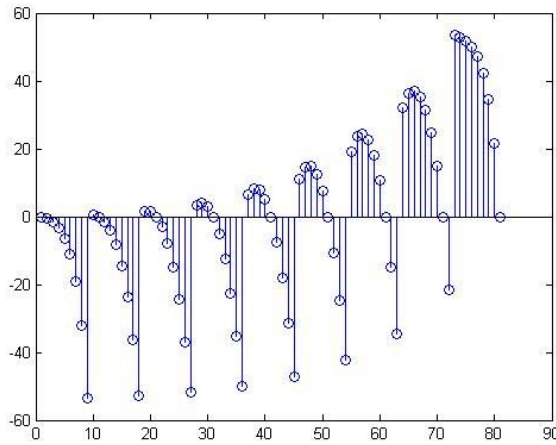
**الجدول (3-5):** يبين مقارنة بين القيم الفعلية والتقريبية للعقد الداخلية والخطأ المطلق والنسبي عندما

$$h = 0.25$$

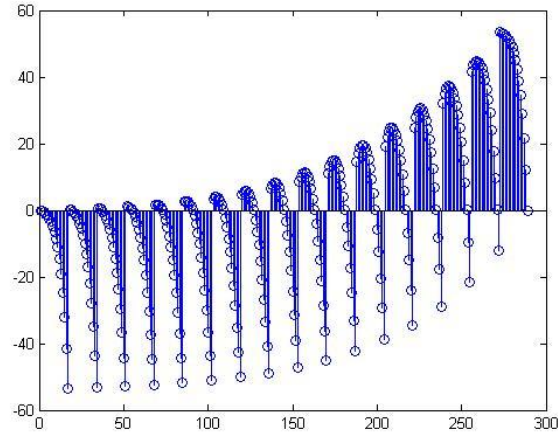
قد تبدو الأخطاء في الجداول السابقة كبيرة نسبياً إلا أن ذلك يعود بشكل رئيسي إلا أن عدد العناصر صغير نوعاً ما، حيث إن معظم المسائل التي تتم دراستها بطريقة العناصر المستخدمة يتم تجزئة المنطقة المدروسة فيها إلى المئات والألاف من العناصر، لذا لا بد من زيادة عدد العناصر المستخدمة في تجزئة المنطقة للحصول على دقة أكبر.



**الشكل (1-5):** قيم العقد المجهولة عندما  $h = 1$ .



**الشكل (2-5):** قيم العقد المجهولة عندما  $h = 0.5$ .



الشكل (3-5): قيم العقد المجهولة عندما  $h = 0.25$  .

#### 5-6. ملخص الفصل الخامس:

تم في هذا الفصل إيجاد عبارة الخطأ المرتكب، من خلال إثبات مجموعة من المبرهنات، وتم إيجاد قيم العقد المجهولة لمسألة بواسون الحدية وإيجاد الخطأ المطلق والنسبي بأخذ عدة قيم ل  $h$  .

## الخاتمة والرؤى المستقبلية

من المعلوم لدينا أنه لا توجد طريقة عامة لإيجاد الحل الفعلي للمعادلات التفاضلية الجزئية، الخطية وغير الخطية، ونظراً لأنه يصعب التعامل مع هذه المعادلات عندما تُدرس في أوساط معقدة بطرائق تحليلية، فقد اتجهت معظم الطرائق التي عملت على حلها إلى تبسيط شكل المسألة، إلا أن طريقة العناصر المنتهية سلكت منحى مُعابراً، إذ إنها احتفظت بتعقيدات المسألة، وركزت على المنطقة نفسها، حيث اعتمدت على تجزئة المنطقة إلى مجموعة من العناصر البسيطة.

لقد أشرنا خلال هذا العمل إلى أهمية طريقة العناصر المنتهية، والتي تم البحث فيها كثيراً فوجدنا أن أغلب المقالات والكتب لا تذكر خطوات الحل، وعند التواصل مع عدد من الباحثين في هذا المجال تبين أن الأجوبة النهائية يتم الحصول عليها من خلال تطبيق أكواد ماتبلا جاهزة، دون التطرق للخطوات وشرحها والدخول في تفاصيلها.

انقسم العمل في هذه الرسالة إلى خمسة فصول وملحق، كان الهدف منها إيجاد الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الناقصية في الفضاء ثنائي البعد، ودراستها بأسلوب تفصيلي وتطبيقها على العديد من الأمثلة.

هذا وفي ضوء دراستنا لحل المعادلات التفاضلية الناقصية بطريقة العناصر المنتهية يمكن أن نستخلص النتائج الآتية:

### 1. تتدرج طريقة العناصر المنتهية وفق خطوات أساسية وهي:

إيجاد الشكل الضعيف، تجزئة المنطقة، إيجاد دوال الشكل لكل عنصر، إيجاد مصفوفات الصلابة ومتجهات الحمل، حل جملة المعادلات الناتجة (الخطية، غير الخطية).

### 2. لا بدّ من استخدام أنواع مختلفة من الجمل الإحداثية في طريقة العناصر المنتهية وهي:

- جملة الإحداثيات الديكارتية والتي تتعامل فقط مع الأشكال الهندسية المنتظمة، مثل: مثلث، مستطيل، هرم، متوازي مستطيلات،....
- جملة الإحداثيات المركزية والتي تقوم بتحويل الشكل الهندسي غير المنتظم إلى شكل هندسي منتظم ينطبق مركز ثقله على مبدأ الإحداثيات المركزية.
- جملة إحداثيات المساحة والتي أيضاً تساعد على تحويل الشكل الهندسي غير المنتظم إلى شكل هندسي منتظم تنطبق أحد عقده على مبدأ إحداثيات المساحة وتُقاس جميع أضلاعه بوحدة الطول.

### 3. إنّ استخدام المسائل الحدية ذات الشروط المختلطة يزيد من صعوبة إيجاد قيم متجهات الحمل، لذا فقد تم شرح كيفية إيجادها بعدة أمثلة، وتم وضع قوانين تساعد في ذلك.



4.تحتاج طريقة العناصر المنتهية إلى طرائق أخرى لإيجاد الحل التقريبي للمعادلات الناقصية غير الخطية، ومن أهم الطرائق التي استخدمت:

- طريقة نيوتن\_غاوس: التي تساعد على حل جملة المعادلات غير الخطية الناتجة.
- طريقة نيوتن\_غالركين: والتي تحتاج لكثير من الخطوات، إلا أن الحل يتقارب بشكل سريع.
- طريقة بيكارد التكرارية: تمتاز بسهولة تطبيق خطواتها إلا أن الحل يتقارب بشكل بطيء.
- طريقة تحليل الهوموتوبي: والتي تساعد على تحويل المسألة غير الخطية إلى مسألة خطية، حيث تم دمجها مع طريقة العناصر المنتهية للوصول إلى النتائج المطلوبة.
- طريقة تحسين نيوتن\_رافسون بطريقة تفريق أدوميان المعدلة: تم تحسين طريقة نيوتن\_رافسون من خلال طريقة تفريق أدوميان المعدلة، وذلك لإيجاد رُتب تقريب مختلفة، حيث تم إدخال رتبة التقريب الثانية والخامسة إلى مفهوم العناصر المنتهية.

5.إنَّ زيادة عدد العناصر المستخدمة في تجزئة المنطقة يزيد من دقة الحل العددي الناتج، إلا أن ذلك يزيد في الوقت نفسه من خطوات الحل.

6.تمت صياغة ثلاث برامج ماتلاب، برنامج لطريقة بيكارد التكرارية مع طريقة العناصر المنتهية، برنامج لطريقة هوموتوبي العناصر المنتهية، وبرنامج لمعادلة بواسون الخطية بطريقة العناصر المنتهية باستخدام مئات العناصر.

ومن خلال دراستنا لحل المعادلات الناقصية بطريقة العناصر المنتهية كان لابد لنا من تقديم بعض المقترحات والرؤى المستقبلية، وأبرزها:

- ❖ صياغة مسائل حدية بدرجات حرية مختلفة وذات مشتقات من الرتبة الأولى والثانية، وذلك لاستخدام العناصر التربيعية والتكعيبية، وتوضيح كيفية استخدامها وكيفية تقسيم المنطقة المعطاة من خلالها.
- ❖ العمل على دمج طريقة العناصر المنتهية مع طرائق تقريبية أخرى، لإيجاد الحل التقريبي للمسائل غير الخطية والشاذة.
- ❖ تطبيق ما تمت دراسته في هذه الأطروحة على المعادلات المكافئية والزائدية.
- ❖ دراسة إمكانية تطبيق ما تمت دراسته هنا على المعادلات التكاملية.
- ❖ العمل على برمجة الطرائق الأخرى في هذه الأطروحة ببرنامج الماتلاب، وتعميم البرامج التي قُدمت هنا.
- ❖ العمل على استخدام لغات برمجية أخرى مثل (Maple, Java, Abaqus, Ansys....).
- ❖ تطبيق ماتمت دراسته في هذه الأطروحة على المعادلات التفاضلية الجزئية في الفضاء ثلاثي البعد.

## ملحق

البرنامج الأول: برنامج الماتلاب للمثال (3-4)، طريقة بيكارد التكرارية مع العناصر المنتهية.

```
clc, close, clear all
syms x y

height= 1;
width = 1;
dx= 0.25;
dy= 0.25;
Nx=4;
NE=32;
xaxis = 0:dx:width;
yaxis = 0:dy:height;

[X Y] = meshgrid(xaxis,yaxis);

NumNod = numel(X);
u = sym('U', [1 NumNod])
e = sym('e', [1 NE]);
u0=u;
[cord cT nNodes
]=femTriangularMeshGenerator(width,height,Nx,NE);
a=0;t=0;
for i = 1:3:size(cord,1)
    a=a+1;
    temp{a}=[cord( i,1 )    cord(i,2)
              cord(i+1,1)    cord(i+1,2)
              cord(i+2,1)    cord(i+2,2)];
    t=t+1;
    if t==2
        Tricord{a}=temp{a-1};
        Tricord{a-1}=temp{a};
        t=0;
    end
end

end

a=1;
for i=1:[size(yaxis,2)-1]
    for j=1:[size(xaxis,2)-1]
        Trimesh{i,j} =[e(a) e(a+1)];
        TrimeshCords{i,j}= [Tricord(a) Tricord(a+1)];
    end
end
```

```

end

k=0;
indx=1:NumNod;
for i=1:size(yaxis,2)
    for j =1:size(xaxis,2)
        Mesh{i,j}= [xaxis(j) yaxis((size(yaxis,2))+1-
i)];
        k=k+1;
        UMat(size(yaxis,2)+1-i,j)= u(1,k);
        IndxM(size(yaxis,2)+1-i,j)= indx(1,k);
    end
end

for k=1:NE

    a1= Tricord{k}(1,1);
    a2= Tricord{k}(2,1);
    a3= Tricord{k}(3,1);
    b1= Tricord{k}(1,2);
    b2= Tricord{k}(2,2);
    b3= Tricord{k}(3,2);

    delta = (a1 - a3)*(b2 - b3)- (a2 -a3)*(b1-b3);
    N1{k} = ((a2*b3 - a3*b2) + (b2 - b3)*x + (a3
- a2)*y)/delta;
    N2{k} = ((a3*b1 - a1*b3) + (b3 - b1)*x + (a1
- a3)*y)/delta;
    N3{k} = ((a1*b2 - a2*b1) + (b1 - b2)*x + (a2
- a1)*y)/delta;

end
initial=32*x -15.34904;
Uanswer(1)=initial
m=2;
cntdf=1;
while 1
    uhint= initial ;
    A=zeros(3,3,32);
    for k=1:8%NE
        for i =1:3
            for j =1:3
                df=eval(sprintf(' ((1+uhint)^2) *
(diff(N%d{%d},x) *diff(N%d{%d},x) + diff(N%d{%d},y)
*diff(N%d{%d},y)) ',i,k,j,k,i,k,j,k));

```

```

        %sprintf(' ((1+uhint)^2) *
        (diff(N%d{%d},x) *diff(N%d{%d},x) + diff(N%d{%d},y)
        *diff(N%d{%d},y)) ',i,k,j,k,i,k,j,k)
        %df=eval(sprintf(' (1-uhint)^2 '));
        ht = matlabFunction(df);
        if mod(k,2)==1 % odd k
            xmin = Tricord{k}(1,1);xmax =
Tricord{k}(2,1);ymin =x-Tricord{k}(1,1);ymax =
Tricord{k}(3,2);
            inty=int(df,y,ymin,ymax);
            int2x=int(inty,x,xmin,xmax);
            A(i,j,k)=double(int2x);
            %A(i,j,k)
            =integral2(ht,xmin,xmax,ymin,ymax)
        else % k odd
            xmin = Tricord{k}(1,1);xmax =
Tricord{k}(2,1);ymin = Tricord{k}(1,2);ymax = x-
Tricord{k}(1,1);
            inty=int(df,y,ymin,ymax);
            int2x=int(inty,x,xmin,xmax);
            A(i,j,k)=double(int2x);
            %A(i,j,k)
            =integral2(ht,xmin,xmax,ymin,ymax)
        end

    end

end

for i=1:8

    A(:, :, i+8)=A(:, :, i);
    A(:, :, i+16)=A(:, :, i);
    A(:, :, i+24)=A(:, :, i);

end

Astiff=zeros(25,25);
for i=1:25
    for j =1:25
        Astiff(i,j) = stiff(i,j,A);
    end
end

Astiff = Astiff + Astiff';

```

```

for i = 1:25
    Astiff(i,i)=Astiff(i,i)/2;
end

itl = [2 3 4 7 8 9 12 13 14 17 18 19 22 23 24];
itp1 = [ 1 6 11 16 21 ]
itp2 = [ 5 10 15 20 25 ]
itp = [1 5 6 10 11 15 16 20 21 25];

for i = 1:15
    for j = 1:15
        C11(i,j)= Astiff(itl(i),itl(j));
    end
end

for i = 1:15
    for j = 1:10
        Cpp(i,j)= Astiff(itl(i),itp(j));
    end
end

itp1 = [ 1 6 11 16 21 ]
itp2 = [ 5 10 15 20 25 ]
itp = [1 5 6 10 11 15 16 20 21 25];
up = [0 1 0 1 0 1 0 1 0 1]';

u1 = -1* inv(C11)*Cpp*up

for i = 1 : length(up)
    u0(itl(i))= up(i);
end
for i = 1 : length(itl)
    u0(itl(i))= u1(i);
end

u1 = 32*x - 18 + ( u0(2) + u0(3) + u0(4) ) * (-8*y
+3 ) + ( u0(7) + ...
    u0(8) + u0(9) + u0(12) + u0(13) + u0(14) +
u0(17) + u0(18) + u0(19))*6 + (u0(22) + u0(23) +
u0(24))*(8*y - 4);
Uanswer(m)=u1;
initial=u1;

check = (uhint - u1)^2;
inty=int(check,y,0,1);
Check_value=int(inty,x,0,1);

```

```

Check_value=double(Check_value);
Diffvalues(cntdf) =Check_value
cntdf=cntdf+1;
if Check_value < 10^(-5)
    break;
end
m=m+1;

end
clc
format compact
disp('Difference values ')
disp(' ')
Diffvalues
disp('U equations ')
disp(' ')
pretty(Uanswer(:))
%output(:)

function [coords cT nNodes
]=femTriangularMeshGenerator(Lx,Ly,Nx,NE)
    % This function generates triangular mesh for a
rectangular
    % shape structure for finite element analysis
    % [coords cT nNodes
]=femTriangularMeshGenerator(Lx,Ly,Nx,NE)
    % coords = x and y coordinates of each
element nodes
    % cT = nodal connectivity
    % nNodes = Number of nodes
    % Lx = width of the rectangular
structure
    % Ly = Height of the rectangular
structure
    % Nx = Number of divisions on x- axis
    % NE = Number of elements
    %

    if mod((NE/Nx),2)~=0
        errordlg('The No of divisions on X axis must
divide No of Elements twice')
    end

    Ny=NE/(2*Nx); %Divisions on y axis

```

```

nNodes = (Nx+1) * (Ny+1); %No of nodes

m=1;
j=1:Nx;
k=linspace(Nx*2,NE,Ny);

for i=1:Ny
    cT(m:2:k(i),1)= j; %node 1 of 1st element
    cT(m+1:2:k(i),1)= j; %node 1 of 2nd element
    cT(m:2:k(i),2)=j+1; %%node 2 of 1st element
    cT(m+1:2:k(i),2)=j+Nx+2; %%node 2 of 2nd
element
    cT(m:2:k(i),3)= j+Nx+2; %node 3 of 1st
element
    cT(m+1:2:k(i),3)=j+1+Nx; %%node 3 of 1st
element

    m=k(i)+1;
    j=j+Nx+1;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%COORDINATES
GENERATION%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ax=linspace(0,Lx,Nx+1); %%%x coordinates
by=linspace(0,Ly,Ny+1); %%%y coordinates
X1=[];
Y1=[];
for i1=1:Ny+1
    % General Nodal Coordinates layer by layer
    by1(1:Nx+1)=by(i1);
    X1=[X1 ax];
    Y1=[Y1 by1];
end
j=1:3;

%%each element coordinates
for n=1:NE
    X(j,1) = X1(cT(n,:));
    Y(j,1)=Y1(cT(n,:));
    j=j+3;
end
coords=[X Y]; %x and y coordinates
%This example generates NE elements for a rectangular
structure of

```

```

    %length = Ly units and width = Lx units with Nx
divisions on the x
    %axis using femTriangularMeshGenerator function

clc ,clear all
cla
Lx=1;
Ly=1;
Nx=4;
NE=32;

[coords cT nNodes
]=femTriangularMeshGenerator(Lx,Ly,Nx,NE);

disp(['Number of nodes = ',num2str(nNodes)])
disp('Connectivity Table')
disp(cT)

z=1;
for i=1:NE

figure(1),patch('Vertices',coords(z:z+2,:), 'Faces',[1
,2,3], 'FaceColor','none', 'EdgeColor','g')
    hold on
    z=z+3;
end

figure(1),scatter(coords(:,1),coords(:,2), 'MarkerFace
Color','r')

    hold off
function [a] = stiff(i,j,A)
a=0;
if j==i

    if i == 2 | i == 3 | i == 4
        a = A(2,2,2*i-2) + A(1,1,2*i-1) +
A(1,1,2*i);
    elseif i ==1
        a = A(1,1,1) + A(1,1,2);
    elseif i ==5
        a = A(2,2,8);
    elseif i == 7 | i == 12 | i == 17
        a = A(2,2,2) + A(1,1,3) +
A(1,1,4) ...

```



```

        + A(2,2,1) + A(3,3,2) + A(3,3,3);
elseif i == 6 | i == 11 | i == 16
    a = A(3,3,1) + A(1,1,1) + A(1,1,2);
elseif i == 10 | i == 15 | i == 20
    a = A(3,3,8) + A(2,2,7) + A(2,2,8);
elseif i == 8 | i == 13 | i == 18
    a = A(2,2,4) + A(1,1,5) +
A(1,1,6) ...
        + A(2,2,3) + A(3,3,4) + A(3,3,5);
elseif i == 9 | i == 14 | i == 19
    a = A(2,2,6) + A(1,1,7) + A(1,1,8) ...
        + A(2,2,5) + A(3,3,6) + A(3,3,7);
elseif i == 22 | i == 23 | i == 24
    a = A(2,2,2*i-19) + A(1,1,2*i-18) +
A(3,3,2*i-17);
elseif i == 21
    a = A(3,3,1);
elseif i == 25
    a = A(3,3,8) + A(2,2,7);
end
end

if j == i+1

    if i == 1 | i == 2 | i == 3 | i == 4
        a = A(1,2,2*i);
    elseif i == 6 | i == 11 | i == 16
        a = A(2,3,1) + A(1,2,2);
    elseif i == 7 | i == 12 | i == 17
        a = A(2,3,3) + A(1,2,4);
    elseif i == 8 | i == 13 | i == 18
        a = A(2,3,5) + A(1,2,6);
    elseif i == 9 | i == 14 | i == 19
        a = A(2,3,7) + A(1,2,8);
    elseif i == 21 | i == 22 | i == 23 | i == 24
        a = A(3,2,2*i-17);
    end

end

if j == i+5

    if i == 1 | i == 6 | i == 11 | i == 16
        a = A(1,3,1);
    elseif i == 2 | i == 7 | i == 12 | i == 17
        a = A(2,3,2) + A(1,3,3);
    elseif i == 3 | i == 8 | i == 13 | i == 18

```

```

        a = A(2,3,4) + A(1,3,5);
elseif i == 4 | i == 9 | i == 14 | i == 19
    a = A(2,3,6) + A(1,3,7);
elseif i == 5 | i == 10 | i == 15 | i == 20
    a = A(2,3,8);
end

end

end

```

البرنامج الثاني: برنامج الماتلاب للمثال (4-4)، عناصر منتهية مع تحليل الهوموتوبي.

```

clc, close, clear all
syms x y

xaxis = 0:0.5:1;
yaxis = 0:0.5:1;

[X Y] = meshgrid(xaxis,yaxis);

NumNod = numel(X);
u = sym('U', [1 NumNod])
NumEle = [size(xaxis,2)-1]*[size(yaxis,2)-1];
k=0;
indx=1:NumNod;
for i=1:size(yaxis,2)
    for j =1:size(xaxis,2)
        Mesh{i,j}= [xaxis(j) yaxis((size(yaxis,2))+1-i)
i)];
        if mod(i,2) == 1
            k=k+1;
            UMat(size(yaxis,2)+1-i,j)= u(1,k);
            IndxM(size(yaxis,2)+1-i,j)= indx(1,k);
            c=k;
        else
            k=k+1;
            UMat(size(yaxis,2)+1-i,size(xaxis,2)+1-j)=
u(1,k);
            IndxM(size(yaxis,2)+1-i,size(xaxis,2)+1-j)=
indx(1,k);
        end
    end
end
end

```

```

IntPoint=UMat( 2:(size(yaxis,2)-1) ,
2:(size(xaxis,2)-1) );
B_Left    = UMat( 2:size(yaxis,2)-1,1 );
B_Right   = UMat( 2:size(yaxis,2)-1,end );
B_Top     = UMat( 1,2:size(xaxis,2)-1 );
B_Bottom  = UMat( end,2:size(xaxis,2)-1 );
Edge      = [ UMat(end,1)  UMat(end,end)  UMat(1,end)
UMat(1,1) ];

```

```

k=0; t=0; ind=0; t=1;
for i=1:[size(yaxis,2)-1]
    for j=1:[size(xaxis,2)-1]

        a1 = X(1,j) ; b1 = Y(i,1) ;
        a2 = X(1,j+1); b2 = Y(i,1) ;
        a3 = X(1,j+1); b3 = Y(i+1,1);
        a4 = X(1,j) ; b4 = Y(i+1,1);

        if mod(i,2) == 1
            k=k+1;
            Elenode{i,j}= [a4 b4 a3 b3;a1 b1 a2 b2];
            LELeN{k}=Elenode{i,j};

            N1{k} = (x-a2)*(y-b4) / ((a1-a2)*(b1-b4));
            N2{k} = (x-a1)*(y-b4) / ((a2-a1)*(b1-b4));
            N3{k} = (x-a1)*(y-b1) / ((a2-a1)*(b4-b1));
            N4{k} = (x-a2)*(y-b1) / ((a1-a2)*(b4-b1));
            te([size(yaxis,2)-1]+1-i,t)=k;
            c=k;
        else
            k=k+1;
            ind=c+[size(xaxis,2)-1]+1-j;
            Elenode{i,[size(xaxis,2)-1]+1-j}= [a4 b4 a3
b3;a1 b1 a2 b2];
            LELeN{ind}=Elenode{i,[size(xaxis,2)-1]+1-j};

            N1{ind} = (x-a2)*(y-b4) / ((a1-a2)*(b1-b4));
            N2{ind} = (x-a1)*(y-b4) / ((a2-a1)*(b1-b4));
            N3{ind} = (x-a1)*(y-b1) / ((a2-a1)*(b4-b1));
            N4{ind} = (x-a2)*(y-b1) / ((a1-a2)*(b4-b1));
            te([size(yaxis,2)-1]+1-i,t)=ind;
        end
        t=t+1;
    end
end

```

```

        t=1;
    end
    clear a1 a2 a3 a4 b1 b2 b3 b4 c k ind t test i j;
    k=0; t=0; UMat0=UMat; Nstr = {'N1','N2','N3','N4'} ;
    %%
    NMat=UMat;
    %-----Edges-----
    NMat(end,1)    = N1{1};
    NMat(end,end)  = N2{te(end,end)};
    NMat(1,end)    = N3{te(1,end)};
    NMat(1,1)      = N4{te(1,1)};
    %-----Boundry-----
    for i=1:size(B_Left,1)
        NMat(i+1,1)= N1{te(i,1)} + N4{te(i+1,1)};
    end
    for i=1:size(B_Right,1)
        NMat(i+1,end)= N2{te(i,end)} + N3{te(i+1,end)};
    end
    for i=1:size(B_Top,2)
        NMat(1,i+1)= N3{te(1,i)} + N4{te(1,i+1)};
    end
    for i=1:size(B_Bottom,2)
        NMat(end,i+1)= N2{i} + N1{i+1};
    end
    %-----InteriorPoint-----
    for i=1:size(IntPoint,1)
        for j=1:size(IntPoint,2)
            NMat(i+1,j+1)= N3{te(i+1,j)} +
            N4{te(i+1,j+1)} + N1{te(i,j+1)} + N2{te(i,j)};
        end
    end

    %% ----- Uvales Initial-----

    for i=1:size(yaxis,2)
        for j =1:size(xaxis,2)
            UMat0(i,j) = 4/(3 + Mesh{i,j}(1,1)
            +Mesh{i,j}(1,2))^2;
        end
    end
    UMat0( 2:(size(yaxis,2)-1) , 2:(size(xaxis,2)-1) )=
    IntPoint;
    %% -----Uh (m) -----

    SMat= UMat0.*NMat;
    uh(2)=sum(SMat(:));

```

```

uh(1)=(94/225)*x*y - 0.7248878811*x - 0.7248878811*y
+ 0.870443466;
UH=uh(2);

for i=1:NumEle
    StartP(i,1:4)= [LELeN{1,i}(2,1)    LELeN{1,i}(2,3)
LELeN{1,i}(2,2)    LELeN{1,i}(1,2)];
end
%% ----- Stiffness MAtrix A(1) , A(2) , A(3) ,
A (4)
for m=1:NumEle
    xmin = StartP(m,1);xmax = StartP(m,2);ymin =
    StartP(m,3);ymax = StartP(m,4);
    for i=1:NumEle
        for j =1:NumEle
            df=eval(sprintf('
diff(N%d{%d},x)*diff(N%d{%d},x) +
diff(N%d{%d},y)*diff(N%d{%d},y) ',i,m,j,m,i,m,j,m));
            ht = matlabFunction(df);
            A(i,j,m) =integral2(ht,xmin,xmax,ymin,ymax);
        end
    end
end
%% ----- Stiffness F(1) , F(2) , F(3) , F (4)
h=0.5;
H=1;
for m=1:NumEle
    xmin = StartP(m,1);xmax = StartP(m,2);ymin =
    StartP(m,3);ymax = StartP(m,4);
    for i=1:NumEle
        df=eval(sprintf('
H*(diff(uh(1),x)*diff(N%d{%d},x) +
diff(uh(1),y)*diff(N%d{%d},y) +3*(uh(1)^2)*N%d{%d})
',i,m,i,m,i,m));
        ht = matlabFunction(df);
        F(m,i)
    =h*(integral2(ht,xmin,xmax,ymin,ymax));
    end
end
%% ----- value U5-----
for i=1:size(IntPoint,1)
    for j=1:size(IntPoint,2)
        dumt= A(3,3,te(i+1,j)) + A(4,4,te(i+1,j+1))
+ A(1,1,te(i,j+1)) + A(2,2,te(i,j));
        numt= F(te(i+1,j),3) + F(te(i+1,j+1),4) +
F(te(i,j+1),1) + F(te(i,j),2);
        val(2)= numt/dumt
    end
end

```

```

        end
    end
    clear F
    %% ----- loop-----
    for p=2:6

        mak=0;
        uh(p)= subs(UH,IntPoint,val(p));

        for m=1:NumEle
            xmin = StartP(m,1);xmax = StartP(m,2);ymin =
            StartP(m,3);ymax = StartP(m,4);
            for i=1:NumEle
                mak=0;
                for k=1:p
                    mak = mak+ uh(k) * uh( p + 1 -k ) ;
                end
                df=eval(sprintf(' (1+h*H) * (
diff(uh(p),x)*diff(N%d{%d},x) +
diff(uh(p),y)*diff(N%d{%d},y)) + 3*h*H*N%d{%d}*mak
',i,m,i,m,i,m));
                ht = matlabFunction(df);
                F(m,i) =integral2(ht,xmin,xmax,ymin,ymax);
            end
        end

        for i=1:size(IntPoint,1)
            for j=1:size(IntPoint,2)
                dumt= A(3,3,te(i+1,j)) + A(4,4,te(i+1,j+1))
+ A(1,1,te(i,j+1)) + A(2,2,te(i,j));
                numt= F(te(i+1,j),3) + F(te(i+1,j+1),4) +
F(te(i,j+1),1) + F(te(i,j),2);
                val(p+1)= numt/dumt
            end
        end
    end
    output = simplify(uh);
    output(:)

    clear xmax xmin ymax ymin i j k m p t te

```

البرنامج الثالث: برنامج الماتلاب للمثال (1-5) عندما  $h = 1$ .

```

clear;
NI=64;
NE=32;

```

```

ND=25;
NP=16;
X=[0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2
3 4];
Y=[0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4
4 4];
NDP=[1 2 3 4 5 6 10 11 15 16 20 21 22 23 24 25];
VAL=[0 -1.718434133 -6.389665272 -19.08690739 -
53.60058598 1.718434133 -51.87817424 6.389665272
-47.19383359 19.08690739 -34.4867156 53.60058598
51.87817424 47.19383359 34.4867156 0];
NL=[1 7 6 ; 1 2 7 ; 2 8 7 ; 2 3 8 ; 3 9 8 ; 3 4 9
; 4 10 9 ; 4 5 10 ; 6 12 11 ; 6 7 12 ; 7 13 12 ;
7 8 13 ; 8 14 13 ; 8 9 14 ; 9 15 14 ; 9 10 15 ;
11 17 16 ; 11 12 17 ; 12 18 17 ; 12 13 18 ; 13 19
18 ; 13 14 19 ; 14 20 19 ; 14 15 20 ; 16 22 21 ;
16 17 22 ; 17 23 22 ; 17 18 23 ; 18 24 23 ; 18 19
24 ; 19 25 24 ; 19 20 25];
EO = 1.0E-9/(36.0*pi);
ER = ones(1,NE);
C = zeros(ND,ND);
for I = 1:NE
    XL=X(NL(I,:));
    YL=Y(NL(I,:));
    P=[YL(2) - YL(3),YL(3) - YL(1),YL(1) -
YL(2)];
    Q=[XL(3) - XL(2),XL(1) - XL(3),XL(2) -
XL(1)];
    AREA=0.5*abs(P(2)*Q(3) - Q(2)*P(3));
    CE=ER(I)*(P'*P+Q'*Q)/(4*AREA);
    J=1:3;
    L=1:3;
    IR=NL(I,J);
    IC=NL(I,L);
    C(IR,IC)=C(IR,IC)+CE(J,L);
end
LF=setdiff(1:ND,NDP);
V=zeros(1,ND);
V(NDP)=VAL;
NF=length(LF);
for N = 1:NI
    for ii = 1:NF
        rowC = C(LF(ii),:);
        rowC(LF(ii)) = 0;
    end
end

```

```

        V(LF(ii)) = -
1/ (C(LF(ii),LF(ii)))*rowC*V.';
    end
    figure(1),stem(V),drawnow
end
disp([{'Node','X','Y','Potential'};num2cell((1:N
D),'X','Y','V')])

```



## دليل المصطلحات العلمية

نورد فيما يلي قائمة بأهم المصطلحات العلمية التي تم استخدامها في هذه الرسالة، مرتبة وفق حروف الهجاء العربية وما يقابلها باللغة الانكليزية.

أولاً: عربي - انكليزي

( أ )

Volume coordinates	إحداثيات الحجم
Natural coordinates	الإحداثيات الطبيعية
Length coordinates	إحداثيات الطول
Centroidal coordinates	الإحداثيات المركزية
Area coordinates	إحداثيات المساحة
Initial solution	الحل الابتدائي
Exact solution	الحل الفعلي
Absolute error	الخطأ المطلق
Relative error	الخطأ النسبي
Weak formula	الصيغة الضعيفة
Powerful formula	الصيغة القوية
Logistic equation	المعادلة اللوجستية
Semilinear equation	المعادلة شبه الخطية

( ت )

Global numbering	ترقيم عام
Local numbering	ترقيم محلي
Division	تقسيم
Temperature distribution	توزيع الحرارة

( ح )

Edge	حافة
------	------

( د )

Correction function	دالة التصحيح
Functional	دالي
Degrees of freedom	درجات الحرية
Shape functions	دوال الشكل
Weight function	دالة وزن

( ش )

Mixed boundary condition	شرط حدي مختلط
Dirichlet boundary condition	شرط ديرخلية الحدي
Neumann boundary condition	شرط نيومان الحدي

( ط )

Piccard iteration method	طريقة بيكارد التكرارية
Modified Adomian Decomposition Method	طريقة تفريق أدوميان المعدلة
Newton Raphson method	طريقة نيوتن رافسون
Newton Gauss method	طريقة نيوتن غاوس
Newton Galarkin method	طريقة نيوتن غالاركين

( ع )

Nodes	عقد
-------	-----

( م )

Green's theorem	مبرهنة غرين
Load vector	متجه الحمولة
Convergent sequece	متتالية متقاربة
Cauchy inequality	متراجحة كوشي
Hexahedron	متوازي المستطيلات
Quadratic triangular	مثلث تربيعي
Cubic triangular	مثلث تكعيبي
Linear triangular	مثلث خطي
Quintic triangular	مثلث خماسي

Quartic triangular	مثلث رباعي
Quadratic rectangular	مستطيل تربيعي
Cubic rectangular	مستطيل تكعيبي
Linear rectangular	مستطيل خطي
Stiffness matix	مصفوفة الصلابة
Deformation equation	معادلة التشوه
Taylor expansion	منشور تايلور
Region	منطقة
Projection Operator	مؤثر الإسقاط

( ن )

Theory of errors	نظرية الأخطاء
Energy norm	نظيم الطاقة

( هـ )

Pyramid	هرم
Homotopy	هوموتوبي

نورد فيما يلي قائمة بأهم المصطلحات العلمية التي تم استخدامها في هذه الرسالة، مرتبة وفق حروف الهجاء الانكليزية وما يقابلها باللغة العربية.

### ثانياً: انكليزي - عربي

#### ( A )

Absolute error	الخطأ المطلق
Area coordinates	إحداثيات المساحة

#### ( C )

Cauchy inequality	متراجحة كوشي
Centroidal coordinates	الإحداثيات المركزية
Convergent sequence	متتالية متقاربة
Correction function	دالة التصحيح
Cubic rectangular	مستطيل تكعيبي
Cubic triangular	مثلث تكعيبي

#### ( D )

Deformation equation	معادلة التشوه
Degrees of freedom	درجات الحرية
Dirichlet boundary condition	شرط ديرخلية الحدي
Division	تقسيم

#### ( E )

Edge	حافة
Energy norm	نظيم الطاقة
Exact solution	الحل الفعلي

#### ( F )

Functional	دالي
------------	------

#### ( G )

Global numbering	ترقيم عام
------------------	-----------

( H )

Hexahedron	متوازي المستطيلات
------------	-------------------

( I )

Initial solution	الحل الابتدائي
------------------	----------------

( L )

Length coordinates	إحداثيات الطول
Linear rectangular	مستطيل خطي
Linear triangular	مثلث خطي
Load vector	متجه الحمولة
Logistic equation	المعادلة اللوجستية

( M )

Mixed boundary condition	شرط حدي مختلط
Modified Adomian Decomposition Method	طريقة تفريق أدوميان المعدلة

( N )

Natural coordinates	الإحداثيات الطبيعية
Neumann boundary condition	شرط نيومان الحدي
Newton Galarkin method	طريقة نيوتن غالاركين
Newton Gauss method	طريقة نيوتن غاوس
Newton Raphson method	طريقة نيوتن رافسون
Nodes	عقد

( P )

Piccard iteration method	طريقة بيكاردي التكرارية
Powerful formula	الصيغة القوية
Projection operator	مؤثر الإسقاط
Pyramid	هرم

( Q )

Quadratic rectangular	مستطيل تربيعي
-----------------------	---------------

Quadratic triangular	مثلث تربيعي
Quartic triangular	مثلث رباعي
Quintic triangular	مثلث خماسي

( R )

Relative error	الخطأ النسبي
Region	منطقة

( S )

Semilinear equation	المعادلة شبه الخطية
Shape functions	دوال الشكل
Stiffness matix	مصفوفة الصلابة

( T )

Taylor expansion	منشور تايلور
Temperature distribution	توزيع الحرارة
Theory of errors	نظرية الأخطاء

( V )

Volume coordinates	إحداثيات الحجم
--------------------	----------------

( W )

Weak formula	الصيغة الضعيفة
Weight function	دالة وزن

## المراجع

- [1]. ABBASBANDY, S., 2003-Improving Newton-Raphson Method For Nonlinear Equations By Modified Adomain Decomposition Method, Applied Mathematics And Computation, 145(2003):887-893.
- [2] ABBASBANDY, S., 2006-The Application Of Homotopy Analysis Method To Nonlinee Equations Arising In Heat Transfer, Physics Letlers A 360(1): 109-113.
- [3]. ADOMAIN, G, 2013-Solving Frontier Problems Of Physics: The Decomposition Method, Springer Science & Business Media.
- [4] AGBEZUGE, L, 2010, Finite Element Solution Of The Poisson Equation With Dirchlet Boundary Conditions In A Rectangular Domain, Rochester Institute Of Techonolgy, New York.
- [5]. AIGO, M, 2016-Numerical Solution Of Navier-Stokes Equation Using Control Volume And Finite Element Method, International Journal Of Applied Mathematical Research, 5(1):63-68.
- [6] AKIN, J, E., 2005-Finite Element Analysis With Error Estimators, ElsevierButterworth-Heinemann.
- [7]. AMIR, M., YASEEN, M., and IQBAL, R, 2013-Exact Solutions Of Laplace Equation By Differential Transform Method, ar Xiv preprint ar Xiv:1312.7277.
- [8]. ARNOLD, D, 2018-Lecture Notes On Numerical Analysis Of Partial Differential Equation, University Of Minnesota.
- [9] ASADZADEH, M, 2017, An Introduction To The Finite Element Method (FEM) For Differential Equations, Chalmers University, Swedish.
- [10]. BAFGHI, M., LOGHNANI, GH., and HEYDARI, M, 2019-Jscobi-Picard Iteration Method For The Numerical Solution Of Nonlinear Initial Value Problems, Mathematics Method In The Applied Science, 7(2019): 1-28.
- [11]. BARTH, T., GRIEBEL, M., KEYES, D., NIEMINEN, R., ROOSE, D., and SCHLICK, T., 2010-Automated Solution Of Differential Equtions By The Finite Element Method. University Of Cambridge, United Kingdom.
- [12] BARTH, T., GRIEBEL, M., KEYES, D., NIEMINEN, R., ROOSE, D., and SCHLICK, T., 2010-The Finite Element Method Theory, Implementation And Applications. Umea University, Swedan.

- [13] BEHR, M., ARDRA, D., CARONADO, M., and Pasquali, M., 2006-Models and Finite Element Techniques for Blood Flow Simulation, International Journal for Computational Fluid Dynamics.
- [14]. BETHUEL, F., BREZIS, H, and HELEIN, F, 1994-Ginzburg-Landau Vortices, Birkhauser Basel.
- [15]. BRAESS, D., 2007-Finite Elements, Cambridge University Press, London.
- [16]. BOHMER, K, 2008-On Finite Element Methods For Fully Nonlinear Elliptic Equations Of Second Order, SIAM, 46(3): 1212-1249.
- [17]. BURDEN, R., and Faires, J, 2010-Numerical Analysis, Brooks/Cole, Cengage Learning, Canada
- [18]. CHAN, T, and GLOWINSKI, R, 1978- Finite Element Approximation And Iterative Solution Of A Class Of Mildly Nonlinear Elliptic Equations, Stanford University, California.
- [19]. CHUN, CH., HAM, Y, 2008-Some Fourth-Order Modifications Of Newton's Method, Applied Mathematics And Computation, 197(2008):654-658.
- [20]. CIARLET, P, 1978-The Finite Element Method For Elliptic Problems, North-Holland.
- [21]. CORDERO, A., and TORREGROSA, J., 2007-Variants Of Newton's Method Using Fifth-Order Quadrature Formulas, Applied Mathematics And Computation, 190(2007): 686-698.
- [22] CRISTESCU, I, 2013-Finite Element-Homotopy Analysis For Nonlinear Poisson Equation .University Of Bucharest, Romania.
- [23] DAVIES, J, 2011, The Finite Element Method, Oxford, USA.
- [24] ELMAN, H. SILVESTER., and WATHEN, A., 2005- Finite Elements And Fast Iterative Solvers, Oxford University, USA.
- [25] DAVIS, M., 2001-Numerical Methods & Modeling For Chemical Engineers, Wiley, California Institute Of Technology.
- [26]. DHUNDE, R., and WAGHMARE, G, 2017-Double Laplace Transform Method In Mathematical Physic, International Journal Of Theoretical And Mathematical Physics, 7(1): 14-20.
- [27]. DINH NOH, H., LETHI, TH., SERGEY, K., and MAXIM, SH, 2018- A Finite Difference Method For The Very Weak Solution To A Cauchy Problem For An Elliptic Equation, Journal Of Inverse And Ill-Posed Problems, 10(2018): 1-23.



- [28]. ELADDED, E., and TARIF, E, 2019-On The Coupling Of The Homotopy Perturbation Method And New Integral Transform For Solving Systems Of Partial Differential Equations, *Advances In Mathematical Physics*, 12(2019): 1-7.
- [29]. FANG, L., GUO, L., HU, X., and PANG, L, 2016-Seventh-Order Convergent Iterative Methods For Solving Nonlinear Equations, *International Journal Of Applied Science And Mathematics*, 3(6): 195-197.
- [30]. FENG, X., and NEILAN, M, 2009-Mixed Finite Element Method For The Fully Nonlinear Monge-Ampere Equation Based On The Vanishing Moment Method, *SIAM*, 47(2): 1226-1250.
- [31]. FRONTINI, M., and SORMANI, E, 2003-Some Variant Of Newton's Method With Third-Order Convergence, *Applied Mathematics And Computation*, 156(2003):419-426.
- [32]. GEISER, J, 2020-Numerical Picard's Iteration Methods For Simulation Of Non-Lipschitz Stochastic Differential Equations, *Symmetry*, 3(12): 1-23.
- [33]. GEISER, J, 2016-Picard's Iterative Method For Nonlinear Multicomponent Transport Equations, *Cogent Mathematics Journal*, 3(2016):1-22.
- [34] GENG, J., YAN, W., and XU, W., 2007- Application Of The Finite Element Method In Implant Dentistry, Springer.
- [35]. GIRAULT, V., and RAVIART, P, 1986-Finite Element Methods For Navier-Stokes Equations Theory And Algorithms, Springer-Verlag.
- [36] GOERGE, F. PINDER, 2018, Numerical Method For Solving partial Differential Equations, Wiley, USA.
- [37] GRUBER, R., and RAPPAZ, J., 1985- Finite Element Methods In Linear Ideal Magnetohydrodynamics, .
- [38]. HEINRICH, J., and PEPPER, D, 2017-The Finite Element Method: Basic Concepts And Applications With MATLAB, MAPLE, COMSOL, CRC Press.
- [39]. HEMEDA, A, 2009-Variational Iteration Method For Solving Non-Linear Partial Differential Equations, *Mathematical Method And Computing*, 39(3): 1297-1303.
- [40]. HERMANN, M. and SARAVI, M., 2016-Nonlinear Ordinary Differential Equations: Analytical Approximation And Numerical Methods, Springer.
- [41]. HERNANDEZ, C., MARTINEZ, R., and ARJONA, M., 2013-Application Of Tensor Analysis To The Finite Element Method, *Applied Mathematics And Computation*, 219(2013): 4625-4636.

- [42]. HESS, P and BROWN. K. J, 1990-Stability And Uniqueness Of Positive Solutions For A Semi-Linear Elliptic Boundary Value Problem, *Differential And Inegral Equations*, 3(2): 201-207.
- [43]. HSU, T., 1986-The Finite Element Method In Thermomechanics, Springer Netherland.
- [44]. HU, X., MU, L., and YE, X, 2018-A Weak Galarkin Finite Element Method For The Navier-Stokes Equations, *Journal Of Computational And Applied Mathematics*, 8(2018):1-19.
- [45]. IRANDOUST-PAKCHIN, S. and AHMADIAN, D., 2015-Homotopy Analysis Method For Computing Eigenvalues Of Sturm-Liouville Problems, *International Journal Of Nonlinear Science* 19(2):100-106.
- [46]. IMRAN, N., and MOHYUD DIN, T, 2013-Decomposition Method For Fractional Partial Differential Equation (PDEs) Using Laplace Transformation, *International Journal Of The Physical Science*, 8(16): 684-688.
- [47]. JIN, L, 2008-Homotopy Perturbation Method For Solving Partial Differential Equation With Varuable Coefficients, *INT.J.Contemp.Math*, 3(28): 1395-1407.
- [48]. KHURSHEED, A., 1999-The Finite Element Method In Charged Partiele Optics, Springer US.
- [49]. KILISSMAN, A., and ELTAYEB, H, 2010-A Note On Itegral Transforms And Partial Differential Equation, *Applied Mathematical Sciences*, 4(3): 109-118.
- [50]. KREYSIZIG, E., KREYSIZIG, H., and NORMINTON, E, 2011-Advanced Engineering Mathematics, Wiley.
- [51]. KUMAR, M., and KUMAR, P, 2009-A Finite Element Approach For Finding Positive Solutions Of Semilinear Elliptic Dirichlet Problems. Motilal Nehru National Institute of Technology, Allahabad 211004, Uttar Pradesh, India,1119-1128.
- [52] KUMAR, M., SRIVASTAVA, A., and MISHRA, G., 2014- A Finite Element Approach For Finding Positive Solutions Of a Logistic Equation With A Sign Changing Weight Function. Motilal Nehru National Institute of Technology, Allahabad 211004, UP, India,112-124.
- [53]. KUMAR, M., SRIVASTAVA, A., and SINGH, A, 2012-Numerical Simulation Of Singularly Pertubed Non-Linear Elliptic Boundary Value Problems Using Finite Element Method, *Applied Mathematics And Computation*, 219(2012): 226-236.

- [54]. LAKKIS, O., and PRYER, T, 2013-A Finite Element Method For Nonlinear Elliptic Problems, Society For Industrial And Applied Mathematics, 35(4):2025-2045.
- [55]. LAPIDUS, L., and PINDER, G, 1999-Numerical Solution Of Partial Differential Equations In Science And Engineering, Wiley, Canada.
- [56]. LIAO, S., (2003). " Beyond Perturbation: Introduction To The Homotopy Analysis Method, CRC Press.
- [57]. LIAO, S., 2012-Homotopy Analysis Method In Nonlinear Differential Equations, Springer.
- [58]. LIEMERT, A., and KIENLE, A., 2014-Exact Solution Of Poissons's Equation With An Elliptical Boundary, Applied Mathematics And Computation, 238(2014): 123-131.
- [59]. LIU, X., LI, J., and CHEN, Z, 2017-A Weak Galerkin Finite Element Method For The Navier-Stokes Equations, Journal Of Computational And Applied Mathematics, 11(2017):1-19.
- [60]. LYONS, R., VATSALA, A., and CHIQUET, R, 2017-Picard's Iterative Method For Caputo Fractional Differential Equations With Numerical Results, MDPI Journal, 5(65):1-9.
- [61]. MADENCI, E, 2015-The Finite Element Method And Applications In Engineering Using ANSYS, Springer US.
- [62] MARKOPOULOS, A., 2013-Finite Element Method In Mechanical Processes, Springer-Verlag London.
- [63] MARRAW, L., 2014-An Investigation Of The Homotopy Analysis Method For Solving Nonlinear Differential Equations, Austral. Math. Sci. Institute.
- [64]. MARTINEZ, Y., and AGUILAR, G., 2018-A New Modified Definition Of Caputo-Fabrizio Fractional-Order Derivative And Their Applications To The Multi Step Homotopy Analysis Method (MHAM), Journal Of Computational And Applied Mathematics, 8(2018): 1-25.
- [65]. MAZUMBER, S, 2016-Numerical Methods For Partial Differential Equation: Finite Difference And Finite Volume Method, Academic Press.
- [66]. MEBRATE, B., and KOYA, P, 2015-Numerical Solution Of A Two Dimensional Poisson Equation With Dirichlet Boundary Conditions, American Journal Of Applied Mathematics, 3(6): 297-304.
- [67] MEUNEIR, G., 2008-The Finite Element Method For Electromagnetic Modeling, Wiley, United States

- [68] MUSA, S., 2012-Computational Finite Element Methods In Nanotechnology, Taylor&Francis.
- [69]. NOOR, K., NOOR, M., and MOMANI, SH, 2007-Modified Housholder Iterative Method For Nonlinear Equations, Applied Mathematics And Computation, 190(2007): 1534-1539.
- [70]. PARAG, V, PATIL, DR, J. S. V. R. KRISHNA PRASAD, 2013, Solution Of Laplace Equation Using Finite Element Method, IOSR Jornal Of Mathematics, India,6(4) :66-75.
- [71]. PAPANIKOS, G., and GOUSIDOU-KOUTITA, M.CH., 2015-A Computational Study With Finite Element Method And Finite Difference Method For 2D Elliptic Partial Differential Equations, Applied Mathematics,6,2104-2124.
- [72]. PATIL, P., and PRASAD, J, 2013-Numerical Solution For Two Diemensional Laplas Equation With Dirichlet Boundary Conditions, ISOR Journal Of Mathematics,6(4): 66-75.
- [73]. RAFTARI, B., KHOSRAVI, H. and YILDIRIM, A., 2013-Homotopy Analysis Method For The One-Dimensional Hyperbolic Telegraph Equation With Initial Conditions, International Journal Of Numerical Method For Heat & Fluid Flow 23(2):255-372.
- [74]. RAMOS, J, 2009-Picard's Iterative Method For Nonlinear Advection-Reaction-Diffusion Equation, Applied Mathematics And Computation, 215(2009):1523-1526.
- [75]. SABONNADIERE, J., and COULOMB, J., 1987- Finite Element Methods In CAD: Electrical And Magnetic Field, Springer-Verlag NewYork.
- [76]. SADOWSKI, N., 2003- Electromagnetic Modeling By Finite Element Methods, University Federal De Santa Catarina, Florianopolis, Brazil.
- [77]. SEWELL, G, 2005- The Numerical Solution Of Ordinary And Partial Differential Equation, Wiley.
- [78]. SINGH, G, 2018, Short Introduction To Finite Element Method, Norwegain University Of Science And Technology, Trondheim. Norway.
- [79]. SHI, D., and LIU, Q, 2018-Unconditional Superconvergent Analysis Of A New Mixed Finite Element Method For Ginzburg-Landau Equation, Wiley Online Library, 2018(8): 1-28.
- [80]. SHI, D., and LIU, Q, 2020-Superconvergence Analysis Of A Two Grid Finite Element Method For Ginzburg-Landau Equation, Applied Mathematics And Computation, 365(2020):1-10.

- [81]. SOLSVIK, J., and JAKOBSEN, N, 2015-Spectral Solution Of The Breakage-Coalescence Population Balance Equation Picard and Newton Iteration Methods, Applied Mathematical Modelling, 8(2015):1-19.
- [82]. SULI, E, 2019, Lecture Note On Finite Element Method For Partial Differential Equations, University Of Oxford, USA.
- [83]. SUSANNE C,BRENNER and L.RIDGWAY SCOTT, 2008-The Mathematical Theory Of Finite Elenent Methods, Springer-Verlag, New York.
- [84]. SZINVELSKI, SH., VILHENA, M., and CARVALHO, J, 2006-Semi-Analytical Solution Of Asymptotic Langevin Equation By The Picard Iterative Method, Environmental Modelling & Software, 21(2006):406-410.
- [85]. VASSILIOS A.DOUGALIS,2013-Finite Element Methods For The Numerical Solution Of Partial Differential Equations, University Of Athens and FORTH, Greece.
- [86]. WANG, X., and LI, Y, 2017-An Efficient Sixth-Order Newton's-Type Method For Solving Nonlinear Systems, MDPI Journal, 4(10):1-9.
- [87]. WU,. J, and, ZHANG,. X, 2009-Finite Element Method By Using Quartic B-Splines , Numerical Method For Partial Differential Equations, 10.1002, 2055, 818-829.
- [88]. ZADEH JAFARI, H., and KARIMI, M, 2010-Homoyopy Analysis Method For Solving Integral And Integro Differential Equations, IJRRAS, 2(2): 140-144.
- [89]. ZHAO, J., ZHANG, T., and CORLESS, R, 2006- Convergence Of The Compact Finite Difference Method For Second Order Elliptic Equations, Applied Mathematics And Computation, 182(2006): 1454-1469.
- [90]. ZHU, B, 2018-The Finite Element Method: Fundamentals And Application In Civil, Hydraulic, Mechanical and Aeronauticak Engineering, Wiley.

[91]: د. برلنت صبري مطيط و آلاء محمّد حقي، 2017- دراسة طرائق تحليلية تقريبية لحل معادلات تفاضلية وتفاضلية تكاملية. رسالة ماجستير. جامعة دمشق.

[92]: د. برلنت صبري مطيط و أماني الملا، 2012- الحلول التقريبية لمعادلات هارترِي\_فوك الذرية. رسالة ماجستير. جامعة دمشق.

[93]: مطيط، الحلول العددية للمعادلات التكاملية والتفاضلية الجزئية ومسائل القيم الحدية، برلنت،

- [94]. علي، مطيط، اصلان، 2020 - الحل العددي لبعض الناذج الناقصية باستخدام طريقة العناصر المنتهية، مجلة جامعة البعث، حمص، 42(1): 11-46.
- [95]. علي، مطيط، اصلان، 2020 - الحل التقريبي لمعادلة بواسون غير الخطية بطريقة هوموتوبي- العناصر المنتهية FE-HM، المجلة العربية للعلوم ونشر الأبحاث، 4 (2): 19-29.
- [96]. علي، مطيط، اصلان، 2020 - طريقة العناصر المنتهية للمعادلات الناقصية غير الخطية باستخدام تحسين طريقة نيوتن رافسون بواسطة طريقة تحليل أدوميان المعدلة ، مجلة جامعة البعث.

# Abstract

In this thesis, we presented a study to find the approximate solution of the Elliptic differential equations by the Finite Element Method in two-dimensional space with mixed boundary conditions that combine the Dirchlit condition and the Neuwman condition, and our interest in the numerical solution is due to the fact that the actual solution is difficult to find often, as we discussed in this thesis the basics of building a Finite Element Method of linear Elliptic equations with constant and variable coefficients in Cartesian coordinates, area coordinates, and central coordinates, and clarify all the necessary steps for that, then we moved to find the approximate solution of non-linear Elliptic equations using the finite element method, whose approximate solution is difficult to find without the use of other methods, This is because the finite element method needs when applied to non-linear partial differential equations either for iterative methods such as (Newton-Gauss method, Picard iterative method, Newton\_Galarkin method, Newton-Raphson method with various degrees of approximation) or to combine it with other approximate methods such as the homotopy analysis method, where we were able to enter All previous iterative methods on the way of finite elements and finding approximate solutions for some non-linear Elliptic equations, then we worked on combining the finite element method with the method of homotopy analysis in one way in order to convert the nonlinear matter into a linear problem through the method of homotopy analysis, and to overcome the engineering complexity of the region by means of a grid of finished elements by the Finite Element Method, Where the importance of this merging method lies in its applicability to all partial differential equations, and it gives results much faster than applying each method alone, then we moved to estimate the error committed during the application of the terminated elements method and proving the necessary theorems needed to arrive at the error phrase, and because the ending elements method requires a lot of time Due to the many steps and the need for a large number of elements, we have included some Matlab programs that serve many examples in this thesis, which helps in saving a lot of time, It is worth noting that some of these examples were mentioned in the references, so we reformulated these examples and presented them in a simple and detailed manner that clarifies the mechanism of the method and helps the reader to understand.

**Key words:** elliptic differential equations, finite element method, mixed boundary conditions, weak formula, stiffness matrices, load vector, weight function, shape function, degrees of freedom, Piccard iteration method, Newton-Galarkin method, Newton-Raphson method, Homeopy Analysis Method.

Syrian Arab Republi  
AL-Baath University  
Faculty Of Scince  
Department Of Mathematics



# Approximation Solutions For Elliptic Differential Equations In Two Dimensions Using Finite Element Method On Mixed Boundary Conditions

A Dissertation Submitted for the Master Degree in Pure Mathematics  
(Numerical Analysis)

by  
**Hiba Zakaria Aslan**

Supervisor

**Dr. Habib Ali**

Associate Professor In  
Department Of Mathematics  
Faculty Of Science  
Al-Baath University

**Dr. Berlant Sabri Mattit**

Professor In Department  
Of Mathematics  
Faculty Of Science  
Damascus University